

سلسلة ملخصات  
شوم

# حساب التفاضل والتكامل

الطبعة العربية التاسعة

2009

تأليف: فرانك أيرز

يغطي جميع أساسيات المنهج ويكمل أى منهج دراسي.

أفضل وسيلة لمساعدة الطالب لتجعله متميزاً في الاختبارات  
ويحصل على أعلى الدرجات.

يحتوي الكتاب على أكثر من 1170 مسألة محلولة حلاً كاملاً.

سلسلة شوم بيعت  
منها أكثر من 30  
مليون نسخة في  
العالم





ملخصات شوم  
نظريات ومسائل  
فى  
حساب  
التفاضل والتكامل

تأليف

دكتور/ فرانك آيرز

أستاذ ورئيس قسم الرياضيات  
كلية ديكسون

نسق نسخة النظام المترى

جاك أولت، ماجستير

محاضر فى الرياضيات  
جامعة ليستر

ترجمة

نخبة من الأساتذة المتخصصين

مراجعة

دكتور/ محمود أبو زيد

جامعة المنصورة

قسم الطبيعة - جمهورية مصر العربية

---

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.

مصر

## حقوق النشر

**Schaum's Outline of Advanced Calculus**

by: Frank Ayres

Copyright © by McGraw-Hill Companies Inc.

All rights reserved.

## حساب التفاضل والتكامل

• الطبعة العربية التاسعة: حقوق الطبع والنشر © 2009، جميع الحقوق محفوظة للناس.

رقم الإيداع: 2003/15188

ISBN 977-282-168-0

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.

122 عثمان بن عفان - الكلية الحربية - مصر الجديدة - القاهرة - مصر

ص.ب. 5599 هليوبوليس غرب / القاهرة - تليفون: 26391113/26391112 فاكس: 26372122 (00202)

بريد إلكتروني: ihci@link.net

موقع إلكتروني: www.ihciegypt.com

**International House for Cultural Investments S.A.E**

122 Osman Ebn Affan Alkolia Al Harbia - Masr Al Gedida

P.O. Box 5599 Heliopolis West, Cairo, Egypt

E-mail: ihci@link.net

Website: www.ihciegypt.com

لا يجوز نشر أي جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أي نحو أو بأي طريقة

سواء كانت إلكترونية أو ميكانيكية أو خلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقدماً.



## مقدمة

إن الهدف من هذا الكتاب هو ، كما ذكرنا في مقدمة الطبعة الأولى أن يزود الطلاب المبتدئين في دراسة حساب التفاضل والتكامل الابتدائي بمجموعة من المسائل النموذجية المحولة بعناية ، وبالإضافة إلى ذلك فإن هذا الكتاب يخدم طلاب العلوم والهندسة الذين يشعرون بحاجة إلى نظرة عامة في الدراسة النظرية الأساسية وإلى مسائل في هذا الموضوع . وبما أن هذه الطبعة قد اشتملت على براهين النظريات وطرق استنتاج التفاضل والتكامل ، وعلى العدد الوفير من المسائل الإضافية فإنه من الممكن استخدامه ككتاب مناسب لمقرر دراسي منهجي .

أما مخطط الكتاب فهو لا يختلف اختلافا جوهريا عن الطبعة السابقة ، فكل فصل منه يبدأ بسرد التعاريف والمبادئ والنظريات المتعلقة بالموضوع ، يلي ذلك مادة توضيحية ومسائل محلولة تم اختيارها بحيث لا تخدم في توسيع المادة النظرية فقط ، بل تزود الطالب بشكل عمل بما يساعده في صياغة المسائل وحلها واستعادة المبادئ الأساسية الضرورية من أجل تعليم شمر ، ومن أجل مواجهة الصعوبات التي يلاقيها المبتدئون عادة ، ومن أجل توضيح العديد من تطبيقات حساب التفاضل والتكامل بالإضافة لذلك فلقد غشنا المسائل المحولة الجديدة من براهين النظريات والنتائج الأساسية . إن استخدام هذا الكتاب سواء بشكل ضال أو باحباره مرجعا إضافيا لكتاب المقرر ، يتطلب أكثر من دراسة مطقة للمسائل المحولة إذ ينبغي أن نتعلم من كل مسألة شيئا جديدا ، الأمر الذي يتم على وجه أفضل بإعادة حل المسائل خطوة خطوة فإذا ما فعلنا ذلك فإننا سوف لا نلاق صعوبة تذكر عند حل أغلب المسائل الإضافية .

إن الزيادة في حجم الطبعة والتي تبلغ خمسين في المائة عن الطبعة السابقة تقريبا تعود بوجه خاص إلى الإضافات التي ألقينا إليها . كذلك فإننا نلفت النظر إلى إضافات وتغييرات أخرى كالمعالجة الأكثر شولا لمفهوم النهاية واتصال الدوال والمتسلسلات غير المنتهية والمنتبة ، الموسعة نوعا ما والمتعلقة بالتجهيزات المستوية أو الفراغية .

ولكى يمكن وضع الحساب الابتدائي في التكامل وحساب المساحات والحجوم إلخ ، بترتيب يختلف عن ترتيب هذا الكتاب ، فلقد صيغت هذه الفصول بحيث يمكن النظر في أقسام واسعة منها ببلثرة بعد الفصل السادس . وهكذا فإن الذين يستخدمون هذا الكتاب كمرجع إضافي سوف لا يجدون صعوبة في جعله ملائما لحاجاتهم .

وفي الختام يود المؤلف أن يشتهر هذه المنحة ليبر عن شكره للدارس شوم للنشر لما تقدمت من عون في هذا الصدد .

فرانك آهرز







# المحتويات

الصفحة	الفصل
٩- ١ . . . . .	الفصل الأول
٢٢- ١٠ . . . . .	الفصل الثاني
٢٧- ٢٣ . . . . .	الفصل الثالث
٢٤- ٢٨ . . . . .	الفصل الرابع
٤٢- ٣٥ . . . . .	الفصل الخامس
٤٥- ٤٣ . . . . .	الفصل السادس
٥٢- ٤٦ . . . . .	الفصل السابع
٦٢- ٥٣ . . . . .	الفصل الثامن
٦٧- ٦٣ . . . . .	الفصل التاسع
٧١- ٦٨ . . . . .	الفصل العاشر
٧٥- ٧٢ . . . . .	الفصل الحادى عشر
٨٢- ٧٦ . . . . .	الفصل الثانى عشر
٨٦- ٨٣ . . . . .	الفصل الثالث عشر
٩٣- ٨٧ . . . . .	الفصل الرابع عشر
٩٨- ٩٤ . . . . .	الفصل الخامس عشر
١٠١- ٩٩ . . . . .	الفصل السادس عشر
١٠٨-١٠٢ . . . . .	الفصل السابع عشر
١١٩-١٠٩ . . . . .	الفصل الثامن عشر
١٢٦-١٢٠ . . . . .	الفصل التاسع عشر
١٣٥-١٢٧ . . . . .	الفصل العشرون
١٤٢-١٣٦ . . . . .	الفصل الحادى والعشرون
١٤٨-١٤٣ . . . . .	الفصل الثانى والعشرون
١٥٣-١٤٩ . . . . .	الفصل الثالث والعشرون
١٦١-١٥٤ . . . . .	الفصل الرابع والعشرون
١٧١-١٦٢ . . . . .	الفصل الخامس والعشرون



الفصل	الصفحة
الفصل السادس والعشرون	التكامل بالتجزئة . . . . . ١٧٨-١٧٢
الفصل السابع والعشرون	التكاملات المثلثية . . . . . ١٨٢-١٧٩
الفصل الثامن والعشرون	التمويضات المثلثية . . . . . ١٨٥-١٨٣
الفصل التاسع والعشرون	التكامل بالكسور الجزئية . . . . . ١٩٠-١٨٦
الفصل الثلاثون	تمويضات متنوعة . . . . . ١٩٤-١٩١
الفصل الحادي والثلاثون	تكامل الدوال الزائدية . . . . . ١٩٦-١٩٥
الفصل الثاني والثلاثون	نظريات على التكامل غير المحدد . . . . . ٢٠١-١٩٧
الفصل الثالث والثلاثون	التكامل المحدد . . . . . ٢١١-٢٠٢
الفصل الرابع والثلاثون	حساب المساحات المستوية بالتكامل . . . . . ٢١٨-٢١٢
الفصل الخامس والثلاثون	حجوم أجسام دورانية . . . . . ٢٢٣-٢١٩
الفصل السادس والثلاثون	حجوم الأجسام ذات المقاطع المعلومة . . . . . ٢٢٦-٢٢٤
الفصل السابع والثلاثون	المراكز المتوسطة للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة . . . . . ٢٣٢-٢٢٧
الفصل الثامن والثلاثون	عزوم القصور الذاتي للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة . . . . . ٢٣٩-٢٣٤
الفصل التاسع والثلاثون	ضبط السائل . . . . . ٢٤٤-٢٤٠
الفصل الأربعون	الشغل . . . . . ٢٤٨-٢٤٥
الفصل الحادي والأربعون	طول قوس . . . . . ٢٥٢-٢٤٩
الفصل الثاني والأربعون	مساحة السطح الدوراني . . . . . ٢٥٦-٢٥٣
الفصل الثالث والأربعون	المركز المتوسط وعزوم القصور الذاتي لأقواس المنحنيات والسطوح الدورانية . . . . . ٢٦٠-٢٥٧
الفصل الرابع والأربعون	مساحات السطوح المستوية ومراكزها المتوسطة في الاحداثيات القطبية . . . . . ٢٦٥-٢٦١
الفصل الخامس والأربعون	أطوال الأقواس ومراكزها المتوسطة ومساحات السطوح الدورانية في الاحداثيات القطبية . . . . . ٢٧٠-٢٦٦
الفصل السادس والأربعون	التكاملات الممتدة . . . . . ٢٧٧-٢٧١
الفصل السابع والأربعون	المتواليات والمتسلسلات غير المنتهية ( اللانهائية ) . . . . . ٢٨٣-٢٧٨
الفصل الثامن والأربعون	اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات الموجبة . . . . . ٢٩١-٢٨٤
الفصل التاسع والأربعون	امتسلسلات ذات الحدود السالبة . . . . . ٢٩٥-٢٩٢
الفصل الخمسون	الحساب بالمتسلسلات . . . . . ٣٠١-٢٩٦
الفصل الحادي والخمسون	متسلسلات القوى . . . . . ٣٠٨-٣٠٢
الفصل الثاني والخمسون	فك الدوال في متسلسلات . . . . . ٣١٥-٣٠٩
الفصل الثالث والخمسون	مسيح ماكليورين وتايلور مع البواقي . . . . . ٣١٩-٣١٦
الفصل الرابع والخمسون	حسابات عددية باستخدام متسلسلات قوى . . . . . ٣٢٣-٣٢٠
الفصل الخامس والخمسون	القيمة التقريبية للتكامل . . . . . ٣٢٨-٣٢٤
الفصل السادس والخمسون	المشتقات الجزئية . . . . . ٣٣٥-٣٢٩



الصفحة	الفصل
٣٤٤-٣٣٦ . . . . .	الفصل السابع والخمسون
٣٤٨-٣٤٥ . . . . .	الفصل الثامن والخمسون
٣٥٥-٣٤٩ . . . . .	الفصل التاسع والخمسون
٣٦٣-٣٥٦ . . . . .	الفصل الستون
٣٧٧-٣٦٤ . . . . .	الفصل الحادى والستون
٣٩١-٣٧٨ . . . . .	الفصل الثانى والستون
٣٩٩-٣٩٢ . . . . .	الفصل الثالث والستون
٤٠٥-٤٠٠ . . . . .	الفصل الرابع والستون
٤٠٩-٤٠٦ . . . . .	الفصل الخامس والستون
٤١٤-٤١٠ . . . . .	الفصل السادس والستون
٤٢٤-٤١٥ . . . . .	الفصل السابع والستون
٤٢٩-٤٢٥ . . . . .	الفصل الثامن والستون
٤٣٦-٤٣٠ . . . . .	الفصل التاسع والستون
٤٤١-٤٣٧ . . . . .	الفصل البعون
٤٥٠-٢٤٢ . . . . .	المصطلحات
٤٥٤-٤٥١ . . . . .	الفهرس





# الفصل الأول

## « المتغيرات والدوال »

تشكون مجموعة الأعداد الحقيقية من الأعداد القياسية ، أى الأعداد الصحيحة ( الموجبة والسالبة والصفر والكسور العادية  $a/b$  حيث  $a$  و  $b$  عددان صحيحان ) ومن الأعداد غير القياسية ( الكسور العشرية غير المنتهية ، مثل  $\sqrt{2} = 1.4142$  ،  $\pi = 3.141559...$  و  $e = 2.718281828...$  التى ليست نسباً بين أعداد صحيحة ) .

لا تلعب الأعداد الجبرية التخيلية دوراً هنا واستعمالنا لهذا المصطلح فقط يرجع إلى أن هذه الأعداد غير متضمنة ، وحيث أنه لا مكان للالتباس فإن مصطلح العدد يستعمل فيما يل ليدل على عدد حقيقى .

تعرف القيمة المطلقة أو العددية (  $|N|$  ) لعدد ( حقيقى )  $N$  فإن :

$$\begin{aligned} \text{إذا كان } N \text{ صفراً أو عدداً موجباً.} & \quad |N| = N \\ \text{إذا كان } N \text{ عدداً سالباً.} & \quad |N| = -N \end{aligned}$$

$$\text{فمثلاً } |3| = |-3| = 3, |3-5| = |5-3| = 2$$

$$\begin{aligned} x \geq a & \quad \text{إذا كانت} \quad |x-a| = x-a \\ x < a & \quad \text{إذا كانت} \quad |x-a| = a-x \end{aligned}$$

$$\text{وعموماً إذا كانا } a \text{ و } b \text{ أى عددين فإن} \quad -|a| \leq a \leq |a|$$

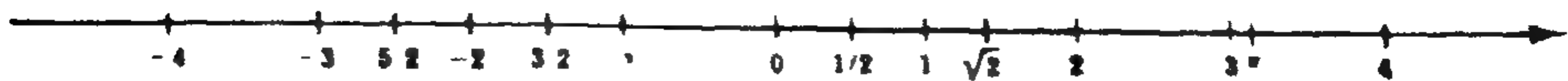
$$|a \pm b| = |b \pm a|; \quad |ab| = |a| \cdot |b|; \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0;$$

$$|a+b| \geq |a| - |b|; \quad |a-b| \leq |a| + |b|;$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|; \quad |a-b| \geq |a| - |b|.$$

**المسلم العددي :** هو تمثيل بياني للأعداد الحقيقية بواسطة نقط الخط المستقيم ، فكل عدد يقابل نقطة ( ونقطة واحدة فقط ) وبالعكس ، وعلى هذا فإن مصطلحى عدد ونقطة ( على السلم العددي ) يستعملان دون تمييز لأحدهما على الآخر .

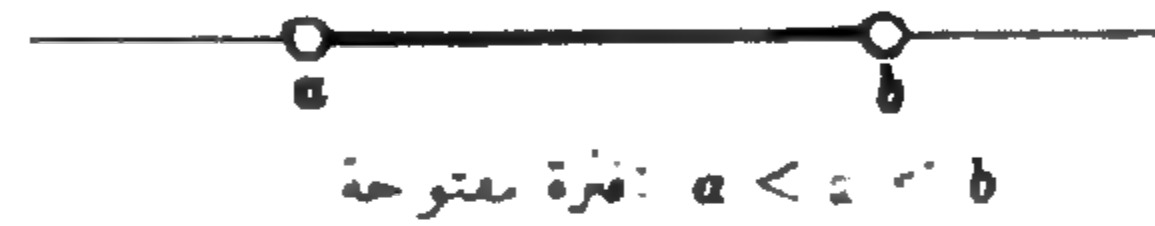
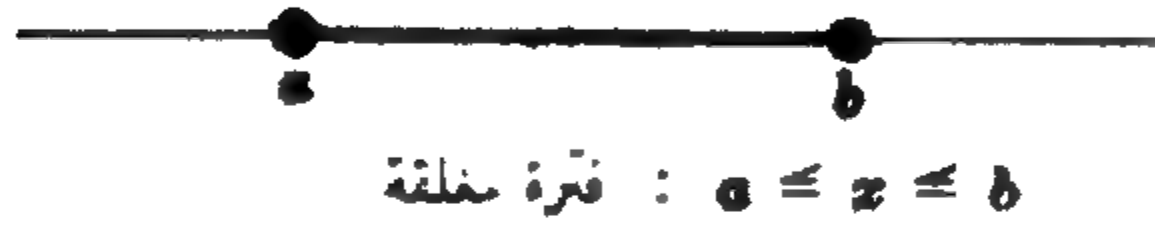
وتمثيل سلم عددي على مستقيم مفروض ( i ) نختار نقطة ما من نقطة المستقيم كنقطة أصل ( مقابلة للعدد 0 ) . ( ii ) نختار اتجاهًا نعتبره موجباً ( نرسم له برأس سهم ) . (iii) نحدد بالإستقامة بوحدة قياس مناسبة النقطة 1 + التى تبعد عن 0 بوحدة المسافة . عندئذ يكون العددان (النقطتان)  $-N$  و  $+N$  على جهتين متقابلتين بالنسبة لـ 0 وتبعدان  $|N|$  وحدة عنه .



إذا كان  $a$  و  $b$  عددين مختلفين ، عندئذ تنص  $a < b$  أن  $a$  على يسار  $b$  في السلم بينما تنص  $a > b$  أن  $a$  على يمين  $b$ .  
وأما المسافة الموجبه من  $a$  إلى  $b$  فتعطي بـ  $b - a$  وتكون سالبة إذا كان  $a > b$  وموجبة إذا كان  $a < b$  وفي كلا الحالتين تكون  $b$  على المسافة غير الموجبه  $|a - b| = |b - a|$  من  $a$ .

**الفترة المحددة :** ليكن  $a$  و  $b$  عددين بحيث يكون  $a < b$  تسمى مجموعة جميع الأعداد  $x$  بين  $a$  و  $b$  بالفترة المفتوحة من  $a$  إلى  $b$  وتكتب بالشكل  $a < x < b$  ، وتسمى النقطتان  $a$  و  $b$  بنقطتي النهاية للفترة . والفترة المفتوحة لا تتضمن نقطتي نهايتها .

تسمى الفترة المفتوحة  $a < x < b$  بالإضافة إلى نقطتي نهايتها  $a$  و  $b$  بالفترة المغلقة من  $a$  إلى  $b$  وتكتب  $a \leq x \leq b$



**الفترة غير المحددة :** ليكن عدداً ما . تسمى مجموعة جميع الأعداد  $x$  التي تحقق المعادلة  $x < a$  بالفترة غير المحددة . يمكن تعريف فترات غير محددة أخرى بـ  $a \leq x$  و  $x > a$  و  $x \geq a$  . (أنظر المسألتين ١ - ٢)

**الثابت والمتغير :** نلاحظ في تعريف الفترة  $a < x < b$  أن :

- ( i ) كلا من الرمز  $a$  و  $b$  يمثل عدداً واحداً يسمى ثابتاً .
  - ( ii ) أما الرمز  $x$  فيمثل أى عدد من مجموعة من الأعداد ويسمى متغيراً . .
- وتعبر مدى المتغير هو اسم آخر لهذه المجموعة من الأعداد التي يمثلها هذا المتغير ، مثال ذلك :

( ١ )  $x$  هو مجلد من مجموعة كتب من عشرة مجلدات ، إذن مدى  $x$  هو مجموعة الأعداد الصحيحة 1, 2, 3, ..., 10

( ٢ )  $x$  هو يوم من شهر يوليو ( تموز ) ، إذن مدى  $x$  هو المجموعة 1, 2, 3, ..., 31

( ٣ )  $x$  هي كمية الماء ( بالليترات ) التي يمكن سحبها من خزان ملوئ سعة أربعين لتراً ، إذن مدى  $x$  هو الفترة

$$0 \leq x \leq 40$$

**المتباينات :** مثل  $2x - 3 > 0$  و  $5x - 24 \leq 0$  وهي تحدد فترات على السلم العددي .

**مثال ١ :** حل المتباينة (أ)  $2x - 3 > 0$  ، (ب)  $5x - 24 \leq 0$  .

(أ) ضع  $2x - 3 = 0$  فنحصل على  $x = 3/2$  اعتبر بعد ذلك الفترتين  $x < 3/2$  ،  $x > 3/2$  .  
لأية قيمة لـ  $x$  في الفترة  $x < 3/2$  ،  $x = 0$  مثلاً ، نجد أن  $2x - 3 < 0$  ولأية قيمة لـ  $x$  في الفترة  $x > 3/2$  ،  $x = 3$  مثلاً ، نجد أن  $2x - 3 > 0$  وعلى هذا فإن  $2x - 3 > 0$  لجميع قيم  $x$  في الفترة  $x > 3/2$  .

(ب) ضع  $x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8) = 0$  . فنحصل على  $x = -3$  و  $x = 8$  واعتبر الفترات  $x < -3$  ،  $-3 < x < 8$  ، و  $x > 8$  . فنجد أن  $x^2 - 5x - 24 > 0$  في الفترتين  $x < -3$  و  $x > 8$  .  
في حين أن  $x^2 - 5x - 24 < 0$  في الفترة  $-3 < x < 8$  . ولهذا يكون  $5x - 24 \leq x^2$  في الفترة  $-3 \leq x \leq 8$  .  
أنظر أسألة ٢



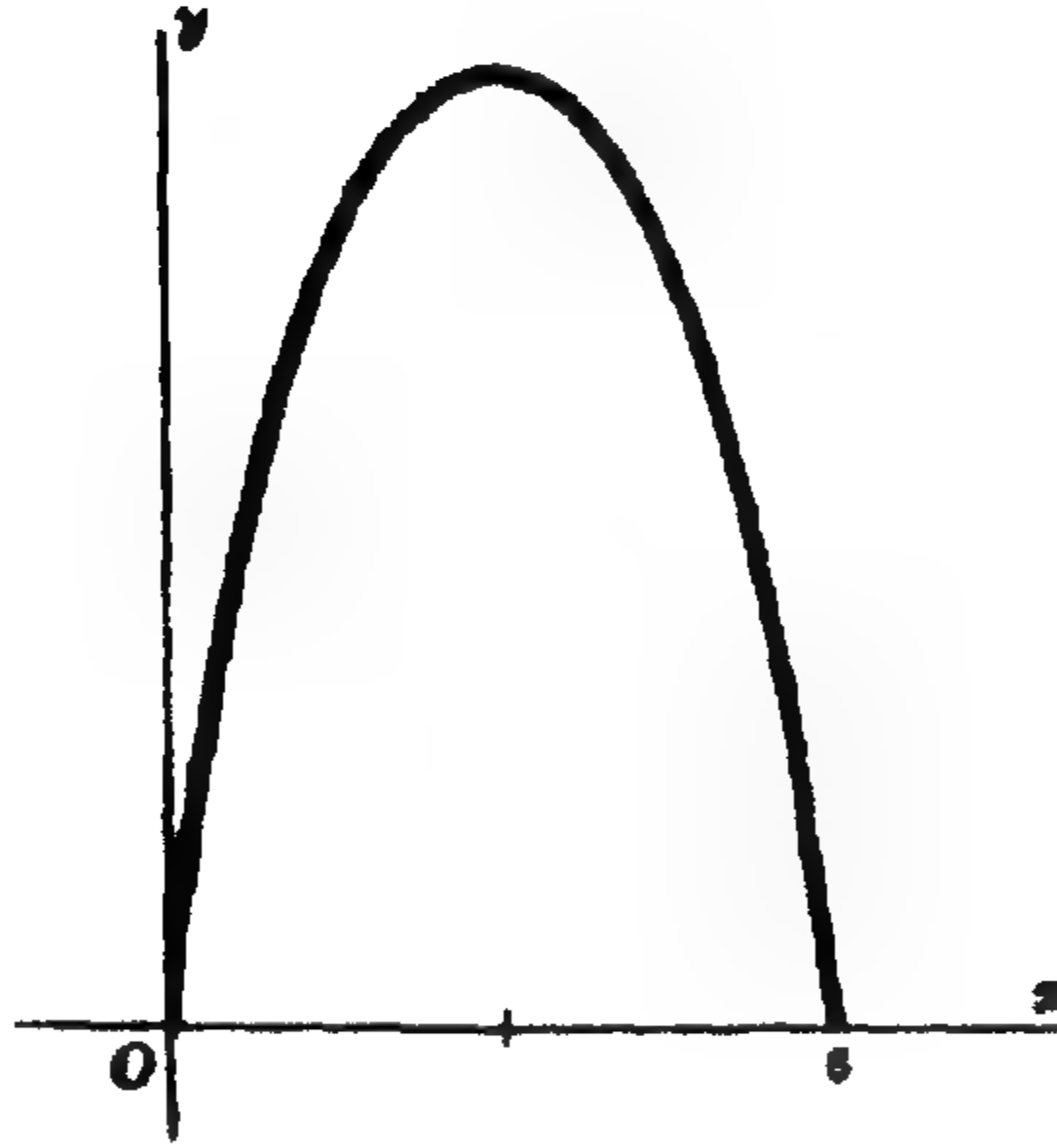
**دالة المتغير :** نقول من متغير  $y$  إنه دالة لمتغير آخر  $x$  إذا أعطيت قاعدة أو وسيلة بحيث تقابل كل قيمة لـ  $x$  في مداها قيمة لـ  $y$ . يسمى المتغير  $y$  الذي تعتمد قيمته على القيمة التي نختارها لـ  $x$ ، متغيراً غير مستقل وحين يسمى  $x$  متغيراً مستقلاً. أما القاعدة أو الوسيلة فقد تكون جدولاً للقيمة المتقابلة (جدول اللوغاريتمات مثلاً) أو بياناً أو معادلة.

**مثال ٢ :** في المعادلة  $y = 10 - x^2$ ، حيث  $x$  متغير مستقل، تقرر قيمة لـ  $y$  مع كل قيمة لـ  $x$  والدالة المعروفة هي  $y = 10 - x^2$  ولنفس المعادلة إذا أخذنا  $y$  متغيراً مستقلاً، فإن قيمتين لـ  $x$  بوجه عام تقابل كل قيمة لـ  $y$ . وهذا يعرف لدينا، دالتان لـ  $y$  هما  $x = \sqrt{10 - y}$  و  $x = -\sqrt{10 - y}$ .

يعرف بعض المؤلفين  $y$  على أنها دالة لـ  $x$  عندما تقرر بكل قيمة لـ  $x$  في مداها قيمة واحدة أو أكثر لـ  $y$  عندئذ تسمى  $y$  في المثال ٢، دالة وحيدة القيمة في  $x$  بينما تسمى  $x$  دالة مضاعفة القيم (بعبارة أدق، دالة ثنائية القيمة) في  $y$  وعلى كل فإنه في الحساب التفاضل والتكامل، علينا أن نعتبر أن الدالة المضاعفة القيمة مكونة من عدة دوال وحيدة القيمة. عندئذ يكون تعريفنا لمصطلح دالة معديلاً بحيث ينطوي على هذه الخاصية لوحدة (وحدانية) القيمة.

يستعمل الرمز  $f(x)$  ، والذي يقرأ الدالة  $f$  لـ  $x$  أو  $f$  لـ  $x$  ولكنه لا يقرأ أبداً  $x$  مرة  $f$ ، ليشير إلى دالة مفروضة في  $x$  وإذا صادف أن تضمنت المسألة دالة أخرى لـ  $x$  فنحن نكتب أن نستعمل رمزا آخر مثلاً  $g(x), h(x), F(x), \theta(x), \dots$  ومن الضروري عند دراسة الدالة  $y = f(x)$  أن نعرف دوماً مدى المتغير المستقل والذي نسميه حيز (مجال) التعريف للدالة.

### مثال ٢ :



(أ) الدالة  $f(x) = 18x - 3x^2$  معرفة لكل عدد  $x$ ، أي أن  $18x - 3x^2$  هو عدد حقيقى، بدون استثناء، طالما  $x$  عدد حقيقى، وعلى هذا فإن مدى  $x$  أو حيز التعريف للدالة هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية.

(ب) المساحة ( $y$ ) لمستطيل مفروض طول أحد أضلاعه  $x$  هي  $y = 18x - 3x^2$  هنا ينبغي أن يكون كل من  $x, 18x - 3x^2$  موجبا.

ويتضح من الشكل المرافق أو من المسألة ٢ (أ) أن حيز التعريف هو الفترة  $0 < x < 6$ .

(ج) حيز التعريف للدالة  $y = x^2 - 10$  في المثال (٢) هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية. أما بالنسبة للدالتين  $x = \sqrt{10 + y}$  و  $x = -\sqrt{10 + y}$  فينبى أن يكون  $10 + y \geq 0$ ، وحيز التعريف، إذن، بكل منهما هو  $y \geq -10$ .

شكل ١ - ١

نقول من دالة  $f(x)$  إنها معرفة في فترة ما إذا كانت معرفة لكل نقطة من نقاط الفترة. وإذا كانت  $f(x)$  دالة مفروضة لـ  $x$  وكانت  $a$  من حيز تعريفها فنحن نكتب  $f(a)$  العدد الذي نحصل عليه باستبدال  $x$  بـ  $a$  في  $f(x)$  أو القيمة التي نتخذها  $f(x)$  عندما  $x = a$ .

**مثال ٤ :** إذا كان  $f(x) = x^2 - 4x + 2$  فنحن نكتب

$$f(1) = (1)^2 - 4(1) + 2 = 1 - 4 + 2 = -1,$$

$$f(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 2 = -8 + 8 + 2 = 2,$$

$$f(a) = a^2 - 4a + 2, \text{ etc.}$$

أنظر المسائل (٤ - ١٢).

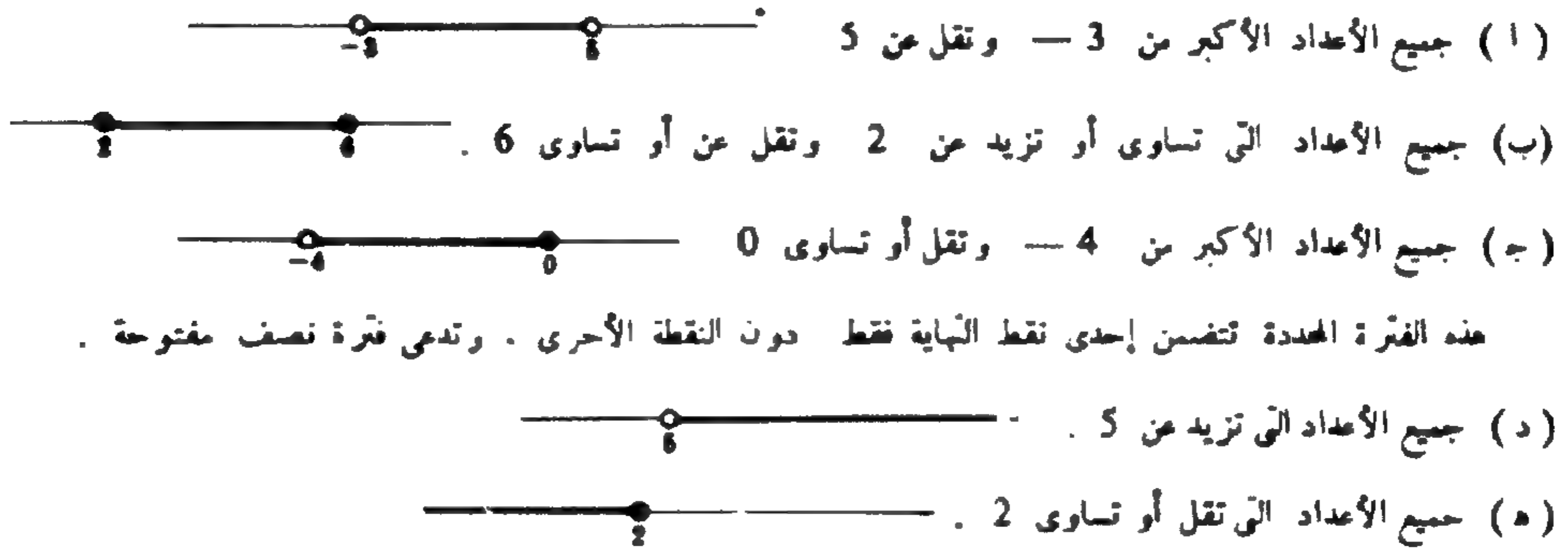
**المتتابعة ( المتوالية ) غير المنتهية :** هي دالة لمتغير ( نرمز له عادة بـ  $n$  ) يقتصر مداه على مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة . فمثلا إذا أعطينا  $n$  القيمة  $1, 2, 3, 4, \dots$  على الترتيب فإن الدالة  $\frac{1}{n+1}$  تعطي متتابعة أو متوالية الحدود  $\dots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$  ونقول عن المتوالية إنها متوالية لا نهائية بمعنى بذلك أنه لا يوجد لها حد أخير .

تسمى الدالة ، مثل  $\frac{1}{n+1}$  في الفقرة السابقة ، الحد العام أو الحد  $n$  للمتوالية ، ويشار للمتوالية غير المنتهية بوضع حدها العام بين قوسين مثل  $\left\{ \frac{1}{n+1} \right\}$  أو بكتابة عدة حدود من المتوالية مثل  $\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$  .

انظر المسألين ١٤ - ١٥

### مسائل محلولة


١ - صف الفترات ( أ )  $-3 < x < 5$  ، ( ب )  $2 \leq x \leq 6$  ، ( ج )  $-4 < x \leq 0$  ، ( د )  $x > 5$  ، ( هـ )  $x \leq 2$  وارسمها بيانيا




٧ - صف الفترات التالية وارسمها بيانيا :

( أ )  $|x| < 2$  ؛ ( ب )  $|x| > 3$  ؛ ( ج )  $|x - 2| < \delta, \delta > 0$  ؛ ( د )  $|x - 3| < 1$  ؛ ( هـ )  $|x + 3| < \delta, \delta > 0$

( أ ) هي الفترة المفتوحة .  $-2 < x < 2$  .



( ب ) فترتان غير محددتين هي  $x > 3$  و  $x < -3$  .



( ج ) فترة مفتوحة حول النقطة 3 ولإيجاد نقطتيها نضع  $x - 3 = 1$  فنجد أن  $x = 4$  ونضع  $x - 3 = -1$  فنجد أن  $x = 2$  ( تذكر أن  $|x - 3|$  تساوي  $x - 3$  أو  $3 - x$  على حسب قيمة  $x$  ) . وإذن نقطتي النهاية هما 2, 4 ، والفترة هي  $2 < x < 4$  . لاحظ أن هذه الفترة تتكون من جميع النقط التي يكون بعدها عن 3 أقل من 1 .



( د ) لتصور  $\delta$  عددا موجبا مفروضا ، عندئذ تتكون الفترة  $2 - \delta < x < 2 + \delta$  من جميع النقط التي يكون بعدها عن 2 أقل من  $\delta$  . وتسمى هذه الفترة  $\delta$  - المجاورة للعدد 2 .





(أ) المتباينة  $|x+3| < \delta$  تعرف الفترة  $-3-\delta < x < -3+\delta$  والتي تشمل العدد  $-3$  والشرط الإضافي  $0 < |x+3|$  يتطلب أن تكون  $x \neq -3$ . وهكذا فإن  $x$  يتكون من فترتين مفتوحتين هما  $-3-\delta < x < -3$  و  $-3 < x < -3+\delta$  وتشكل الفترتين جوار محنوف  $\delta$  للعدد  $-3$ .



٢- حل المتباينات : (أ)  $18x - 3x^2 > 0$ , (ب)  $(x+3)(x-2)(x-4) < 0$ , (ج)  $(x+1)^2(x-3) > 0$ .

(أ) ضع  $0 = 18x - 3x^2 = 3x(6-x)$  لنجد أن  $x=0$  و  $x=6$  ثم عين إشارة  $18x - 3x^2$  في كل من الفترات  $x < 0$  و  $0 < x < 6$  و  $x > 6$  نجد أن المتباينة تتحقق لجميع قيم  $x$  في الفترة  $0 < x < 6$ .

(ب) بعد تحديد إشارة  $(x+3)(x-2)(x-4)$  في كل من الفترات  $x < -3$ ,  $-3 < x < 2$ ,  $2 < x < 4$ , و  $x > 4$ , نستنتج أن المتباينة تتحقق لجميع قيم  $x$  في الفترتين  $x < -3$  و  $2 < x < 4$ .

(ج) الفترات التي يبنى البحث فيها هي  $x > 3$ ,  $-1 < x < 3$ , و  $x < -1$ . والمتباينة تتحقق عندما  $x > 3$ . لاحظ أن  $(x+1)^2 > 0$  مهما كانت  $x$  ولذلك يمكننا إهمال هذا المضروب. نرى هل يمكن كذلك إهمال المضروب  $(x+1)^3$  ؟

٤- لنفرض  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$  أوجد  $f(x+h)$  و  $f(1/x)$ ,  $f(2a)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(0)$ .

$$f(0) = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}, \quad f(-1) = \frac{-1-1}{1+2} = -\frac{2}{3}, \quad f(2a) = \frac{2a-1}{4a^2+2},$$

$$f(1/x) = \frac{1/x-1}{1/x^2+2} = \frac{x-x^2}{1+2x^2}, \quad f(x+h) = \frac{x+h-1}{(x+h)^2+2} = \frac{x+h-1}{x^2+2hx+h^2+2}$$

٥- إذا كان  $f(x) = 2^x$  بين أن (أ)  $f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2} f(x)$  (ب)  $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = \frac{2^{x+3}}{2^{x-1}} = 2^4 = 16 = f(4)$  (ج)  $f(x+3) - f(x-1) = 2^{x+3} - 2^{x-1} = 2^x(2^3 - \frac{1}{2}) = \frac{15}{2} f(x)$  (د)  $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = \frac{2^{x+3}}{2^{x-1}} = 2^4 = 16 = f(4)$

٦- إذا كان  $f(x) = \log_a 1/x$  فبين أن (أ)  $f(a^3) = -3$  (ب)  $f(a^{-1/2}) = 1/2$ .

(أ)  $f(a^3) = \log_a 1/a^3 = \log_a a^{-3} = -3$  (ب)  $f(a^{-1/2}) = \log_a 1/a^{-1/2} = \log_a a^{1/2} = 1/2$

٧- إذا كان  $f(x) = \log_a x$  و  $F(x) = a^x$  فبين أن  $F(f(x)) = f(F(x))$ .

$$F(f(x)) = F(\log_a x) = a^{\log_a x} = x = \log_a a^x = f(a^x) = f(F(x)).$$

٨- عين على المتغير المستقل بفرض:

(أ)  $y = \sqrt{4-x^2}$ , (ب)  $y = \sqrt{x^2-16}$ , (ج)  $y = \frac{1}{x-2}$ , (د)  $y = \frac{1}{x^2-9}$ , (هـ)  $y = \frac{x}{x^2+4}$ .

(أ) بما أنه ينبغي أن تكون  $y$  حقيقية فإن  $4-x^2 \geq 0$  أو  $x^2 \leq 4$  وعلى  $x$  هو الفترة  $-2 \leq x \leq 2$  أو  $|x| = 2$ . وبعبارة أخرى فإن  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  معرفة على الفترة  $-2 \leq x \leq 2$  وعلى هذه الفترة فقط.

(ب) يكون  $0 \leq x^2-16$  أو  $x^2 \geq 16$  ويتكون على  $x$  من الفترتين  $x \leq -4$  و  $x \geq 4$ . أو  $|x| \geq 4$ .

(ج) إن الدالة معرفة لجميع قيم  $x$  باستثناء  $x=2$ . ويمكن أن يكون على  $x$  هو  $x < 2$ ,  $x > 2$  أو  $x \neq 2$ .

(د) الدالة معرفة من أجل  $x \neq \pm 3$ .

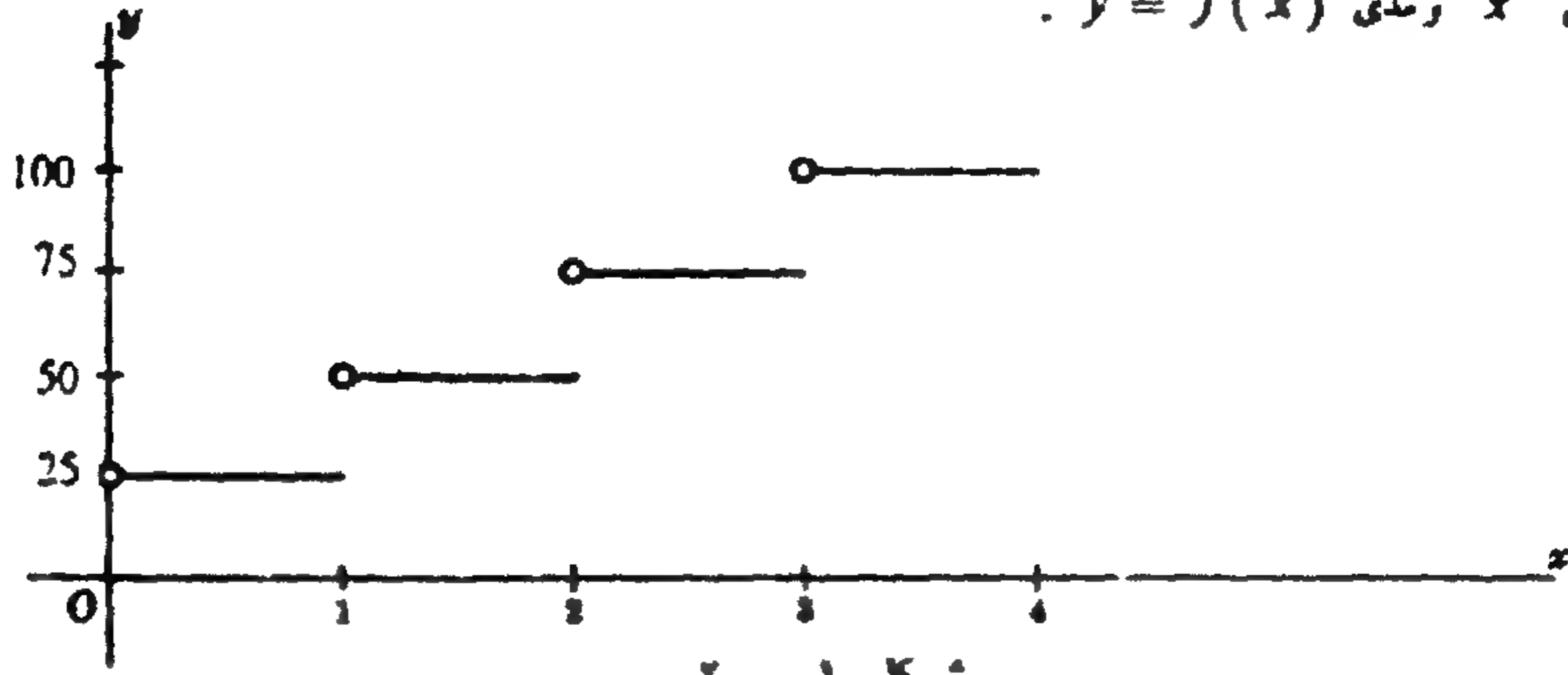
(هـ) بما أن  $x^2+4 \neq 0$  لجميع قيم  $x$  فإن على  $x$  هو قبة الأعداد الحقيقية.

٩ - ارسم بيانيا الدالة المعرفة بالآتي :

$$f(x) = 6 \quad \text{عندما} \quad 0 < x \leq 25 \quad \text{عندما} \quad f(x) = 10 \quad 25 < x \leq 50$$

$$f(x) = 15 \quad \text{عندما} \quad 50 < x \leq 75 \quad \text{عندما} \quad f(x) = 20 \quad 75 < x \leq 100$$

وهكذا عين مدى  $x$  ومدى  $y = f(x)$ .

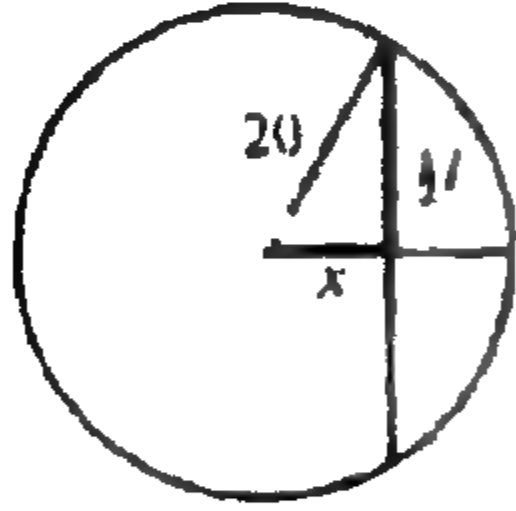


شكل ١ - ٢

تعبّر الدالة  $f(x)$  عن التكلفة (مقدرة بالسنتات) لطريد الداخل من الدرجة الأولى لرسالة (أو للطرود) التي وزنها  $x$  gm. إن مدى  $x$  هو الفترة  $x > 0$  ومدى  $y = f(x)$  هو مجموعة الأعداد الصحيحة 25, 50, 75, 100, .....

١٠ - يلزم لإحاطة قطعة أرض مستطيلة 600 m من السياج. فإذا كان أحد الأبعاد  $x$  m، فعبّر عن المساحة  $y$  (m<sup>2</sup>) كدالة لـ  $x$ . عين مدى  $x$ .

بما أن أحد الأبعاد  $x$  فإن البعد الآخر يكون  $300 - x$ .  $\frac{1}{2}(500 - 2x) = 300 - x$ .  
وبذلك تكون المساحة  $y = x(300 - x)$  ويكون مدى  $x$   $0 < x < 300$ .

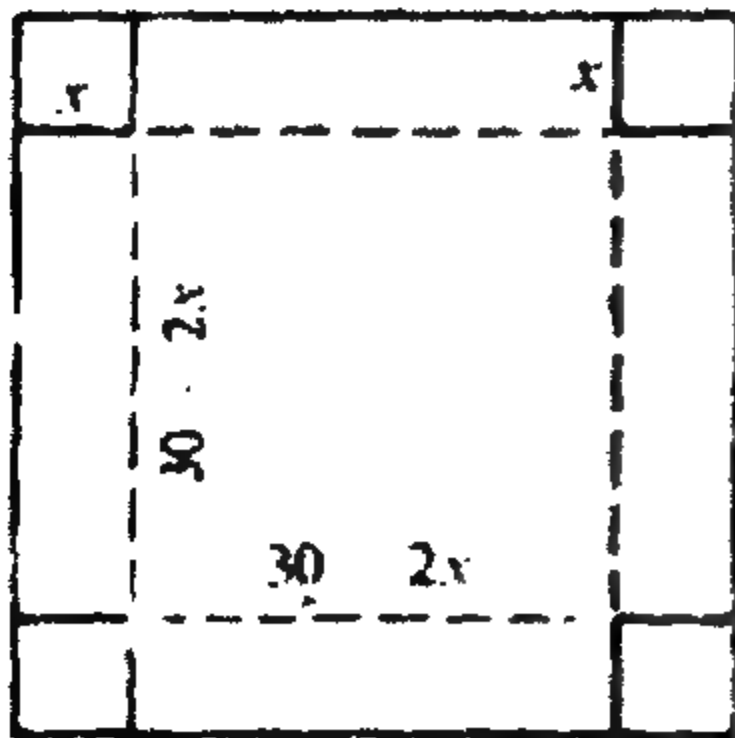


١١ - عبر عن انطول  $l$  لوتر دائرة نصف قطرها 20 cm كدالة لبعده الوتر عن مركز الدائرة وليكون  $x$  cm. عين مدى  $x$ .

من الشكل ١ - ٣ يتضح أن  $\frac{1}{2}l = \sqrt{400 - x^2}$  و  $l = 2\sqrt{400 - x^2}$ .  
وبكون مدى  $x$  هو الفترة  $0 \leq x < 20$ .

شكل ١ - ٣

١٢ - إذا قطع من كل ركن من أركان مربع من "قصدير"، طول ضلعه 30 cm؛  
ربما صغيرا طول ضلعه  $x$  cm ثم ثبينا الحواف لتشكل علبة مفتوحة. عبر عن  
الحجم  $V$  (m<sup>3</sup>) كدالة لـ  $x$  ثم ابحث في مدى كل متغير.



إن قاعدة العلبة مربع طول ضلعه  $(30 - 2x)$  cm وارتفاعها  $x$  cm إذن  
حجمها :  $V = x(30 - 2x)^2 = 4x(15 - x)^2$ .  $0 < x < 15$  هو الفترة.

وعندما تزداد  $x$  في مداها فإن  $V$  تزداد لبرهة ثم تتناقص بعدها. على هذا  
فإنه من بين الطلب التي يمكن تصميمها توجد واحدة ذات أكبر حجم.

وليكن هذا الحجم  $M$ ، لتعيين  $M$  ينبغي أن نحدد بدقة النقطة (قيمة  $x$ ) التي تقف  
فيها  $V$  عن الزيادة وسوف ندرس هذه المسألة في فصل آخر.

شكل ١ - ٤



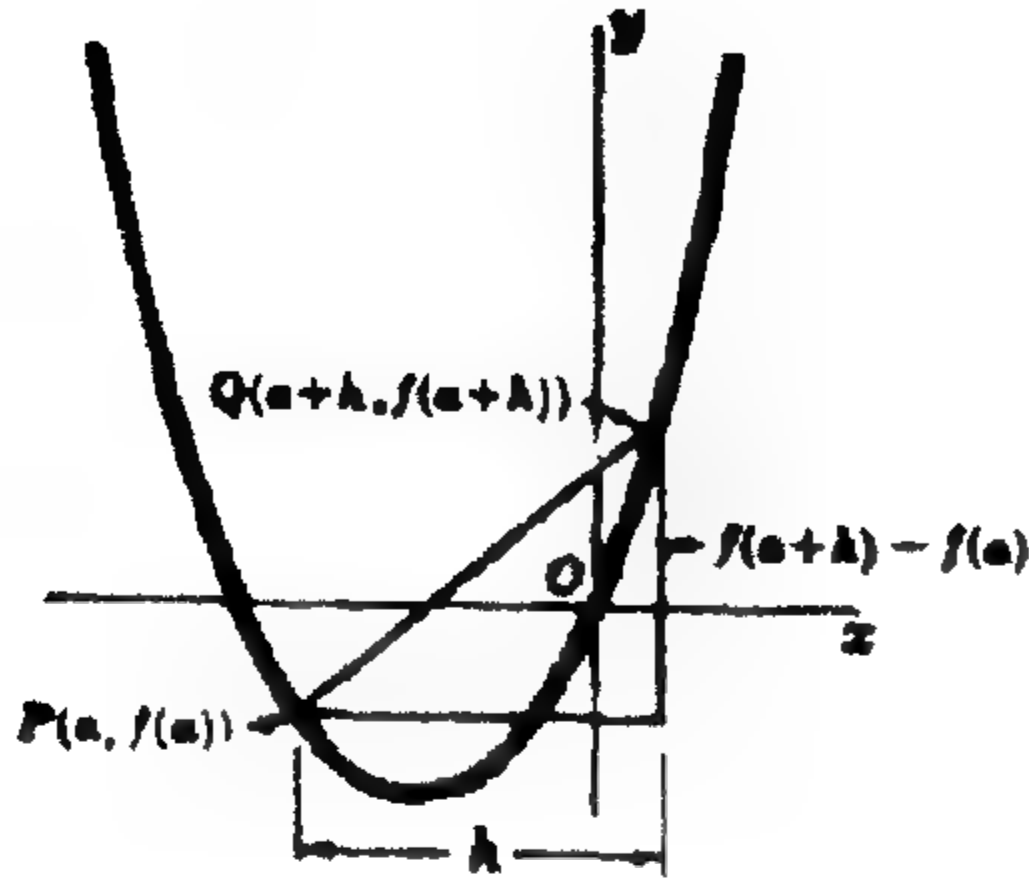
١٣ - إذا كان  $f(x) = x^2 + 2x$ ، فأوجد  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  ثم مر النتيجة .

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{[(a+h)^2 + 2(a+h)] - (a^2 + 2a)}{h} \\ &= 2a + 2 + h \end{aligned}$$

حدد على بيان الدالة (شكل ١ - ٥) موضعى النقطتين  $P$  و  $Q$  .

التي احداثيهما السينيان هما  $a$  و  $a+h$  على الترتيب .

والإحداثى الصادى لـ  $P$  هو  $f(a)$  ولـ  $Q$  هو  $f(a+h)$  عندئذ تكون :



$$\text{شكل ١ - ٥} \quad \text{ميل } PQ = \frac{\text{فرق الإحداثى الصادى}}{\text{فرق الإحداثى السينى}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

١٤ - اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتوالات التالية :

$$(١) \quad \left\{ 1 - \frac{1}{2^n} \right\} \quad \text{نح} \quad a_n = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{فتجد} \quad a_1 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = 9/10, \quad a_3 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}, \quad a_4 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}, \quad a_5 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{7}{8},$$

والحدود المطلوبة هي :  $1/2, 3/4, 5/6, 7/8, 9/10$  .

$$(ب) \quad \left\{ (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1} \right\} \quad \text{هنا} \quad a_1 = (-1)^2 \frac{1}{3 \cdot 1 - 1} = 1/2,$$

$$a_2 = (-1)^3 \frac{1}{3 \cdot 2 - 1} = -1/5, \quad a_3 = (-1)^4 \frac{1}{3 \cdot 3 - 1} = 1/8,$$

$a_4 = -1/11, \quad a_5 = 1/14$  . والحدود المطلوبة هي :  $1/2, -1/5, 1/8, -1/11, 1/14$  .

$$(ج) \quad \left\{ \frac{2n}{1+n^2} \right\} \quad \text{الحدود هي} \quad 1, 4/5, 3/5, 8/17, 5/13.$$

$$(د) \quad \left\{ (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)(n+2)} \right\} \quad \text{والحدود هي} \quad \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{-2}{3 \cdot 4}, \frac{3}{4 \cdot 5}, \frac{-4}{5 \cdot 6}, \frac{5}{6 \cdot 7}.$$

$$(هـ) \quad \left\{ \frac{1}{2} [(-1)^n + 1] \right\} \quad \text{الحدود هي} \quad 0, 1, 0, 1, 0.$$

١٥ - اكتب الحد العام لكل من المتوالات الآتية :

$$(١) \quad 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/9, \dots$$

الحدود هي مقلوبات الأعداد الفردية الصحيحة الموجبة والحد العام هو  $\frac{1}{2n-1}$  .

$$(ب) \quad 1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, \dots$$

إن هذه الحدود ، بغض النظر عن الإشارة ، هي مقلوب الأعداد الصحيحة الموجبة والحد العام هو

$$(-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad \text{أو} \quad (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$(ج) \quad 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, \dots$$

أن هذه الحدود هي مقلوبات مربعات الأعداد الموجبة والحد العام هو  $1/n^2$  .

$$(د) \quad \frac{1}{2}, \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \dots$$

والحد العام هو  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$  .

$$(٨) \quad 1/2, -4/9, 9/28, -16/65, \dots$$

إن البسط بنفس النظر عن الإشارة ، هو مربعات الأعداد الصحيحة الموجبة والمقامات هي مكعبات هذه الأعداد الصحيحة

$$\text{بعد إضافة 1 لها ، والحد العام هو } (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}.$$

$$١٦- \text{برهن أنه إذا كان } a \text{ و } b \text{ أي عددين فإن } |a+b| \leq |a| + |b|.$$

اعتبر الحالات الآتية (١) كلا من  $a$  و  $b$  غير سالب (ب) كلا من  $a$  و  $b$  سالب (ج) أحد العددين  $a$  و  $b$  موجباً والآخر سالباً.

$$(١) \text{ بما أن } |a| = a, |b| = b, \text{ فإن } a+b \text{ صفراً أو عدداً موجباً وبالتالي فإن :}$$

$$|a+b| = a+b = |a| + |b|$$

$$(ب) \text{ بما أن } |a| = -a, |b| = -b, \text{ فإن } a+b \text{ عدد سالب وبالتالي فإن :}$$

$$|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) = |a| + |b|$$

$$(ج) \text{ لنأخذ } a > 0, b < 0 \text{ فنستد أن يكون } |a| = a, |b| = -b.$$

$$\text{فإذا كان } |a| > |b|, \text{ فإن } |a+b| = a+b < a-b = |a| + |b|.$$

$$\text{وإذا كان } |a| < |b|, \text{ فإن } |a+b| = -a-b < a-b = |a| + |b|.$$

$$\text{وإذا كان } |a| = |b|, \text{ فإن } |a+b| = 0 < |a| + |b|.$$

$$\text{ومكثاً إذا كان } a > 0 \text{ و } b < 0 \text{ أو إذا كان } a < 0 \text{ و } b > 0, \text{ فإن } |a+b| < |a| + |b|.$$

### مسائل إضافية

١٧- ارسم بيان كل من الفترات الآتية :

$$(١) \quad -5 < x < 0 \quad (ب) \quad x \leq 0 \quad (ج) \quad -2 \leq x < 3 \quad (د) \quad x \geq 1$$

$$(هـ) \quad |x| < 3 \quad (و) \quad |x| \geq 5 \quad (ز) \quad |x-2| < \frac{1}{2} \quad (ح) \quad |x+3| > 1$$

$$(ط) \quad 0 < |x-2| < 1 \quad (ي) \quad 0 < |x+3| < \frac{1}{2} \quad (ك) \quad |x-2| \geq 1$$

$$١٨- \text{إذا كان } f(x) = x^2 - 4x + 6, \text{ فأوجد (١) } f(0), (ب) f(3), (ج) f(-2)$$

$$\text{ج : (١) } 6, (ب) 3, (ج) 18 \text{ برهن أن } f(1/2) = f(7/2) \text{ و } f(2-h) = f(2+h).$$

$$١٩- \text{إذا كان } f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \text{ فأوجد (١) } f(0), (ب) f(1), (ج) f(-2)$$

$$\text{ج : (١) } -1, (ب) 0, (ج) 3.$$

$$\text{برهن أن } f(1/x) = -f(x) \text{ و } f(-1/x) = -1/f(x).$$

$$٢٠- \text{إذا كان } f(x) = x^2 - x, \text{ فبرهن أن } f(x+1) = f(-x).$$

$$٢١- \text{إذا كان } f(x) = 1/x, \text{ فبرهن أن } f(a) - f(b) = f\left(\frac{ab}{b-a}\right).$$

$$٢٢- \text{إذا كان } y = f(x) = (5x+3)/(4x-5), \text{ فبرهن أن } x = f(y).$$





# الفصل الثانى

## النهايات

**نهاية المتوالية :** إذا وقعت النقط المتتالية التى تعطى بمحود المتوالية

$$(1) \quad 1, 3/2, 5/3, 7/4, 9/5, \dots, 2 - 1/n, \dots$$

على السلم المسمى فإننا نلاحظ أنها تتجمع حول النقطة 2 بطريقة ما بحيث أننا نجد نقطاً من المتوالية بينها عن 2 أقل من أى عدد موجب محسوب مهما كان هذا العدد صغيراً .



فمثلاً النقطة 2001/1001 وجميع النقط التى تليها تكون على بعد أقل من 1/1000 عن 2 واسقطه 20000001/10000001 وجميع النقط التى تليها على بعد أقل من 1/1000000 عن 2 وهكذا . نشير إلى هذا الأمر بقولنا إن نهاية المتوالية هي العدد 2 .

وإذا كان  $x$  صغيراً ، مداه المتوالية ( ١ ) ، فإننا نقول أن  $x$  تقترب من 2 كنهاية لها أو أن  $x$  تزول إلى 2 كنهاية لها وتكتب  $x \rightarrow 2$  .

إن المتوالية ( ١ ) لا تحتوى على نهايتها وهي العدد 2 كأحد حدودها أما المتوالية  $1, 1/2, 1, 3/4, 1, 5/6, 1, \dots$  فإنها تزول إلى 1 كنهاية لها وأن كل حد فردى يساوى 1 وبذا نرى أنه يمكن للمتوالية أن تبلغ نهايتها وقد لا يمكنها ذلك . غير أننا نعلم فيما يلى من أن  $x \rightarrow a$  تستلزم أن  $a$  يحيط  $x$  أى أنه ينبغى أن ندرك أن أى متوالية مفروضة اختيارية لا تحتوى نهايتها كأحد حدودها .

## نهاية الدالة :

لنفترض أن  $x \rightarrow 2$  على المتوالية (١) عندئذ  $x^2 \rightarrow 4$  فعمل المتوالية  $(x) = x^2 \rightarrow 4$  (2)  $1, 9/4, 25/9, 49/16, \dots, (2 + 1/n)^2, \dots$  لنحل الآن  $x \rightarrow 2$  على المتوالية

$$(2) \quad 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \dots, 2 + 1/10^n, \dots$$

فمعدئذ  $x^2 \rightarrow 4$  على المتوالية  $(2 + 1/10^n)^2, \dots, 4.41, 4.0401, 4.004001, \dots$  ويبدو من المقول أن نقبل أن  $x$  تقترب من 4 كنهاية لها عندما تقترب  $x$  من 2 كنهاية لها . ونقول تحت هذه الفروض إن نهاية  $x^2$  ، عندما تقترب  $x$  من 2 ، تساوى 4 وتكتب  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

أنظر المسألين ١ - ٢

## النهايات اليسرى واليمنى :

إن قيمة  $x$  عندما  $x \rightarrow 2$  على المتوالية (١) ، هي باستمرار أصغر من 2 وعلى هذا فإننا نقول  $x$  تقترب من 2 من اليسار وتكتب  $x \rightarrow 2^-$  وبالمثل قيمة  $x$  عندما  $x \rightarrow 2$  على المتوالية (٢) هي باستمرار أكبر من 2 . ونقول في مثل هذه الحالة إن  $x$  تقترب من اليمين وتكتب  $x \rightarrow 2^+$  . ومن الواضح أن وجود العبارة  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  تستلزم وجود تساوى كل من نهاية اليسار  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ونهاية اليمين  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  على أن وجود نهاية اليمين (اليسار) لا يستلزم وجود نهاية اليسار (اليمين) .

## مثال ١ :

إن حيز التعريف للدالة  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  هو الفترة  $-3 \leq x \leq 3$  فإذا كان  $a$  أى عدد في الفترة المفتوحة  $-3 < x < 3$  فإن  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{9-x^2}$  موجودة وتساوى  $\sqrt{9-a^2}$  ، لنعتبر الآن  $a = 3$  ولنجعل  $x$  تقترب من 3 من اليسار أولا فنجد أن  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$  أما إذا جعلنا  $x$  بعد ذلك تقترب من 3 من اليمين فإننا نجد أن  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{9-x^2}$  غير موجودة لأن  $\sqrt{9-x^2}$  يكون تخيلا عندما  $x > 3$  وهكذا نجد أن  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{9-x^2}$  غير موجود .

بالمثل نجد أن  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \sqrt{9-x^2}$  موجودة وتساوى للصفر ولكن  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \sqrt{9-x^2}$  وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{9-x^2}$  غير موجودتين .

## نظريات النهايات :

فيما يلي نظريات النهايات التالية لرجوع إليها فيما بعد :

$$I \quad \text{إذا كان } f(x) = C \text{ ، ثابتا ، فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$$

$$\text{إذا كان } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ ، } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \text{ ، فإن}$$

$$II \quad \lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = kA \text{ ، حيث } k \text{ أى ثابت}$$

$$III \quad \lim_{x \rightarrow a} |f(x) \pm g(x)| = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$$

$$IV \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$$

$$V \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} \text{ ، بفرض أن } B \neq 0$$

$$VI \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{A} \text{ ، بفرض أن } \sqrt[n]{A} \text{ عدد حقيقي}$$

## الانتهائية :

لنفرض أن متى المتغير  $x$  هو المتتالية  $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_n, \dots$  إذن

( i ) نقول عن  $x$  إنها أصبحت لانهاية موجبة  $[x \rightarrow +\infty]$  إذا أصبحت في آخر الأمر أكبر من أى عدد موجب مفروض ، مهما كان كبيرا ، وحافظت على هذا من ذلك الحين فصاعداً مثل ذلك  $x \rightarrow +\infty$  على المتتالية  $1, 2, 3, 4, \dots$

( ii ) نقول عن  $x$  إنها أصبحت لانهاية سالبة  $[x \rightarrow -\infty]$  إذا أصبحت في آخر الأمر أصغر من أى عدد سالب مفروض ، مهما كان صغيراً وحافظت على هذا من ذلك الحين فصاعداً . مثال ذلك  $x \rightarrow -\infty$  على المتتالية  $-2, -4, -6, -8, \dots$

( iii ) نقول عن  $x$  إنها أصبحت لانهاية  $[x \rightarrow \infty]$  إذا كان  $|x| \rightarrow \infty$  أى إذا كانت  $x \rightarrow +\infty$  أو  $x \rightarrow -\infty$ .

نقول عن دالة  $f(x)$  إنها أصبحت لانهاية موجبة عندما  $x \rightarrow a$  ،  $\left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \right]$  إذا أصبحت  $f(x)$  في آخر الأمر ، عندما تقترب  $x$  من نهايتها  $a$  ( دون أن تبلغ القيمة  $a$  ) ، أكبر من أى عدد موجب مفروض ، مهما كان كبيراً ، وحافظت على هذا من ذلك الحين فصاعداً .

ونقول عن دالة  $f(x)$  أنها أصبحت لانهاية سالبة عندما  $x \rightarrow a$   $\left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \right]$  إذا أصبحت  $f(x)$  في آخر الأمر ، عندما تقترب  $x$  من  $a$  ( دون أن تبلغ القيمة  $a$  ) أصغر من أى عدد سالب مفروض ، مهما كان صغيراً ، وحافظت على هذا من ذلك الحين فصاعداً .

نقول عن دالة  $f(x)$  إنها أصبحت لانهاية عندما  $x \rightarrow a$  ،  $\left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \right]$  إذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$ .

## مثال ٢ :

( أ ) عندما  $x \rightarrow 2$  على المتتالية ( ١ ) فإن  $f(x) = \frac{1}{2-x} \rightarrow +\infty$  على المتتالية  $1, 2, 3, 4, \dots$  وعموماً ، إذا كانت  $x \rightarrow 2^-$  إذن  $\frac{1}{2-x} \rightarrow +\infty$  ونكتب  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty$

( ب ) عندما  $x \rightarrow 2$  على المتتالية ( ٢ ) فإن  $f(x) = \frac{1}{2-x} \rightarrow -\infty$  على المتتالية  $10, -100, -1000, -10000, \dots$  وعموماً إذا كانت  $x \rightarrow 2^+$  إذن  $\frac{1}{2-x} \rightarrow -\infty$  ونكتب  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty$

( ج ) عندما  $x \rightarrow 2$  على المتتالية ( ١ ) و ( ٢ ) فإن  $|f(x)| = \left| \frac{1}{2-x} \right| \rightarrow +\infty$  ونكتب  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2-x} = \infty$

ملاحظة : ليست الرموز  $+\infty, -\infty, \infty$  أعداداً جديدة ينبغي أن تضم إلى مجموعة الأعداد الحقيقية إنما وضعت هذه الرموز لتدل على نمط خاص لسلوك المتغير أو الدالة . فعندما تزداد قيمة متغير أو دالة على نحو ثابت دون أن تتجاوز



أهذا عددا معينا  $M$  فإن المتغير أو الدالة تقترب من  $M$  أو من عدد أصغر كنهاية لها. أما إذا لم يوجد عدد مثل  $M$  فإن المتغير أو الدالة تصبح لا نهائية وفي هذه الحالة الأخيرة لا توجد نهاية ويستعمل غالبا رمز نهاية للامته.

انظر المسائل ١٢ - ٣

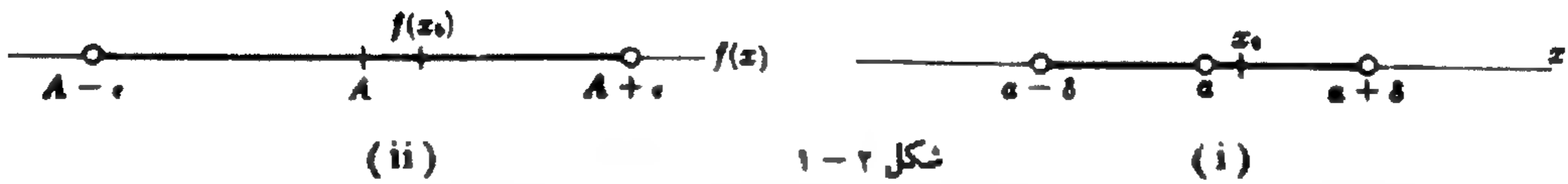
**لقد أثبت القصير :**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  باختبار سلوك  $f(x)$  عندما  $x \rightarrow a$  على عدد من المتواليات.

فإذا سبق أن وجد أن  $f(x) \rightarrow A$  في كل حالة عندئذ يكون قد استج أن يمكن الحصول على نفس النتيجة لجميع المتواليات الأخرى (غير المختبرة) التي نهايتها  $a$  والآن إذا كانت  $x \rightarrow a$  على عدة متواليات فإنه ينبغي على  $x$  أن تقترب في آخر الأمر من  $a$  والمعنى الأساسي لمفهوم النهاية هو أنه عندما تقترب  $x$  من  $a$  ولكنها تبقى مختلفة عنها فإن  $f(x)$  تقترب من  $A$  ويمكن صياغة هذا المعنى بعبارة أدق على النحو التالي.

(١)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  إذا كان لأي عدد موجب صغير  $\epsilon$  مهما كان صغيرا يوجد عددا موجبا  $\delta$  بحيث

$$0 < |x - a| < \delta \text{ فإن } |f(x) - A| < \epsilon$$

ونقده المتباينتين الفترتين :



وجوهر التعريف هو أنه بعد اختيار  $\epsilon$  [أي بعد أن نضع الفترة (ii)] يمكن إيجاد  $\delta$  [أي يمكن تعيين الفترة (i)] بحيث طالما  $a$  يحيط  $x$  على المجال (i)، ولتكن عند  $x_0$  مثلا، إذن  $f(x)$  تبقى على الفترة (ii).

**مثال ٣ :**

استعمل التعريف الدقيق لتبرهن أن  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x) = 10$ .  
لتفرض أننا اخترنا  $\epsilon$  فنندف ينبغي أن نحصل على  $\delta > 0$  بحيث إذا كان  $0 < |x - 2| < \delta$  فإن  $|(x^2 + 3x) - 10| < \epsilon$ . ونلاحظ أولا أنه إذا كان  $0 < |x - 2| < \lambda < 1$  إذن  $|x - 2|^2 < \lambda$  مهما كان العدد الصحيح الموجب  $n$  عندئذ

$$|(x^2 + 3x) - 10| = |(x - 2)^2 + 7(x - 2)| \leq |x - 2|^2 + 7|x - 2| < \lambda + 7\lambda = 8\lambda$$

ولكن  $\epsilon < 8\lambda$  تستلزم  $\lambda < \epsilon/8$ . وبالتالي فإن أي عدد موجب أصغر من كلا العددين  $1$  و  $\epsilon/8$  يمكن أن يلعب دور  $\delta$  ونكون بذلك قد أوجدنا النهاية.

انظر المسائل ١٢ - ١٤

### نماذج أخرى من النهايات

نعرف

(ب)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  إذا وجد أي عدد موجب  $M$ ، مهما كان كبيرا، عددا موجبا  $\delta$  بحيث طالما

$$0 < |x - a| < \delta \text{ إذن } |f(x)| > M \text{ وعندما يكون } f(x) > M \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\text{وعندما يكون } f(x) < -M \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  إذا وجد أي عدد موجب  $\epsilon$  مهما كان صغيرا ، عددا موجبا  $M$  بحيث طالما  $|x| > M$

إذن  $|f(x) - A| < \epsilon$

(د)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  إذا وجد أي عدد موجب  $M$  ، مهما كان كبيرا ، عددا موجبا  $P$  بحيث طالما  $|x| > P$

إذن  $|f(x)| > M$

إذا وجدت النهايتان  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  فإن نظريات النهايات الآتية مرت في هذا الفصل تبقى صحيحة .

غير أنه لا يمكن استعمال هذه النظريات عندما  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$  أو عندما  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  وعلى سبيل المثال ، فإن  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x} = \infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2} = \infty$  بينما

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x^2) = -\infty$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 5) = +\infty$  كذلك أن  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} x(1+x) = 2$  .  
بينما  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{(x^2 + 5) + (2 - x^2)\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 7 = 7$

## مسائل محلولة

١ - عين نهاية كل من المتوالات الآتية :

- (أ)  $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, \dots$  (ب)  $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$  (ج)  $2, 5/2, 8/3, 11/4, 14/5, \dots$  (د)  $1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, \dots$  (هـ)  $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, \dots$  (و)  $5, 4, 11/3, 7/2, 17/5, \dots$

(أ) الحد العام هو  $1/n$  وعندما نطلى لـ  $n$  القيم  $1, 2, 3, 4, \dots$  على الترتيب فإن  $1/n$  تقتصر ولكنها تبقى موجبة .  
إذن النهاية تساوى 0 .

(ب) الحد العام هو  $(1/n)^2$  والنهاية تساوى 0 .

(ج) الحد العام هو  $3 - 1/n$  والنهاية تساوى 3 .

(د) الحد العام هو  $3 + 2/n$  والنهاية تساوى 3 .

(هـ) الحد العام هو  $1/2^n$  والنهاية تساوى 0 كافي الحالة (أ) .

(و) الحد العام هو  $1 - 1/10^n$  والنهاية تساوى 1 .

٢ - وضح سلوك  $y = x + 2$  عندما تتغير  $x$  بقيم كل متوالية في التمرين ١ .

- (أ)  $y \rightarrow 2$  على المتوالية  $3, 5/2, 7/3, 9/4, 11/5, \dots, 2 + 1/n, \dots$   
(ب)  $y \rightarrow 2$  على المتوالية  $3, 9/4, 19/9, 33/16, 51/25, \dots, 2 + 1/n^2, \dots$   
(ج)  $y \rightarrow 5$  على المتوالية  $4, 9/2, 14/3, 19/4, 24/5, \dots, 5 - 1/n, \dots$   
(د)  $y \rightarrow 5$  على المتوالية  $7, 6, 17/3, 11/2, 27/5, \dots, 5 + 2/n, \dots$

(أ)  $y \rightarrow 2$  على التوالي  $5/2, 9/4, 17/8, 33/16, 65/32, \dots, 2 + 1/2^n, \dots$

(و)  $y \rightarrow 3$  على التوالي  $2.9, 2.99, 2.999, 2.9999, \dots, 3 - \frac{1}{10^n}, \dots$

٣ - احسب

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)} = \frac{1}{5} \quad (د)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x = 5 \lim_{x \rightarrow 2} x = 5 \cdot 2 = 10 \quad (أ)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (2x+3) &= 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3 \quad (ب) \\ &= 2 \cdot 2 + 3 = 7 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{4-4}{4+4} = 0 \quad (هـ)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} (25-x^2)} = \sqrt{9} = 3 \quad (و)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-4x+1) = 4-8+1 = -3 \quad (ز)$$

ملاحظة : عدم التصور من هذه المسائل أن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  هي على التوأم مساوية  $f(a)$  والمقصود من  $f(a)$

هو قيمة  $f(x)$  عندما  $x=a$  وكما اصطلاحنا في الصفحة ١١ أن  $x$  لا تساوي  $a$  أبدا عندما  $x \rightarrow a$ .

٤ - اختبر سلوك  $f(x) = (-1)^x$  عندما تتغير  $x$  بالتواليين :

$$(أ) \quad 1/3, 1/5, 1/7, 1/9, \dots \quad (ب) \quad 2/3, 2/5, 2/7, 2/9, \dots$$

ماذا يمكن القول بخصوص  $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^x$  و  $f(0)$  ؟

$$(أ) \quad (-1)^x \rightarrow -1 \quad \text{على التوالي} \quad -1, -1, -1, -1, \dots$$

$$(ب) \quad (-1)^x \rightarrow +1 \quad \text{على التوالي} \quad +1, +1, +1, +1, \dots$$

وحيث أن  $(-1)^x$  تقرب من نهايتين مختلفتين على التواليين فإن  $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^x$  غير موجودة !

$$f(0) = (-1)^0 = +1$$

٥ - احسب

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7} \quad (أ)$$

إن عملية القسمة على  $(x-4)$  ، قبل إجراء عملية النهاية ، صحيحة لأنه حسب الاصطلاح في الصفحة ١١ يكون  $4 \neq x$  عندما  $x \rightarrow 4$  وبالتالي فإن  $x-4$  لا تساوي الصفر أبدا .

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-27}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{9}{2} \quad (ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{x \rightarrow a} (2x + h) = 2x \quad (ج)$$

إن  $h$  هنا ، وفي المسألتين ٧ ، ٨ كذلك ، متغير مما يجعلنا ننقش وكأننا في الحقيقة أمام دوال ذات متغيرين . ومع هذا ، متعديين على أن  $x$  متغير لا يلعب أي دور في هذه المسائل فإنه يمكن اعتبار  $x$  ثابتا بشكل مؤقت ، كان تأخذ  $x$  إحدى القيم في مداها .



وجوه هذه المسألة، كما نرى في الفصل ٤، هو أنه إذا كانت  $x$  أية قيمة ولنكن  $x = x_0$ ، في الحيز  $y = x^2$  فإن

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \text{ تساوى دائما ضعف القيمة التي اخترناها لـ } x.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{8 - \sqrt{x^2 + 5}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{(8 - \sqrt{x^2 + 5})(3 + \sqrt{x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{4 - x^2} \quad (د) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (3 + \sqrt{x^2 + 5}) = 6 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1} = \infty; \quad (هـ)$$

ولا توجد نهاية

٦ - احسب قيم ما يلي مبتدئا بقم كل من البسط والمقام على أعلى قوة موجودة لـ  $x$  ثم استخدم  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{9x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2/x}{9 + 7/x} = \frac{3 - 0}{9 + 0} = \frac{1}{3} \quad (أ)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 2x + 1}{6x^2 - 3x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 2/x + 1/x^2}{6 - 3/x + 4/x^2} = \frac{6 + 0 + 0}{6 - 0 + 0} = 1 \quad (ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x + 1/x^2 - 2/x^2}{4 - 1/x^2} = \frac{0}{4} = 0 \quad (ج)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1/x + 1/x^2} = \infty; \quad (د)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ أوجد } f(x) = x^2 - 3x. \quad \text{٧ - بفرض}$$

$$\text{بما أن } f(x) = x^2 - 3x, \quad f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2hx + h^2 - 3x - 3h) - (x^2 - 3x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2 - 3h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 3) = 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ أوجد } f(x) = \sqrt{5x+1}, \text{ عندما } x > -1/5. \quad \text{٨ - بفرض}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5x+5h+1) - (5x+1)}{h(\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}} \end{aligned}$$

٩ - من النقط  $x = a$  التي يكون عندها المقام مساويا للصفر. ابحث بعد ذلك في  $y$  عندما  $x \rightarrow a^+$  و  $x \rightarrow a^-$

(١)  $y = f(x) = 2/x$  ينعدم المقام عندما  $x = 0$  فإذا كانت  $x \rightarrow 0^-$  فإن  $y \rightarrow -\infty$  وإذا كانت  $x \rightarrow 0^+$  فإن  $y \rightarrow +\infty$ .

(ب)  $y = f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$  ينعدم المقام عندما  $x = -3$  و  $x = 2$ . فإذا كانت  $x \rightarrow -3^-$  فإن  $y \rightarrow -\infty$  وإذا كانت  $x \rightarrow -3^+$  فإن  $y \rightarrow +\infty$ . وإذا كانت  $x \rightarrow 2^-$  فإن  $y \rightarrow -\infty$  وإذا كانت  $x \rightarrow 2^+$  فإن  $y \rightarrow +\infty$ .

(ج)  $y = f(x) = \frac{x-3}{(x+2)(x-1)}$  ينعدم المقام عندما تكون  $x = -2$  و  $x = 1$  وإذا كانت  $x \rightarrow -2^-$  فإن  $y \rightarrow -\infty$  وإذا كانت  $x \rightarrow -2^+$  فإن  $y \rightarrow +\infty$  وإذا كانت  $x \rightarrow 1^-$  فإن  $y \rightarrow +\infty$  وإذا كانت  $x \rightarrow 1^+$  فإن  $y \rightarrow -\infty$ .

(د)  $y = f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$  ينعدم المقام عندما  $x = 3$  وإذا كانت  $x \rightarrow 3^-$  فإن  $y \rightarrow +\infty$  وإذا كانت  $x \rightarrow 3^+$  فإن  $y \rightarrow +\infty$ .

(هـ)  $y = f(x) = \frac{(x+2)(1-x)}{x-3}$  ينعدم المقام عندما  $x = 3$  فإذا كانت  $x \rightarrow 3^-$  فإن  $y \rightarrow +\infty$  وإذا كانت  $x \rightarrow 3^+$  فإن  $y \rightarrow -\infty$ .

١٠ - اخبر النهايات : (١)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3+2^{1/x}}$  (ب)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$

(١) افرض  $x \rightarrow 0^-$  إذن  $1/x \rightarrow -\infty$ ,  $2^{1/x} \rightarrow 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{3+2^{1/x}} = 1/3$ .

ثم افرض  $x \rightarrow 0^+$  إذن  $1/x \rightarrow +\infty$ ,  $2^{1/x} \rightarrow +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3+2^{1/x}} = 0$ .

وبالتالي فإن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3+2^{1/x}}$  غير موجودة

(ب) افرض  $x \rightarrow 0^-$  إذن  $2^{1/x} \rightarrow 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}} = \frac{1}{3}$ .

ثم افرض  $x \rightarrow 0^+$  عندما  $x \neq 0$ ,  $\frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}} = \frac{2^{-1/x} + 1}{3 \cdot 2^{-1/x} + 1}$  وحيث أن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-1/x} = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{-1/x} + 1}{3 \cdot 2^{-1/x} + 1} = 1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$  غير موجودة.

١١ - اخبر  $y$  عندما  $x \rightarrow -\infty$  وعندما  $x \rightarrow +\infty$  لجميع دوال المسألة ٩.

(١) عندما يكون  $|x|$  كبيرا يكون  $|y|$  صغيرا.

عندما  $x = -1000$  يكون  $y < 0$  وعندما  $x \rightarrow -\infty$  فإن  $y \rightarrow 0^-$  وعندما  $x = +1000$  يكون  $y > 0$  وعندما  $x \rightarrow +\infty$  فإن  $y \rightarrow 0^+$ .

(ب) ، (ج) ذات الأمر كافى (أ)

(د) عندما يكون  $|x|$  كبيرا يكون  $|y|$  قريبا من 1 .

عندما  $x = -1000$  يكون  $y < 1$  وعندما  $x \rightarrow -\infty$  فإن  $y \rightarrow 1^-$  وعندما  $x = +1000$  يكون  $y > 1$  وعندما  $x \rightarrow +\infty$  فإن  $y \rightarrow 1^+$

(هـ) عندما يكون  $|x|$  كبيرا يكون  $|y|$  كبيرا .

عندما  $x = -1000$  يكون  $y > 0$  وعندما  $x \rightarrow -\infty$  فإن  $y \rightarrow +\infty$  وعندما  $x = +1000$  يكون  $y < 0$  وعندما  $x \rightarrow +\infty$  فإن  $y \rightarrow -\infty$  .

١٢ - اختبر الدالة في المسألة ٩ من الفصل الأول عندما  $x \rightarrow a^-$  وعندما  $x \rightarrow a^+$  حيث  $a$  أى عدد صحيح موجب .  
لنعتبر  $a = 2$  فعندما  $x \rightarrow 2^-$  على المتوالية (1) فإن  $f(x) \rightarrow 10$  على المتوالية  $5, 10, 10, 10, \dots$  وعندما  $x \rightarrow 2^+$  على المتوالية (2) فإن  $f(x) \rightarrow 15$  وهذا نجد أن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  وبالتالى  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  غير موجودين .

١٣ - بين باستخدام التعريف الدقيق أن

$$\lim_{x \rightarrow 1} (-2x^3 + 9x + 4) = -3 \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) = 5, \quad (أ)$$

(أ) لنفرض أننا اخترنا  $\epsilon$  فعدا  $0 < |x - 1| < \lambda < 1$  فإن

$$\begin{aligned} |(4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) - 5| &= |4(x-1)^3 + 15x^2 - 36x + 21| = |4(x-1)^3 + 15(x-1)^2 + 6(x-1)| \\ &\leq 4|x-1|^3 + 15|x-1|^2 + 6|x-1| \\ &< 4\lambda + 15\lambda + 6\lambda = 25\lambda \end{aligned}$$

والآن - إذا كان  $5 < \epsilon$  فإن  $|4x^3 + 3x^2 - 24x + 22 - 5| < \epsilon$  عندما  $\lambda < \epsilon/25$  إذن بالتالى فإن أى عدد موجب أصغر من كل من 1 و  $\epsilon/25$  يصلح أن يكون  $\delta$  وبذلك يثبت وجود النهاية .

(ب) لنفرض أننا اخترنا  $\epsilon$  فإذا كان  $0 < |x + 1| < \lambda < 1$  فإن

$$\begin{aligned} |(-2x^3 + 9x + 4) + 3| &= |-2(x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 3(x+1)| \\ &\leq 2|x+1|^3 + 6|x+1|^2 + 3|x+1| < 11\lambda \end{aligned}$$

ولأى عدد موجب أصغر من كل من 1 و  $\epsilon/11$  يصلح أن يكون  $\delta$  وبذلك يثبت وجود النهاية .

١٤ - نفرض أن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  أثبت أن

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = AB, \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = A + B, \quad (أ)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0 \quad (\text{ج})$$



بما أن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ، فنتبع حسب التعريف النقير أنه للأعداد  $\epsilon_1 > 0$  و  $\epsilon_2 > 0$  مهما كانا صغيرين، وجود عددين  $\delta_1 > 0$  و  $\delta_2 > 0$  بحيث تكون

$$(I) \quad \text{طالما } 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{فإن} \quad |f(x) - A| < \epsilon_1,$$

$$(II) \quad \text{طالما } 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{فإن} \quad |g(x) - B| < \epsilon_2.$$

لنرمز بـ  $\lambda$  لأصغر العددين  $\delta_1$  و  $\delta_2$  فيكون

$$(III) \quad \text{طالما } 0 < |x - a| < \lambda \quad \text{فإن} \quad |f(x) - A| < \epsilon_1 \quad \text{و} \quad |g(x) - B| < \epsilon_2.$$

(أ) لنفرض أننا اخترنا  $\epsilon$  فنحن نريد أن يكون المطلوب إيجاد  $\delta > 0$  بحيث

$$\text{طالما } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{فإن} \quad |\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| < \epsilon$$

$$\text{والآن} \quad |\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| = |\{f(x) - A\} + \{g(x) - B\}| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|.$$

ومن (iii) نجد أن  $|f(x) - A| < \epsilon_1$  طالما  $0 < |x - a| < \delta$  ويكون  $|g(x) - B| < \epsilon_2$  طالما  $0 < |x - a| < \lambda$  حيث  $\lambda$  أصغر العددين  $\delta_1$  و  $\delta_2$ .

$$\text{إذن} \quad |\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad \text{طالما} \quad 0 < |x - a| < \lambda$$

بأخذ  $\epsilon \in \frac{1}{2} \epsilon_1 = \epsilon_2 = \delta = \lambda$  وبهذا الاختيار لـ  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$  عندئذ يكون

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{طالما} \quad |\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

(ب) لنفرض أننا اخترنا  $\epsilon$  فنحن نريد أن يكون المطلوب إيجاد  $\delta > 0$  بحيث

$$\text{طالما } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{فإن} \quad |f(x) \cdot g(x) - AB| < \epsilon$$

$$\text{والآن} \quad |f(x) \cdot g(x) - AB| = |(f(x) - A) \cdot (g(x) - B) + B(f(x) - A) + A(g(x) - B)| \\ \leq |f(x) - A| \cdot |g(x) - B| + B \cdot |f(x) - A| + |A| \cdot |g(x) - B|$$

$$\text{ومن (iii) و (ii) } |f(x) \cdot g(x) - AB| < \epsilon_1 \epsilon_2 + |B| \epsilon_1 + |A| \epsilon_2 \quad \text{طالما} \quad 0 < |x - a| < \lambda$$

لنأخذ  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$  بحيث ينطبق  $\epsilon_1 < \frac{1}{3} \frac{\epsilon}{|B|}$  و  $\epsilon_1 \epsilon_2 < \frac{1}{3} \epsilon$  و  $\epsilon_2 < \frac{1}{3} \frac{\epsilon}{|A|}$  في آن واحد ولنأخذ  $\delta = \lambda$  وبهذا الاختيار لـ  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$  فنحن نريد أن يكون

$$\text{طالما } 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) \cdot g(x) - AB| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

(ج) بما أن  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$  فإن النظرية الناتجة من (ب) يمكننا من برهنة أن  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ ،  $B \neq 0$ .

لنفرض أننا اخترنا  $\epsilon$  فنحن نريد أن يكون المطلوب إيجاد  $\delta > 0$  بحيث

$$\text{طالما } 0 < |x - a| < \delta \quad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \epsilon$$

$$\text{والآن} \quad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - g(x)}{B \cdot g(x)} \right| = \frac{|g(x) - B|}{|B| \cdot |g(x)|} = \frac{|g(x) - B|}{|B|} \cdot \frac{1}{|g(x)|}.$$

ومن (ii)

$$0 < |x - a| < \delta_1$$

طالما

$$|g(x) - B| < \epsilon_1$$

وبما أننا نبحث أيضا في  $\frac{1}{g(x)}$  فإنه ينبغي التأكد من أن  $\delta_2$  صغيرة بقدر يكفي لاجل الفترة  $a - \delta_2 < x < a + \delta_2$  لا تحوى جذر  $g(x) = 0$  لنفرض أن  $\delta_2 \leq \delta_3$  تحقق هذا الطلب بحيث  $|g(x) - B| < \epsilon_2$  و  $|g(x)| > 0$  طالما  $0 < |x - a| < \delta_3$  وحيث أن  $|g(x)| > 0$  في الفترة يقتضى أن  $|g(x)| > b > 0$  و  $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{b}$  في الفترة ، فإننا نحصل على

$$0 < |x - a| < \delta_3 \quad \text{طالما} \quad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \frac{\epsilon_2}{|B|} \cdot \frac{1}{b}$$

لنأخذ  $\epsilon_2 < \epsilon b |B|$  إذن  $\frac{\epsilon_2}{|B| \cdot b} < \epsilon$  ويكون  $\delta = \delta_3$  لهذا الاختيار لـ  $\epsilon_2$

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{طالما} \quad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x-1} = \infty. \quad (ج) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = 1, \quad (ب) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-2)^3} = \infty. \quad (أ)$$

( ) لنفرض أننا اخترنا  $M$  لجميع قيم  $x$  التي تحقق العلاقة  $|x - 2| < \delta$  و  $|x - 2| < \delta$ .

$$\delta < \frac{1}{\sqrt[3]{M}} \quad \text{أو} \quad \frac{1}{\delta^3} > M \quad \text{عندما} \quad \left| \frac{1}{(x-2)^3} \right| > M \quad \text{وبالتالى} \quad \left| \frac{1}{(x-2)^3} \right| > \frac{1}{\delta^3}.$$

$$(ب) \quad \text{لنفرض أننا اخترنا } \epsilon \text{ لجميع قيم } x \text{ التي تحقق العلاقة } \frac{1}{|x+1|} \leq \frac{1}{|x|-1} < \frac{1}{M-1}$$

$$M > 1 + \frac{1}{\epsilon}. \quad \text{أو} \quad \frac{1}{M-1} < \epsilon \quad \text{عندما} \quad \left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \epsilon \quad \text{وبالتالى} \quad |x| > M, \quad \left| \frac{x}{x+1} - 1 \right|$$

$$(ج) \quad \text{لنفرض أننا اخترنا } M \text{ كبيرة بقدر كاف لجميع قيم } x \text{ التي تحقق العلاقة } |x| > P > 1$$

$$P > 2M. \quad \text{عندما} \quad \left| \frac{x^3}{x-1} \right| > M \quad \text{وبالتالى} \quad \left| \frac{x^3}{x-1} \right| \geq \frac{x^3}{|x|+1} > \frac{x^3}{2|x|} = \frac{1}{2}|x|^2 > \frac{1}{2}P.$$

### مسائل إضافية

١٦ - صف سلوك  $y = 2x + 1$  عندما تنمير  $x$  على كل متوالية من متوالات المسألة ١.

ح . (أ)  $y \rightarrow 1$  (ب)  $y \rightarrow 1$  (ج)  $y \rightarrow 7$  (د)  $y \rightarrow 7$  (هـ)  $y \rightarrow 1$  (و)  $y \rightarrow 3$

١٧ - احسب

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} \quad (ط) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} \quad (س) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 4x) \quad (أ)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4} \quad (ى) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} \quad (و) \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x^2 - 3x - 4) \quad (ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad (\text{ك}) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} \quad (\text{ز}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^2} \quad (\text{ح})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \quad (\text{ل}) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} \quad (\text{ح}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \quad (\text{د})$$

ج : (أ) -4 ; (ب) 0 ; (ج)  $\frac{1}{2}$  ; (د)  $\frac{1}{2}$  ; (هـ) 0 ; (و)  $\frac{1}{3}$  ; (ز) -4 ; (ح)  $\frac{1}{2}$  ; (ط)  $\frac{1}{4}$  ; (ي)  $\infty$  ، لا توجد نهاية (ك)  $3x^2$  (ل) 2 .

١٨ - احسب :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \quad (\text{ز}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x^2+5x+6} \quad (\text{أ}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+5} \quad (\text{ح}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{4x-5} \quad (\text{ا})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \quad (\text{و}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5x+6}{x+1} \quad (\text{د}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{6+x-3x^2} \quad (\text{ب})$$

ج : (أ)  $\frac{1}{2}$  ، (ب)  $\frac{2}{3}$  ، (ج) 0 ، (د)  $\infty$  ، لا توجد نهاية (هـ) 0 ، (و) 1 ، (ز) -1

١٩ - أوجد  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  لكل دالة من دوال المسألة ٢٤ في الفصل الأول

$$\frac{1}{(a+1)^2} \quad (\text{ح}) \quad \frac{1}{2\sqrt{a-4}} \quad (\text{ب}) \quad \frac{-1}{(a-2)^2} \quad (\text{ا}) \quad \text{ج :}$$

٢٠ - ماذا يمكن قوله حول  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$  حيث  $a_0 b_0 \neq 0$  وحيث  $m, n$  عدنان صحيحان موجبان علما

$$m < n? \quad (\text{ح}) \quad m = n, \quad (\text{ب}) \quad m > n, \quad (\text{ا})$$

ج : (أ) لا توجد نهاية (ب)  $a_0/b_0$  (ج) 0

٢١ - ابحث في سلوك  $f(x) = |x|$  عندما  $x \rightarrow 0$  ارسم المنحنى .

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \text{ج :} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{إرشاد : اختر}$$

٢٢ - ابحث في سلوك  $\begin{cases} f(x) = x, & x > 0 \\ f(x) = x+1, & x \leq 0 \end{cases}$  عندما  $x \rightarrow 0$  ارسم المنحنى .

ج :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  غير موجودة .

٢٣ - (أ) استخدم النظرية IV والاستقراء الرياضي لإثبات أن

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad \text{حيث } n \text{ عدد صحيح موجب .}$$

(ب) استخدم النظرية III والاستقراء الرياضي لإثبات أن

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

٢٤ - استخدم النظرية II ونتيجتي المسألة ٢٣ لإثبات أن

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a),$$

حيث  $P(x)$  متطوعة الحدود في  $x$ .

٢٥ - بفرض  $f(x) = 5x - 6$  أوجد  $\delta > 0$  عندما يكون  $0 < |x - 4| < \delta$  طامًا  $|f(x) - 14| < \epsilon$

وذلك عندما (١)  $\epsilon = \frac{1}{2}$  (ب)  $\epsilon = 0.001$  ج : (١)  $1/10$  (ب)  $0.0002$

٢٦ - استخدم التعريف الدقيق لإثبات أن :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5) = 3. \quad (ج) \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 4. \quad (ب) \quad \lim_{x \rightarrow 1} 5x = 15, \quad (١)$$

٢٧ - استخدم التعريف الدقيق لإثبات أن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} = \infty. \quad (د) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1, \quad (ج) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} = \infty, \quad (ب) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty. \quad (١)$$

$$ج : (١) \quad \delta < 1/M, \quad (ب) \quad \delta < \frac{1}{M+1}, \quad (ج) \quad M > 1 + \frac{1}{\epsilon}, \quad (د) \quad P > 2M$$

٢٨ - أثبت أنه إذا كانت  $f(x)$  معرفة لجميع قيم  $x$  القريبة من  $x = a$  وكان لها نهاية عندما  $x \rightarrow a$  فإن هذه النهاية وحيدة .

إرشاد : افرض أن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$  وأن  $B \neq A$ . اختر  $\epsilon_1, \epsilon_2 < \frac{1}{2}|A - B|$  عين بعد ذلك  $\delta_1, \delta_2$  لنهاتين ونأخذ  $\delta$  أصغر المديين  $\delta_1, \delta_2$  بين بعد ذلك أن  $|A - f(x)| + |f(x) - B| < |A - B|$  وهذا تناقض .

٢٩ - نفرض  $f(x), g(x), h(x)$  بحيث يكون (١)  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  لجميع قيم  $x$  القريبة من  $x = a$  بين أن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ . (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ .

إرشاد : بفرض  $\epsilon > 0$  مهما كانت صغيرة ، يوجد عدد  $\delta > 0$  بحيث إذا كان  $0 < |x - a| < \delta$  فإن  $|f(x) - A| < \epsilon$  و  $|h(x) - A| < \epsilon$  أو  $A - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \epsilon$ .

٣٠ - أثبت أنه إذا كان  $f(x) \leq M$  لجميع قيم  $x$  وإذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  فإن  $A \leq M$ .

إرشاد : افرض  $A > M$  ثم اختر  $\epsilon = \frac{1}{2}(A - M)$  فتصل إلى تناقض .



## الفصل الثالث

### الاستمرار ( الاتصال )

نقول عن دالة  $f(x)$  إنها مستمرة ( متصلة ) عند  $x = x_0$  إذا كان ( i )  $f(x_0)$  معرفة ( ii )  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

موجودة ( iii )  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

مثلاً  $f(x) = x^2 + 1$  مستمرة عند  $x = 2$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 = f(2)$  وبستلزم الشرط ( i ) إن الدالة يمكن

أن تكون مستمرة فقط وعند نقط حيز التعريف لها . فالدالة  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  ليست مستمرة عند  $x = 3$  لأن (3)  $f$  تخيل أى أنه غير معرف .

يقال عن الدالة المستمرة عند كل نقطة من نقط فترتها المفتوحة أو المغلقة إنها مستمرة في تلك الفترة . ويقال عن دالة  $f(x)$  إنها مستمرة إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من حيز التعريف لها . فالدالة  $f(x) = x^2 + 1$  مستمرة في جميع الدوال متعددة الحدود في  $x$  دوال مستمرة . والدوال  $e^x, \sin x, \cos x$  أمثلة أخرى على ذلك .

إذا كان حيز التعريف لدالة هو فترة مغلقة  $a \leq x \leq b$  فمبدئاً لا يتحقق الشرط ( ii ) عند نقطى النهاية  $a$  و  $b$  وسنقول عن دالة مثل هذه إنها مستمرة إذا كانت مستمرة في الفترة المفتوحة  $a < x < b$  وكان  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

و  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$  فالدالة  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  يمكن أن يقال عنها إنها دالة مستمرة . ( انظر المثال ١ من

الفصل الثانى ) . إن دوال حساب التفاضل والتكامل الابتدائى مستمرة في حيز تعريفها مع احتمال استثناء عدد من النقط المنزلة .

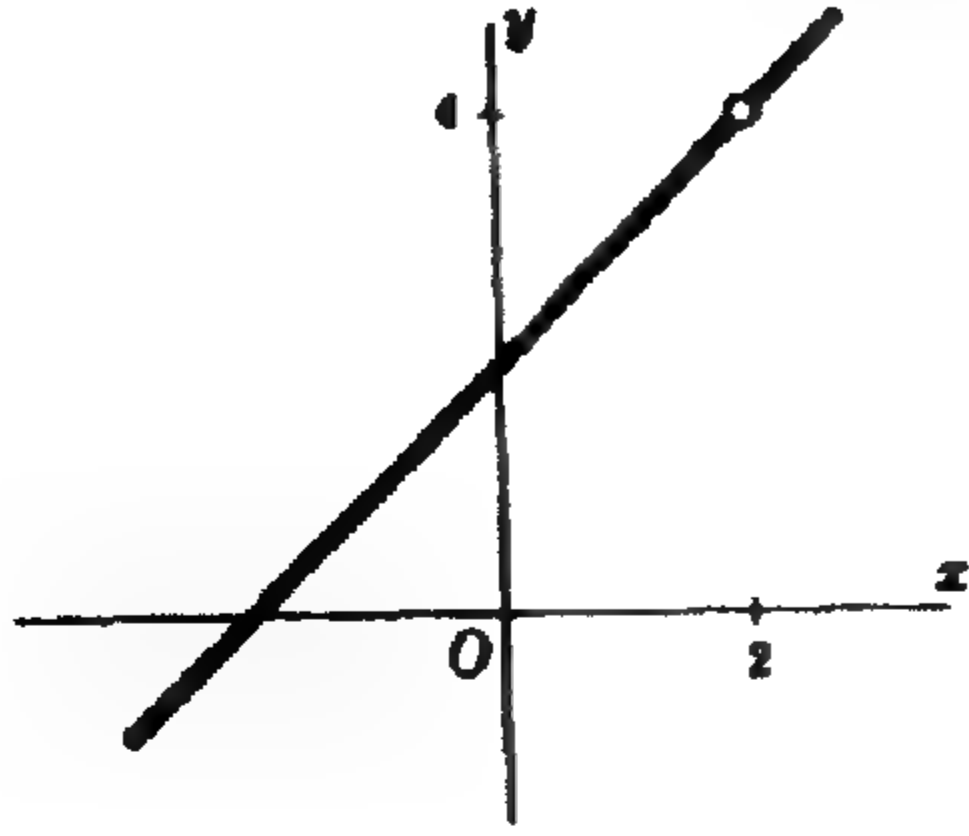
**نقول عن دالة  $f(x)$  إنها متقطعة ( غير مستمرة )** ، عند  $x = x_0$  إذا لم يتحقق شرط أو أكثر من شروط الاستمرار السابقة . سنوضح عن طريق أمثلة الأنماط المختلفة للدوال الغير مستمرة .

( ١ ) الدالة  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  متقطعة عند  $x = 2$  لأن

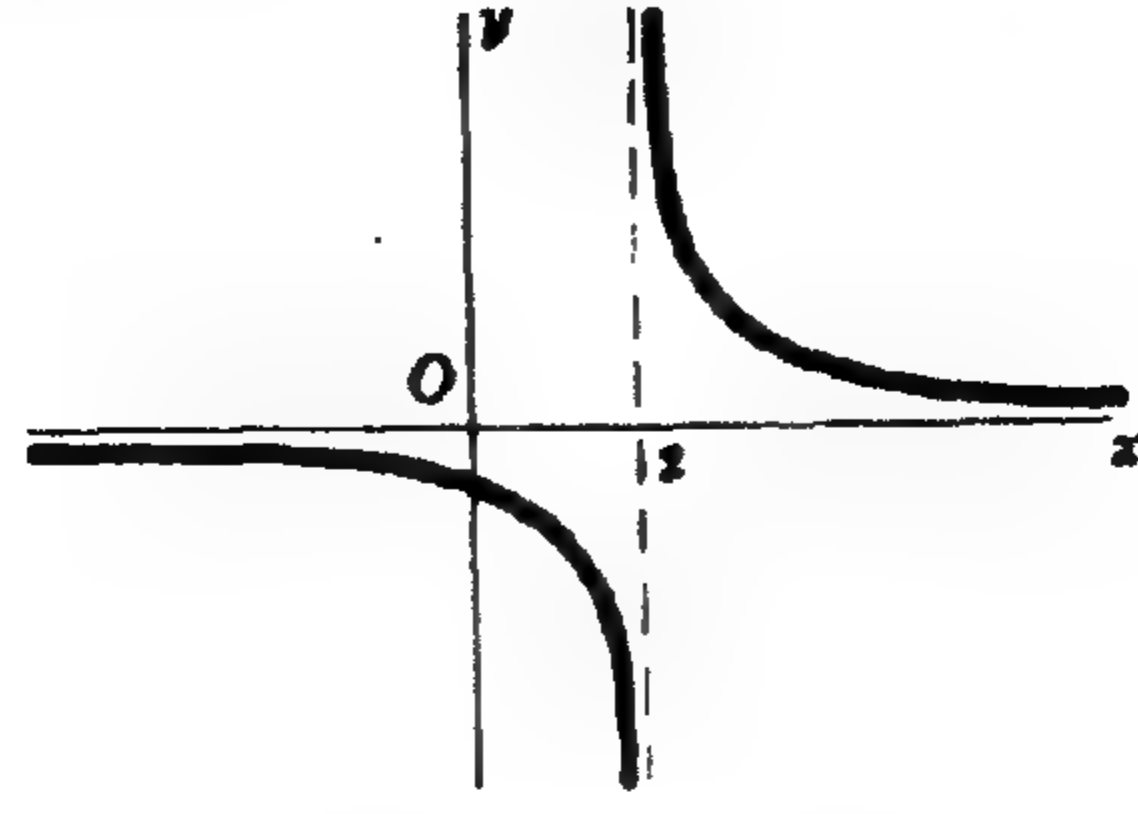
( i )  $f$  غير معرف ( لانعدام المقام )

( ii )  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  غير موجودة ( تساوى  $\infty$  )

والدالة مستمرة في أى موضع باستثناء عند  $x = 2$  حيث يقال عنها إنها ذات انقطاع لانهائى . انظر الشكل ٣ - ١



شكل ٢ - ٢



شكل ٣ - ١

$$(ب) \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{متقطعة عند } x = 2 \quad \text{لأن}$$

(i)  $f(2)$  غير معرفة ( كل من البسط والمقام معدوم )

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

يوصف الانقطاع هنا بأنه قابل للإزالة حيث يمكن التخلص منه بأن نعيد تعريف الدالة على أنها  $f(2) = 4$ ;  $x \neq 2$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

( لاحظ أنه لا يمكن إزالة الانقطاع في (١) لأن النهاية غير موجودة ) والمنحنيين  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

و  $g(x) = x + 2$  متطابقين باستثناء النقطة  $x = 2$  حيث يوجد للأول « ثقب » ، وإزالة الانقطاع ، ببساطة ، ليس « إلا مل » هذا ، الثقب ، بشكل مناسب .

$$(ج) \quad \text{إن الدالة } f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}, \quad x \neq 3; f(3) = 9 \quad \text{متقطعة عند } x = 3 \quad \text{لأن } f(3) = 9 \quad (i)$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 27, \quad (iii) \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$$

ولكن يمكن إزالة الانقطاع بإعادة تعريف الدالة على أنها  $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}, x \neq 3; f(3) = 27$ .

(د) إن دالة المسألة ٩ من الفصل الأول معرفة لجميع قيم  $x > 0$  ولكنها ذات انقطاع عند  $x = 1, 2, 3, \dots$  ( انظر المسألة ١٢ من الفصل الثاني ) ناشئ من كون :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad (\text{حيث } a \text{ أى عدد صحيح موجب})$$

وتوصف هذه بأنها انقطاعات مفاجئة

انظر المسألتين ١ - ٢

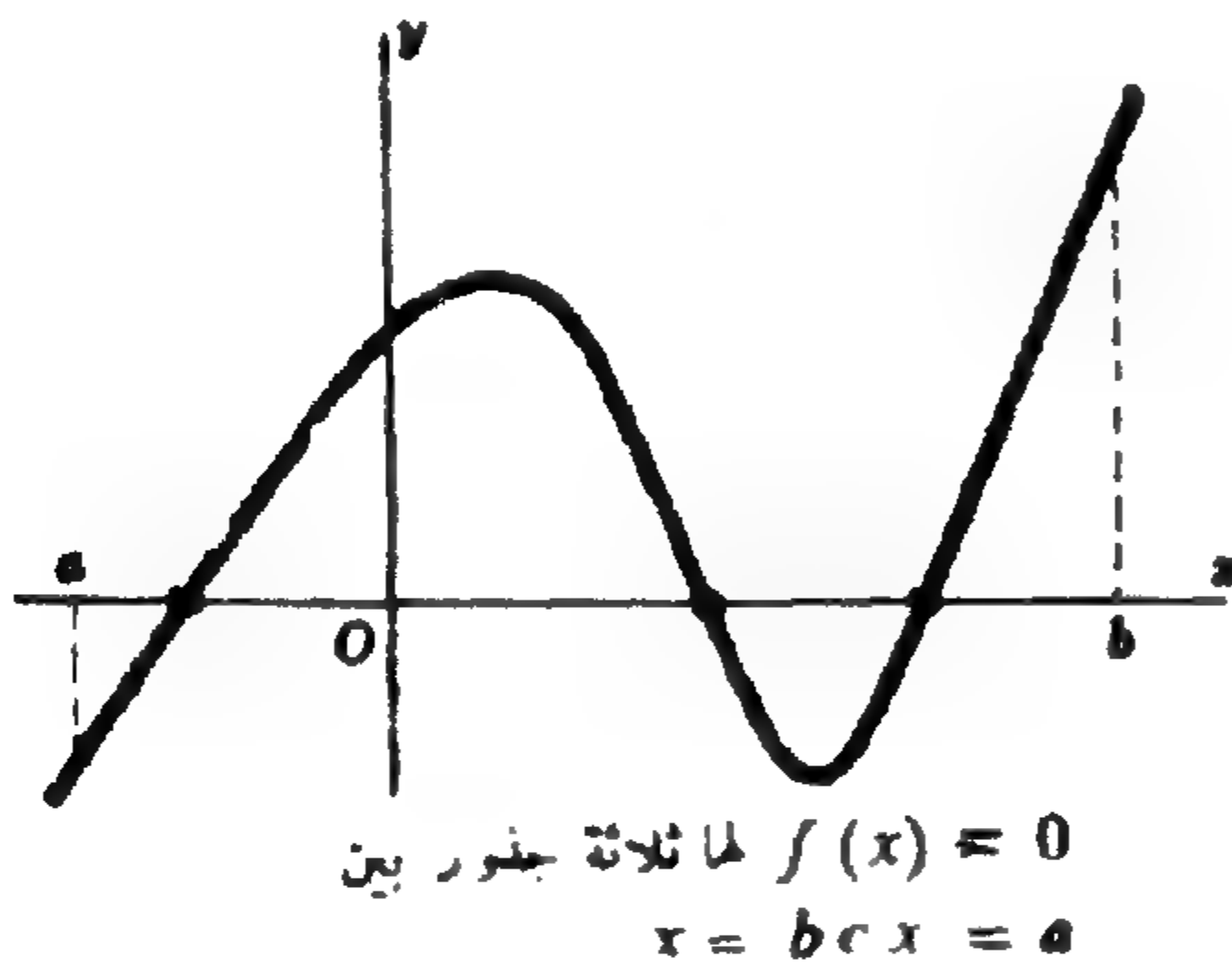
**خواص الدوال المستمرة :** نتقودنا نظريات النهايات في الفصل الثاني إلى نظريات الدوال المستمرة مباشرة ، وبوجه خاص ، إذا كانت  $f(x)$  و  $g(x)$  دالتين مستمرتين عند  $x = a$  فإن الدوال  $f(x)/g(x)$ ،  $g(x)$ ،  $f(x)$ ،  $g(x)$ ،  $f(x) \pm g(x)$  مستمرة على أن يكون  $g(a) \neq 0$  في الدالة الأخيرة . وهكذا نجد أن متعددات الحدود في  $x$  مستمرة دوماً في حين تكون الدوال الجذرية في  $x$  مستمرة عند كل نقطة باستثناء النقط التي ينعدم عندها المقام .

ولابد أن يكون القارئ قد استخدم بعض خواص الدوال المستمرة عند دراسة الجبر .

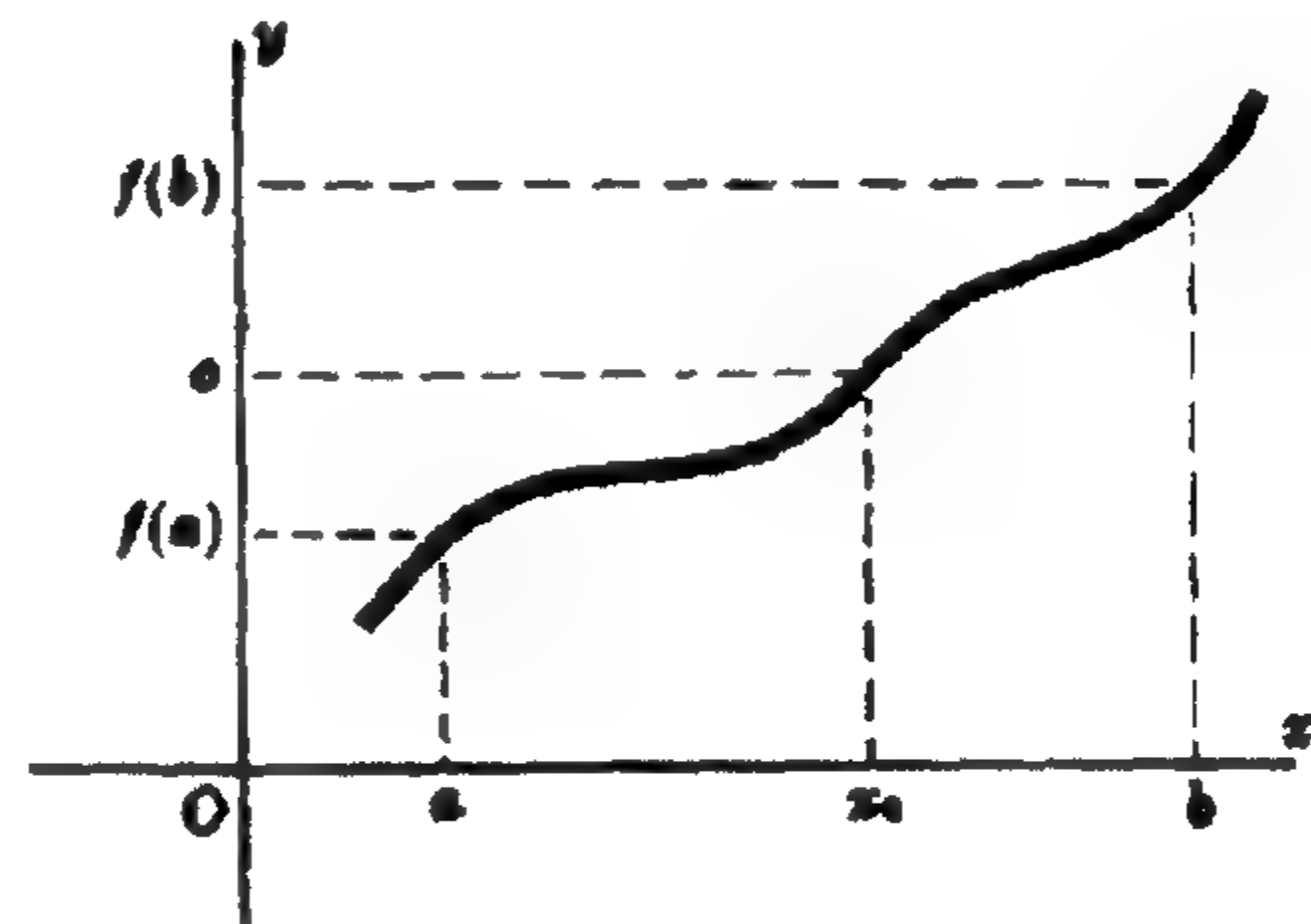
- ( ١ ) عند رسم منحنى متعددة الحدود  $y = f(x)$  لا لقدم توصيل أى نقطتين  $[a, f(a)]$  و  $[b, f(b)]$  بقوس متصل  
 (ب) إذا كان  $f(a)$  ,  $f(b)$  لهما إشارتان مختلفتان ، فإن منحنى  $y = f(x)$  يقطع محور السينات فى نقطة  
 واحدة على الأقل ويكون المعادلة  $f(x) = 0$  جذر واحد على الأقل بين  $x = a$  ,  $x = b$  .  
 وخاصة الدوال المستمرة المستعملة هنا :

I - إذا كانت  $f(x)$  دالة مستمرة فى الفترة  $a \leq x \leq b$  وكان  $f(a) \neq f(b)$  إذن لأى عدد  $c$  بين  $f(a)$  و  $f(b)$  توجد على الأقل قيمة واحدة لـ  $x$  مثل  $x = x_0$  بحيث يكون  $f(x_0) = c$  .

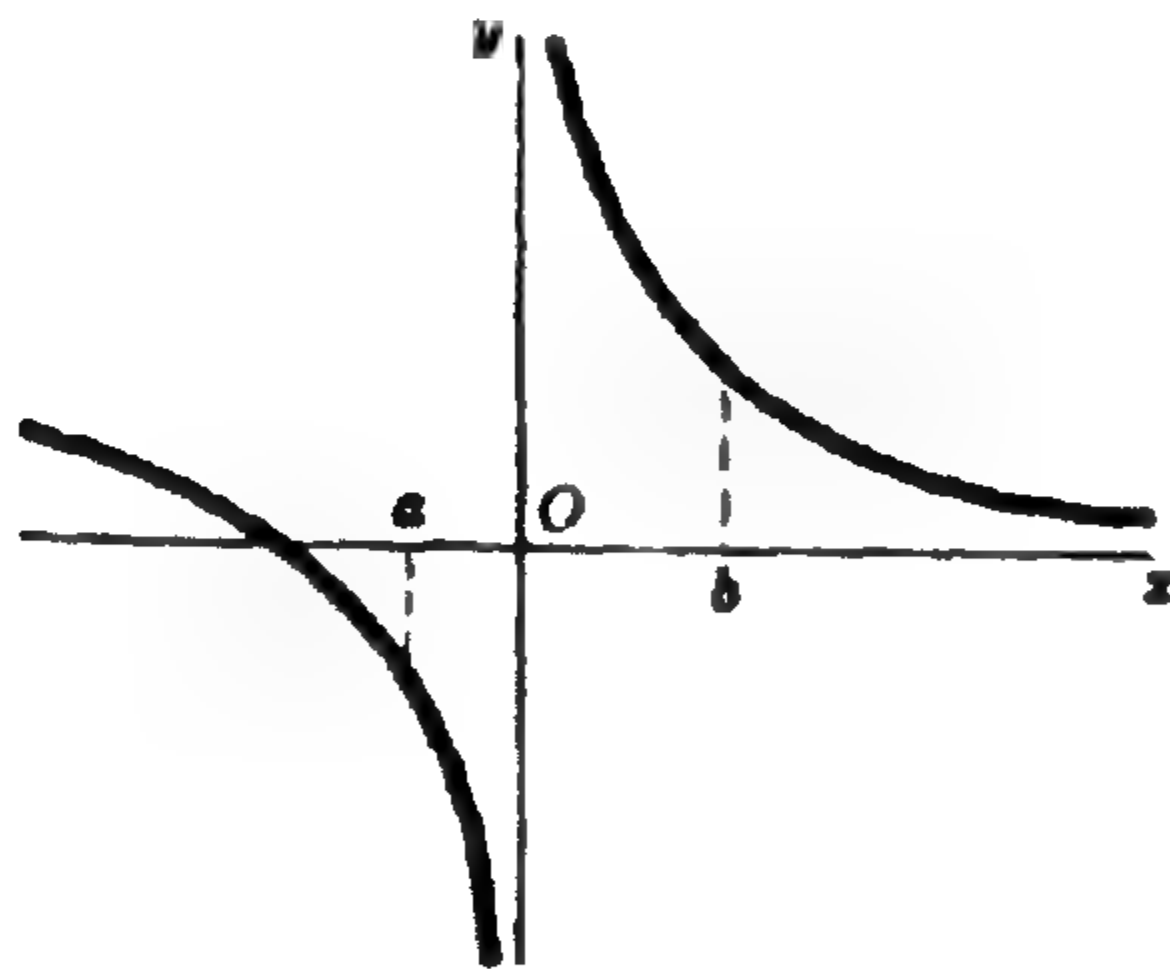
يوضح الشكلان ١٢ - ٣ و ١٣ - ٣ تطبيق هذه الخاصية بينما يبين لنا الشكلان ١٤ - ٣ و ١٥ - ٣ كيف أن الاستمرار على طول الفترة أمر ضرورى .



شكل ١٢ - ٣ ب

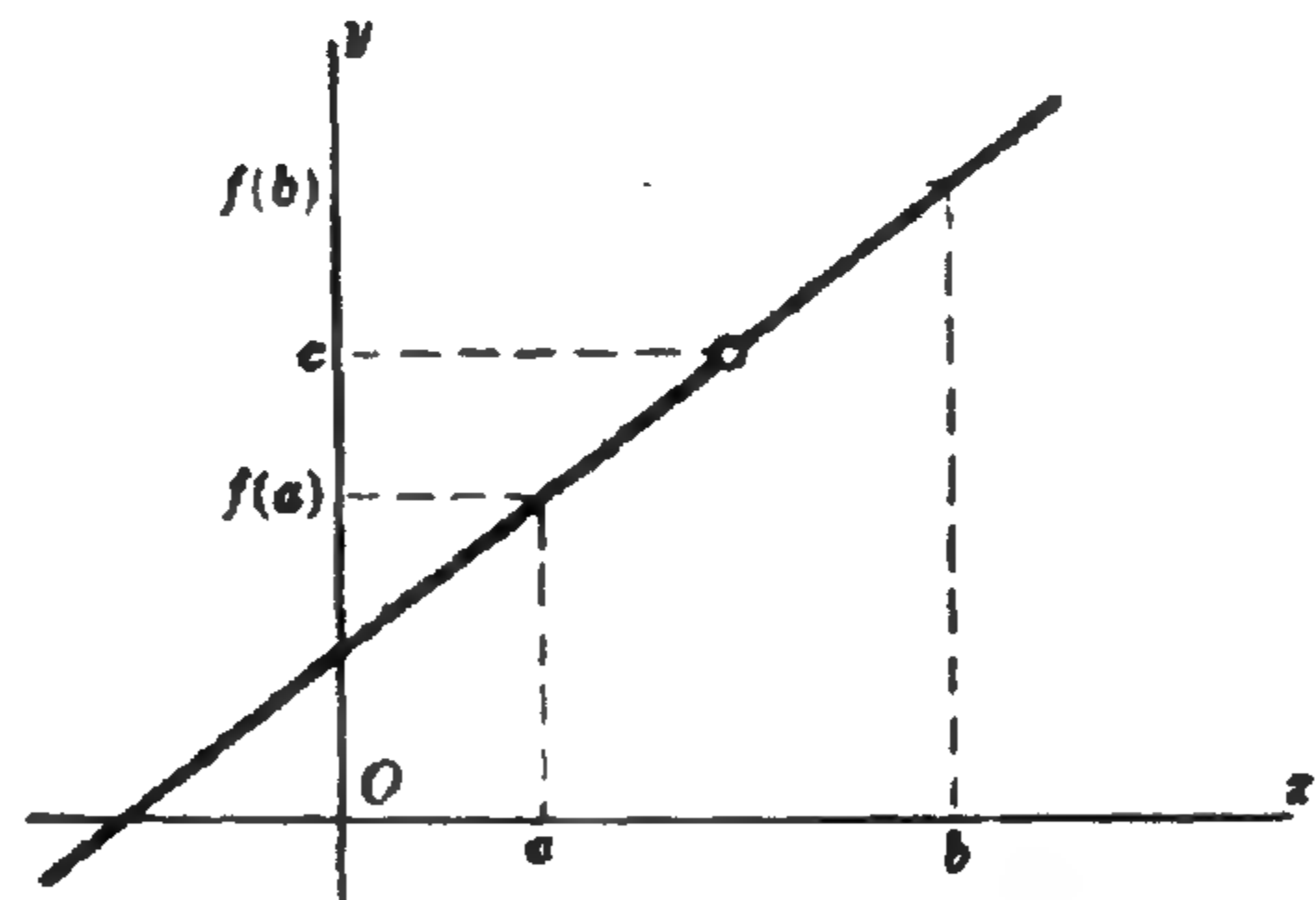


شكل ١٣ - ٣



$f(x) = 0$  لا يوجد لها جذور بين  
 $x = b$  و  $x = a$

شكل ١٤ - ٣ ب



شكل ١٥ - ٣

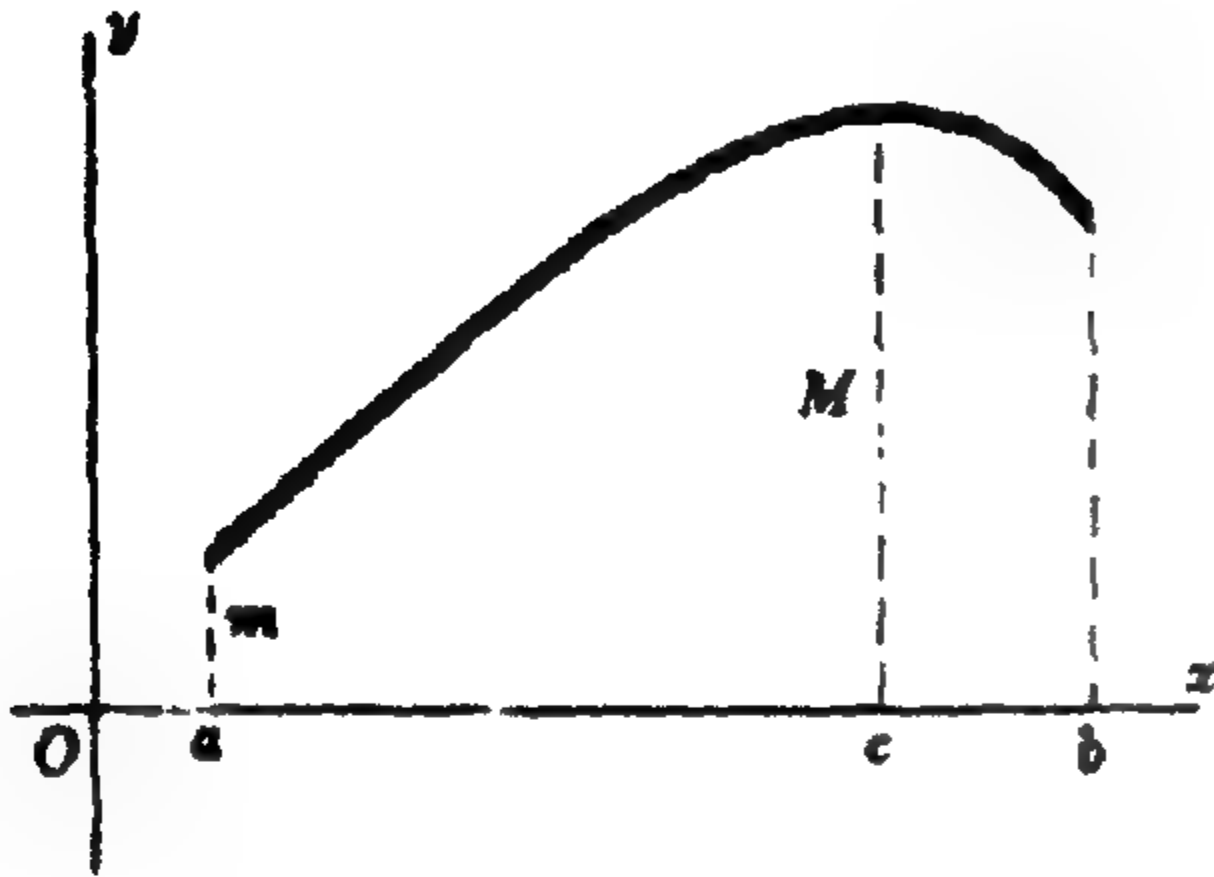
وسنذكر فيما يلى خواص أخرى للدوال المستمرة :

II - إذا كانت الدالة  $f(x)$  مستمرة فى الفترة  $a \leq x \leq b$  فنحن تأخذ الدالة  $f(x)$  فى هذه الفترة قيمة صغرى  $m$  وقيمة عظمى  $M$  .

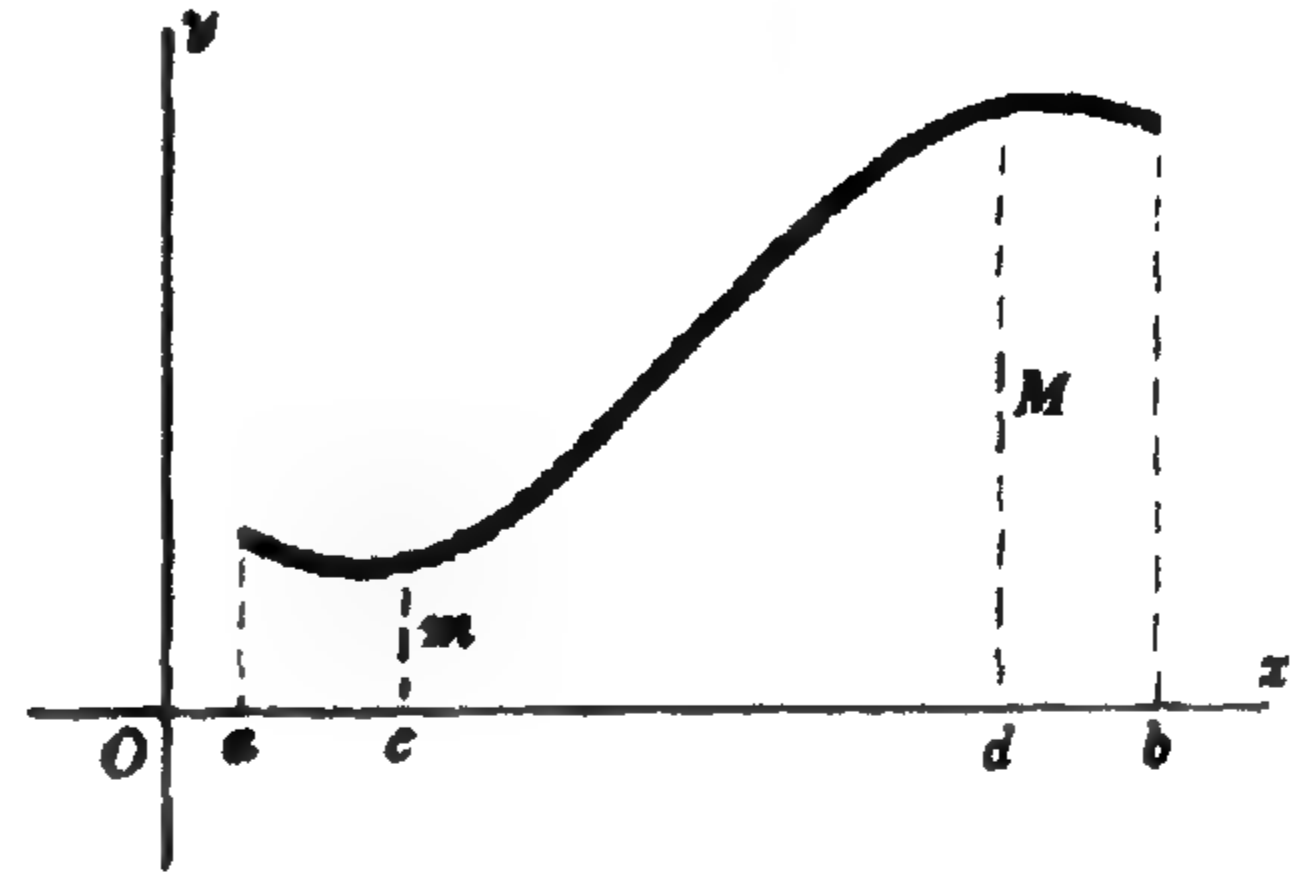
وعلى الرغم من أن برهان الخاصية II خارج عن نطاق هذا الكتاب فإننا سنستخدم هذه الخاصية دون قيد فى فصول قادمة .

الشكل التالى هو لمجرد توضيح بلهجة الخاصية ، فى الشكل ١٥ - ٣ ا الدالة مستمرة عند  $a \leq x \leq b$  وتأخذ الدالة

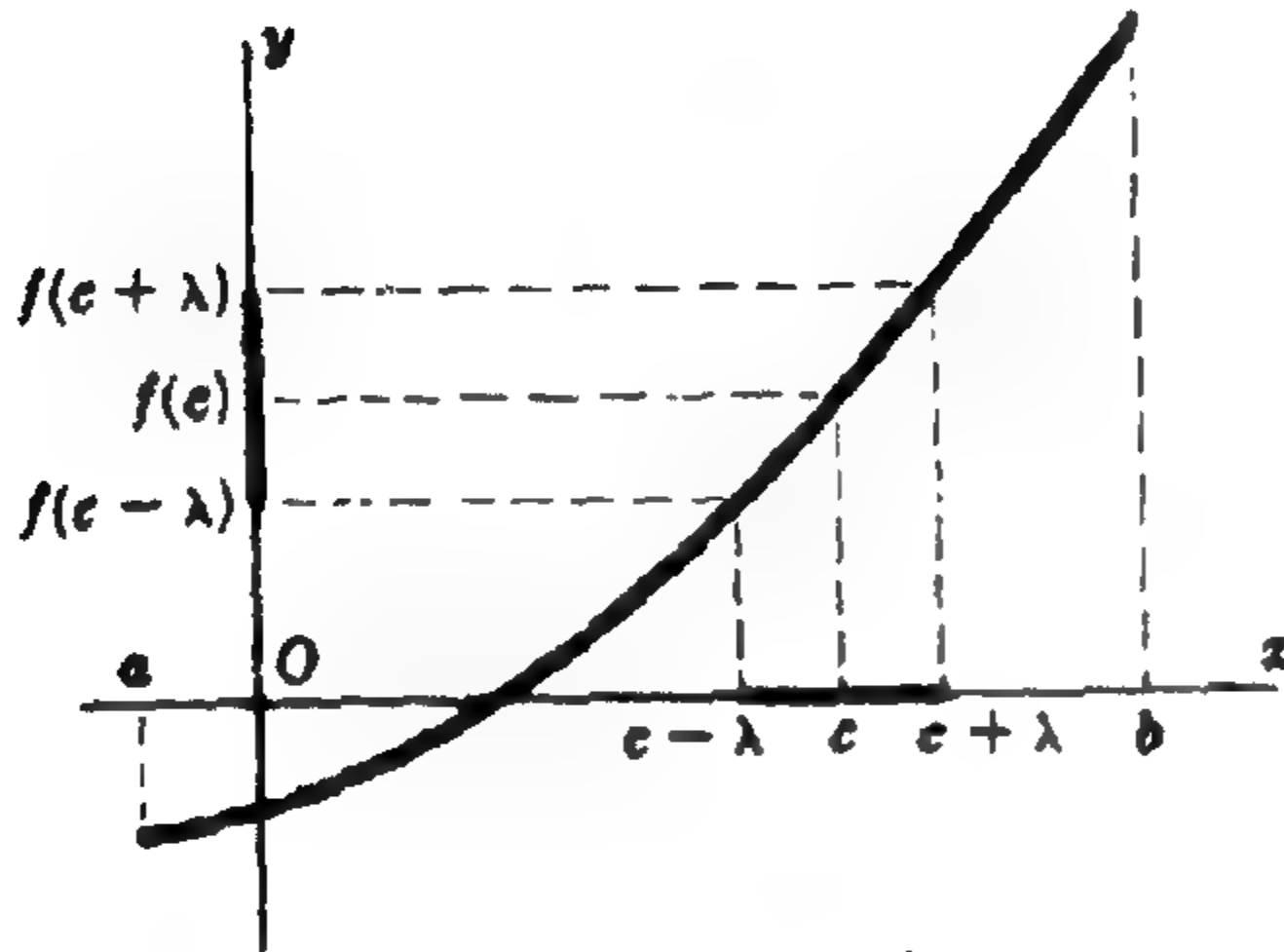
فيمتد الصغرى  $m$  عند النقطة  $c$  وقيمها العظمى  $M$  عند النقطة  $x = c$  و  $x = d$  وكلا النقطتين داخل الفترة . وفي الشكل ٣ - ٥ ب فالدالة مستمرة عند  $a \leq x \leq b$  وتأخذ الدالة قيمها الصغرى  $m$  عند الطرف  $x = a$  وقيمها العظمى  $M$  عند  $x = c$  داخل الفترة ، أما في الشكل ٣ - ٥ ج فيوجد انقطاع عند  $x = c$  حيث  $a < c < b$  والدالة قيمة صغرى عند  $x = a$  ولكن ليس لها قيمة عظمى .



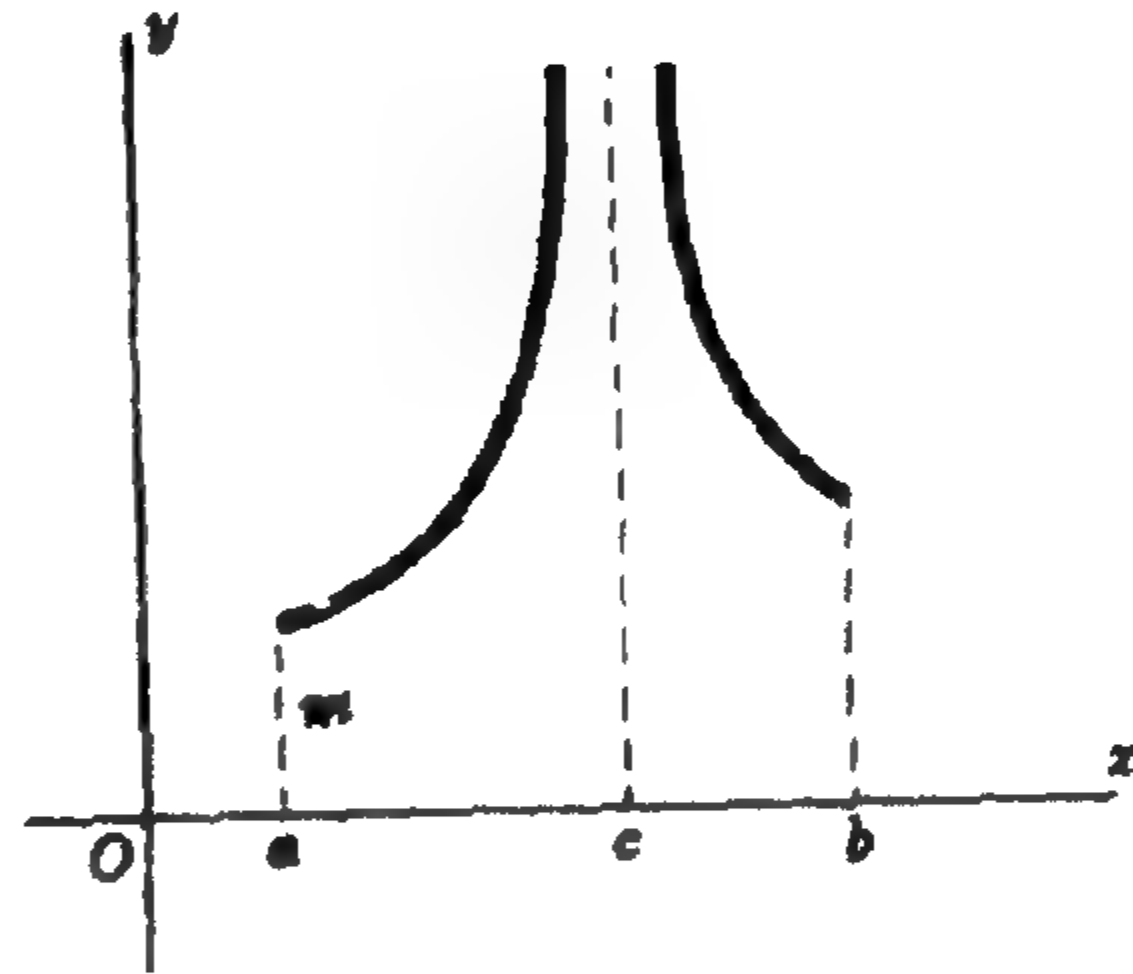
شكل ٣ - ٥ ب



شكل ٣ - ٥ ج



شكل ٣ - ٦



شكل ٣ - ٧

III إذا كانت  $f(x)$  دالة مستمرة في الفترة  $a \leq x \leq b$  وكان  $c$  أي عدد بين  $a, b$  و  $f(c) > 0$  فنحن نوجد عدد  $\lambda > 0$  بحيث إذا كان  $c - \lambda < x < c + \lambda$  فإن  $f(x) > 0$  . إن هذه الخاصية موضحة في الشكل ٣ - ٦ . ومن أجل البرهان انظر المسألة ٤ .

### مسائل محلولة

١ - ينتج من المسألة ٩ الفصل الثاني أن :

( أ ) الدالة  $f(x) = 2/x$  متماثل انقطاعا لانهائية عند  $x = 0$  .

( ب ) الدالة  $f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$  متماثل انقطاعا لانهائيا عند  $x = -3$  و  $x = 2$  .

( ج ) الدالة  $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$  متماثل انقطاعا لانهائيا عند  $x = 3$  .



٢- ينتج من المسألة ٥ في الفصل الثاني أن :

(١) الدالة  $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^3 - 9}$  انقطعا قابلا للإزالة عند  $x = 3$  كذلك يوجد انقطاع لا نهائي عند  $x = -3$ .

(ب) الدالة  $f(x) = \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$  انقطعا قابلا للإزالة عند  $x = 2$  كذلك يوجد انقطاع قابل للإزالة عند  $x = -2$ .

(ج) الدالة  $f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{(x - 1)^2}$  انقطعا لا نهائيا عند  $x = 1$ .

٣- بين أن وجود  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  يقتضي أن تكون  $f(x)$  مستمرة عند  $x = a$ .

إن وجود النهاية يقتضي أن  $f(a+h) - f(a) \rightarrow 0$  عندما  $h \rightarrow 0$  وهكذا فإن  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$  والدالة  $f(x)$  مستمرة عند  $x = a$ .

٤- برهن أنه إذا كانت  $f(x)$  دالة مستمرة في الفترة  $a \leq x \leq b$  وكان  $c$  أي عدد بين  $a$  و  $b$  و  $f(c) > 0$  فعندها يوجد عدد  $\lambda > 0$  بحيث إذا كان  $c - \lambda < x < c + \lambda$  فإن  $f(x) > 0$ .

بما أن  $f(x)$  مستمرة عند  $x = c$  فإن  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  وهما كان  $\epsilon > 0$  فإنه يوجد  $\delta > 0$  بحيث أنه

(١) طالما  $0 < |x - c| < \delta$  فإن  $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ .

ويكون الآن  $f(x) > 0$  لجميع نقاط الفترة  $c - \delta < x < c + \delta$  التي يكون عندها  $f(x) \geq f(c)$  أما في بقية نقاط الفترة فيكون  $f(x) < f(c)$  وبالتالي  $|f(x) - f(c)| = f(c) - f(x) < \epsilon$  و  $f(x) > f(c) - \epsilon$ .

وهذا يبين أن  $f(x) > 0$  عند هذه النقاط ما لم يكن  $f(c) \geq \epsilon$  وعلى هذا ينبغي ، كي نعين فترة تحقق جميع ما تطلبه النظرية ، أن نختار  $\epsilon < f(c)$  ونعين  $\delta$  بحيث يتحقق (١) وتأخذ  $\lambda < \delta$  انظر المسألة ١٠ من أجل النظرية المرافقة .

### مسائل اختيارية

٥- اختر من المسألة ١٧ (١) - (ج) من الفصل الثاني ، لنقاط الانقطاع ج : (١) ، (ب) ، (د) لا يوجد (هـ)  $x = -1$  (٦)  $x = \pm 1$  (و)  $x = 2, 3$  (ز)  $x = -1, -3$  (ح)  $x = \pm 2$ .

٦- بين أن  $f(x) = |x|$  مستمرة عند كل نقطة

٧- بين أن الدالة  $f(x) = \frac{1 - 2^{1/x}}{1 + 2^{1/x}}$  انقطعا مفاجئا عند  $x = 0$

٨- بين أنه عند  $x = 0$  يكون (١) الدالة  $f(x) = \frac{1}{3^{1/x} + 1}$  انقطاع مفاجئ (ب) والدالة  $f(x) = \frac{x}{3^{1/x} + 1}$  انقطاع قابل للإزالة .

٩- في الشكل ٣-٤ امنحني  $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 21}{x - 7}$  عند  $a = 3$  و  $b = 11$  وبين أن  $c = 10$ .

١٠- برهن أنه إذا كانت  $f(x)$  دالة مستمرة في الفترة  $a \leq x \leq b$  وكان  $c$  أي عدد بين  $a$  و  $b$  و  $f(c) < 0$  فعندها يوجد عدد  $\lambda > 0$  بحيث إذا كان  $c - \lambda < x < c + \lambda$  فإن  $f(x) < 0$ .

## الفصل الرابع

### المشتقة

**المزايادات :** إن التزايد  $\Delta x$  للمتغير  $x$  هو التغير الذي يطرأ على  $x$  عندما تزايد أو تناقص من قيمة ما مثل  $x = x_0$  إلى قيمة أخرى مثل  $x = x_1$  ضمن مدى  $x$ . وعلى هذا فإن  $\Delta x = x_1 - x_0$  وبالتالي يمكننا أن نكتب  $x_1 = x_0 + \Delta x$ . إذا أعطى المتغير  $x$  تزايداً  $\Delta x$  من  $x = x_0$  ( أى إذا تغيرت  $x$  من  $x = x_0$  إلى  $x = x_0 + \Delta x$  ) ونتج عن ذلك أن دالة  $y = f(x)$  حصلت على التزايد  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  من  $y = f(x_0)$  فإننا نسمى النسبة

$$\frac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

بمعدل متوسط التغير للدالة في الفترة بين  $x = x_0$  و  $x = x_0 + \Delta x$ .

**مثال ١ :**

إذا أعطينا المتغير  $x$  التزايد  $\Delta x = 0.5$  من  $x_0 = 1$  فإن التزايد الذي يطرأ على الدالة  $y = f(x) = x^2 + 2x$  هو  $\Delta y = f(1 + 0.5) - f(1) = 5.25 - 3 = 2.25$ . وعلى هذا فإن معدل متوسط التغير لـ  $y$  في الفترة بين  $x = 1$  و  $x = 1.5$  هو  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2.25}{0.5} = 4.5$ .

انظر المائلين ١ - ٢

نعرف مشتقة الدالة  $y = f(x)$  بالنسبة لـ  $x$  عند النقطة  $x = x_0$  على أنها

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

شرطية أن توجد النهاية. تسمى هذه النهاية أيضاً بمعدل التغير اللحظي ( أو بشكل أبسط ، معدل التغير ) في  $y$  بالنسبة لـ  $x$  عند  $x = x_0$ .

**مثال ٢ :**

أوجد مشتقة  $y = f(x) = x^2 + 3x$  بالنسبة لـ  $x$  عند  $x = x_0$  استخدم ذلك لحساب قيمة المشتقة عند ( أ )  $x_0 = 2$  ( ب )  $x_0 = -4$ .

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) = x_0^2 + 3x_0 \\ y_0 + \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x \\ \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2x_0\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2 \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0 + 3 + \Delta x \end{aligned}$$

وتكون المشتقة عند  $x = x_0$  هي

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + 3 + \Delta x) = 2x_0 + 3$$

(أ) وقيمة المشتقة عند  $x_0 = 2$  هي  $2 \cdot 2 + 3 = 7$ .

(ب) وقيمة المشتقة عند  $x_0 = -4$  هي  $2(-4) + 3 = -5$ .

وجرت العادة عند حساب المشتقات أن نسطح الدليل 0 ونحصل على مشتقة  $y = f(x)$  بالنسبة لـ  $x$  مثل

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

انظر الملاحظة التي على المسألة ٥ (ج) من الفصل الثاني.

ويمكن الإشارة إلى مشتقة  $y = f(x)$  بالنسبة لـ  $x$  بأحد الرموز التالية :

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \text{أو} \quad \frac{d}{dx} y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad D_x y, \quad y', \quad f'(x).$$

انظر المسائل ٣ - ٨

### مسائل محلولة

١- إذا كان  $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$  فأوجد  $\Delta y$  و  $\Delta y / \Delta x$  عندما تتغير  $x$  :

(أ) من  $x_0 = 1$  إلى  $x_1 = x_0 + \Delta x = 1.2$  (ب) من  $x_0 = 1$  إلى  $x_1 = 0.8$ .

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 1.2 - 1 = 0.2 \quad (أ)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.44}{0.2} = 7.2 \quad \text{وبالتالي} \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1.2) - f(1) = -0.56 - (-2) = 1.44$$

$$\Delta x = 0.8 - 1 = -0.2 \quad (ب)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1.36}{-0.2} = 6.8 \quad \text{وبالتالي} \quad \Delta y = f(0.8) - f(1) = -3.36 - (-2) = -1.36$$

ومن الناحية الهندسية فإن  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  تمثل في (أ) ميل القاطع القطع المكافئ  $y = x^2 + 5x - 8$  الذي يصل النقطتين

(1, -2) و (1.2, -0.56) وتمثل في (ب) ميل القاطع لنفس القطع والذي يصل النقطتين (0.8, -3.36) و (1, -2).

٢- إذا كانت  $s$  (m) تمثل المسافة التقريبية التي يقطعها جسم يسقط من السكون سقوطاً حراً بالأمتار خلال زمن قدره  $t$

(ثانية) وكانت  $s = 4.9t^2$  فأوجد  $\Delta s / \Delta t$  عندما تتغير  $t$  من  $t_0$  إلى  $t_0 + \Delta t$  استعمل ذلك لإيجاد  $\Delta s / \Delta t$  عندما

تتغير  $t$  :

(أ) من 3 إلى 3.5 ، (ب) 3 من 3.2 (ج) من 3 إلى 3.1 .

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4.9(t_0 + \Delta t)^2 - 4.9t_0^2}{\Delta t} = \frac{9.8t_0 \cdot \Delta t + 4.9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 9.8t_0 + 4.9\Delta t$$

$$\Delta s / \Delta t = 9.8(3) + 4.9(0.5) = 31.85 \text{ ms}^{-1} \quad (أ) \quad \text{هنا} \quad t_0 = 3, \Delta t = 0.5, \text{ وبالتالي}$$

$$\Delta s / \Delta t = 9.8(3) + 4.9(0.2) = 30.38 \text{ ms}^{-1} \quad (ب) \quad \text{هنا} \quad t_0 = 3, \Delta t = 0.2, \text{ وبالتالي}$$

(ج) هنا  $t_0 = 3, \Delta t = 0.1$ , وبالتالي  $\Delta s / \Delta t = 29.89 \text{ ms}^{-1}$

وبما أن  $\Delta s$  إزاحة الجسم من زمن قذره  $t = t_0$  إلى زمن قدرة  $t = t_0 + \Delta t$  فإن  $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{الإزاحة}}{\text{الزمن}}$  السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية.

٢- أوجد  $dy/dx$  إذا كان  $y = x^3 - x^2 - 4$  أوجد كذلك قيمة  $dy/dx$  عندما (أ)  $x = 4$  ، (ب)  $x = 0$  ، (ج)  $x = -1$ .

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x)^2 - 4$$

$$= x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^2 - 2x(\Delta x) - (\Delta x)^2 - 4 \quad (١)$$

$$\Delta y = (3x^2 - 2x) \cdot \Delta x + (3x - 1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \quad (٢)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 2x + (3x - 1) \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \quad (٣)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{3x^2 - 2x + (3x - 1) \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\} = 3x^2 - 2x \quad (٤)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-1} = 3(-1)^2 - 2(-1) = 5 \quad (ج) \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 3(0)^2 - 2(0) = 0, \quad (ب) \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=4} = 3(4)^2 - 2(4) = 40 \quad (أ)$$

٤- أوجد مشتقة  $y = x^2 + 3x + 5$ .

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 5 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 5 \quad (١)$$

$$\Delta y = (2x + 3)\Delta x + \Delta x^2 \quad (٢)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x + 3)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + 3 + \Delta x \quad (٣)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + 3 + \Delta x) = 2x + 3 \quad (٤)$$

٥- أوجد مشتقة  $y = \frac{1}{x-2}$  عند  $x = 1$  و  $x = 3$  بين أن المشتقة غير موجود عند  $x = 2$  حيث تكون الدالة غير مستمرة.

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2} \quad (١)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2} - \frac{1}{x - 2} = \frac{(x - 2) - (x + \Delta x - 2)}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} = \frac{-\Delta x}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} \quad (٢)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} \quad (٣)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} = \frac{-1}{(x - 2)^2} \quad (٤)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(3 - 2)^2} = -1, \quad \text{عند } x = 3 \text{ يكون } \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1 - 2)^2} = -1, \quad \text{عند } x = 1 \text{ يكون}$$

أما عند  $x = 2$  فإن  $\frac{dy}{dx}$  غير موجود لانظام المقام.

٦- أوجد مشتقة  $f(x) = \frac{2x-3}{3x+4}$ . افحص المشتقة عند  $x = -4/3$  حيث تكون الدالة غير مستمرة.



$$f(x + \Delta x) = \frac{2(x + \Delta x) - 3}{3(x + \Delta x) + 4} \quad (١)$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{2x + 2\Delta x - 3}{3x + 3\Delta x + 4} - \frac{2x - 3}{3x + 4} \quad (٢)$$

$$= \frac{(3x + 4)[(2x - 3) + 2\Delta x] - (2x - 3)[(3x + 4) + 3\Delta x]}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)}$$

$$= \frac{(6x + 8 - 6x + 9)\Delta x}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)} = \frac{17\Delta x}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)}$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{17}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)} \quad (٣)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{17}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)} = \frac{17}{(3x + 4)^2} \quad (٤)$$

وعند النقطة  $x = -4/3$  لا توجد مشتقة لان مقام المقام . وعموما فإنه لا توجد مشتقة للدالة عند نقطة انقطاعها .

٧- أوجد مشتقة  $y = \sqrt{2x + 1}$  .

$$y + \Delta y = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} \quad (١)$$

$$\Delta y = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} - (2x + 1)^{1/2} \quad (٢)$$

$$= [(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} - (2x + 1)^{1/2}] \frac{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}}$$

$$= \frac{(2x + 2\Delta x + 1) - (2x + 1)}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}} = \frac{2\Delta x}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}} \quad (٣)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x + 1)^{1/2}} = \frac{1}{(2x + 1)^{1/2}} \quad (٤)$$

ونلاحظ بالنسبة للدالة  $f(x) = \sqrt{2x + 1}$  أن  $f(-\frac{1}{2}) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x)$  بينما  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x)$  غير موجودة ،

فالدالة مسطرة من اليمين عند  $x = -\frac{1}{2}$  والمشتقة عند  $x = -\frac{1}{2}$  لا نهائية .

٨- أوجد مشتقة  $f(x) = x^{1/3}$  افسر  $f'(0)$  .

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^{1/3} \quad (١)$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3} \quad (٢)$$

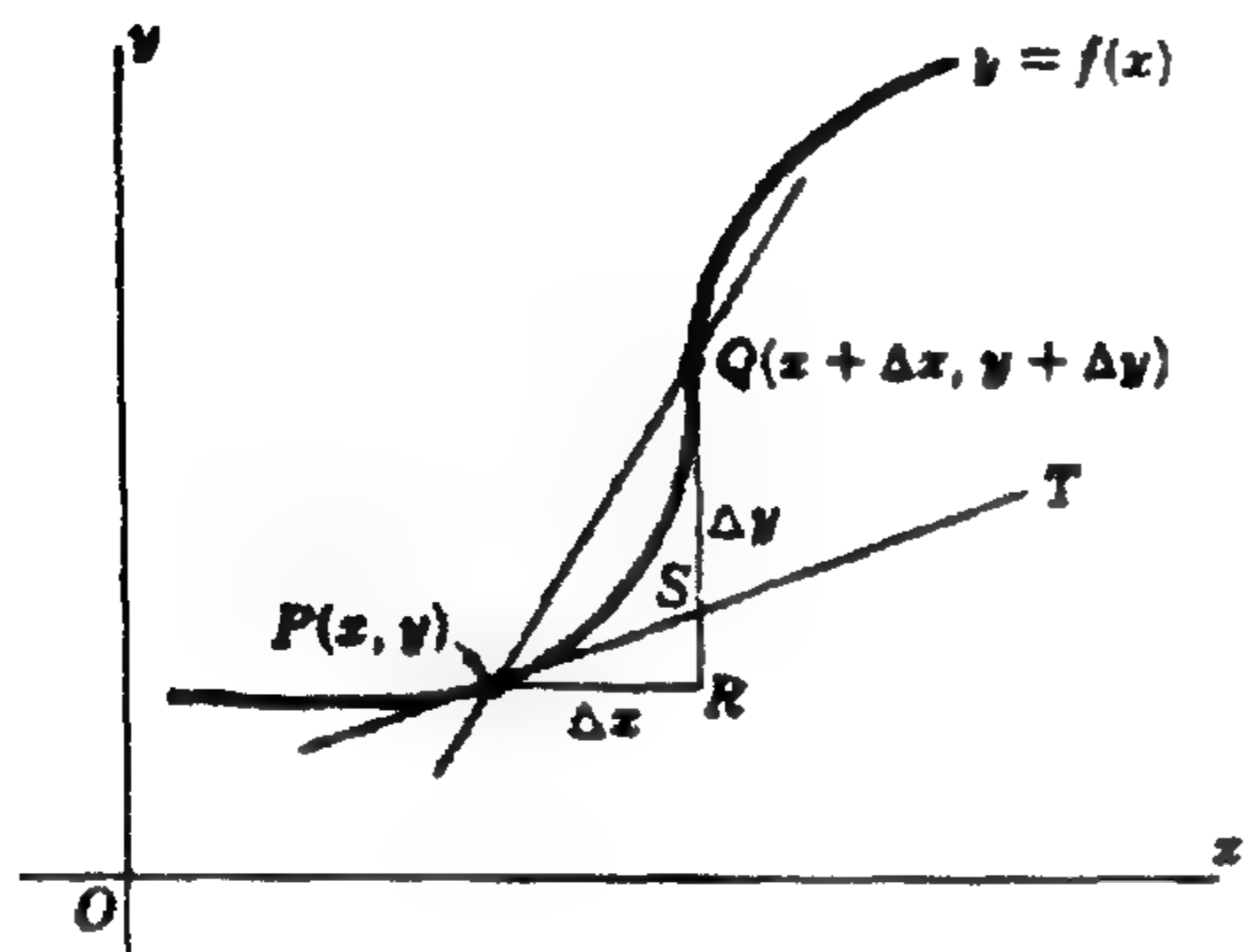
$$= \frac{[(x + \Delta x)^{1/3} - x^{1/3}][(x + \Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x + \Delta x)^{1/3} + x^{2/3}]}{(x + \Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x + \Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

$$= \frac{x + \Delta x - x}{(x + \Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x + \Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{(x + \Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x + \Delta x)^{1/3} + x^{2/3}} \quad (٣)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(x + \Delta x)^{3/2} + x^{3/2}(x + \Delta x)^{1/2} + x^{3/2}} = \frac{1}{3x^{5/2}} \quad (1)$$

والمشتقة غير موجودة عند  $x = 0$  لانعدام المقام. ومن الملاحظ أن الدالة مستمرة عند  $x = 0$  هنا بالإضافة إلى الملاحظة التي مرت في نهاية المسألة ٧ يتضح لنا أنه : إذا وجدت مشتقة دالة عند نقطة  $x = a$  فالدالة مستمرة عند هذه النقطة وليس العكس.



شكل ١ - ١

٩ - ضر  $dy/dx$  تنسباً .

نرى من الشكل ١ - ١ أن  $\Delta y / \Delta x$  تمثل ميل القاطع الذي يصل نقطة اختيارية ثابتة مثل  $P(x, y)$  على المنحنى بنقطة مجاورة  $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$  قريبة منها على نفس المنحنى. وعندما  $\Delta x \rightarrow 0$  تقل  $P$  ثابتة في حين تتحرك  $Q$  على متجهة نحو  $P$  ويدور بذلك المستقيم  $PQ$  حول  $P$  في اتجاه موضع نهائي وهو المماس  $PT$  للمنحنى عند  $P$ . وعلى هذا نجد أن  $dy/dx$  هو ميل المماس عند  $P$  للمنحنى  $y = f(x)$ .

وعلى سبيل المثال نرى من المسألة ٢ أن ميل المنحنى المكعب  $y = x^3 - x^2 - 4$  عند النقطة  $x = 4$  هو  $m = 40$  وعند النقطة  $x = 0$  هو  $m = 0$  وعند النقطة  $x = -1$  هو  $m = 5$ .

١٠ - أوجد  $ds/dt$  لدالة المسألة (٧) وضر النتيجة.

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (9.8t_0 + 4.9\Delta t) = 9.8t_0 \quad \text{و} \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = 9.8t_0 + 4.9\Delta t$$

وعندما  $\Delta t \rightarrow 0$  فإن  $\Delta s / \Delta t$  تعطي السرعة المتوسطة لجسم في فترة زمنية أقصر وأقصر  $\Delta t$ .

وتعرف  $ds/dt$  على أنها السرعة اللحظية  $v$  لجسم عند زمن  $t = t_0$ . فعلى سبيل المثال يكون  $v = 9.8(3) = 29.4 \text{ ms}^{-1}$  عندما  $t = 3$ .

١١ - إذا كان  $f(x) = |x|$  فأوجد  $f'(x)$

الدالة مستمرة لجميع قيم  $x$  ، وعند  $x < 0$  فإن  $f(x) = -x$  و  $f'(x) = -1$  أما عند  $x > 0$  فإن  $f(x) = x$  و  $f'(x) = 1$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \quad \text{و} \quad f(x) = 0 \quad \text{فإن} \quad x = 0$$

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \rightarrow 1 \quad \text{عندما} \quad \Delta x \rightarrow 0^+ \quad \text{في حين عندما} \quad \Delta x \rightarrow 0^- \quad \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \rightarrow -1$$

وبالتالي فإن المشتقة غير موجودة عند  $x = 0$ .

١٢ - احسب  $\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx}$  لدالة (١) في المسألة ٢ و (ب) في المسألة ٩ حتى أن  $\epsilon \rightarrow 0$  عندما  $\Delta x \rightarrow 0$ .

$$\epsilon = (3x^2 - 2x + (3x - 1)\Delta x + (\Delta x)^2) - (3x^2 - 2x) = (3x - 1 + \Delta x)\Delta x. \quad (1)$$

$$= \frac{-1}{(x-2)(x+\Delta x-2)} - \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{-(x-2) + (x+\Delta x-2)}{(x-2)^2(x+\Delta x-2)} = \frac{1}{(x-2)^2(x+\Delta x-2)} \Delta x \quad (ب)$$

$$١٢ - \text{فسر هندسياً } \Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \Delta x \text{ للمألة ١٢}$$

من الشكل في المسألة ٩ نجد أن  $\Delta y = RQ$  و  $\frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = PR \cdot \tan \angle TPR = RS$  إذن  $\frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = SQ$  والتغير  $\Delta x$  في  $x$  من  $P(x, y)$  يتناوبه تغير  $\Delta y$  في  $y$  على المنحنى بينما يكون  $\frac{dy}{dx} \Delta x$  التغير المقابل في  $y$  على المستقيم المماس  $PT$  وبما أن الفرق  $\epsilon \cdot \Delta x = (\dots) (\Delta x)^2 \rightarrow 0$  أسرع من  $\Delta x$  فإننا نستخدم  $\frac{dy}{dx} \cdot \Delta x$  الوارد في الفصل ٢٢ كتقريب لـ  $\Delta y$  عندما يكون  $|\Delta x|$  صغيراً .

### مسائل إضافية

١٤ - أوجد  $\Delta y$  و  $\Delta y / \Delta x$  إذا كان :

(أ)  $y = 2x - 3$  و  $x$  تتغير من 3.3 إلى 3.5 .

(ب)  $y = x^2 + 4x$  و  $x$  تتغير من 0.7 إلى 0.85 .

(ج)  $y = 2/x$  و  $x$  تتغير من 0.75 إلى 0.5 .

ج : (أ) 0.4; 2 (ب) 0.8325; 5.55 (ج)  $4/3; -16/3$

١٥ - أوجد  $\Delta y$  إذا كان  $x = 5$ ,  $y = x^3 - 3x + 5$  و  $\Delta x = -0.01$  . ماذا ستكون قيمة  $y$  عندما  $x = 4.99$  ؟

ج :  $y = 14.9301$ ;  $\Delta y = -0.0699$

١٦ - أوجد السرعة المتوسطة عندما :

(أ)  $s = (3t^2 + 5)$  m و  $t$  تتغير من 2s إلى 3s .

(ب)  $s = (2t^2 + 5t - 3)$  m و  $t$  تتغير من 2s إلى 5s .

ج : (أ)  $15 \text{ ms}^{-1}$  (ب)  $19 \text{ ms}^{-1}$

١٧ - أوجد الزيادة في حجم بالون كروي عندما يزداد نصف قطره (أ) من  $r$  إلى  $r + \Delta r$

(ب) من 5 إلى 8 cm

ج . (أ)  $\frac{4\pi}{3} (3r^2 + 3r \cdot \Delta r + \Delta r^2) \cdot \Delta r \text{ cm}^3$  (ب)  $\frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$

١٨ - أوجد مشتقة كل من التالي :

(أ)  $y = 4x - 3$  (ب)  $y = 1/x^3$  (ج)  $y = \sqrt{x}$  (د)  $y = \sqrt{1+2x}$

(أ)  $y = 4 - 3x$  (ب)  $y = (2x-1)/(2x+1)$  (ج)  $y = 1/\sqrt{x}$  (د)  $y = 1/\sqrt{2+x}$

(أ)  $y = x^2 + 2x - 3$  (ب)  $y = (1+2x)/(1-2x)$  (ج)  $y = (1+2x)^{1/2}$  (د)  $y = (1-2x)^{1/2}$

ج : (أ)  $\frac{4}{(2x+1)^3}$  (ب)  $-\frac{4}{x^4}$  (ج)  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  (د)  $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$

(أ)  $\frac{2(x+1)}{-2/x^3}$  (ب)  $\frac{4}{(1-2x)^2}$  (ج)  $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$  (د)  $-\frac{1}{2(2+x)^{3/2}}$

١٩- أوجد ميل المنحنيات التالية عند النقطة  $x = 1$  :

(١)  $y = 8 - 5x^2$  (ب)  $y = \frac{4}{x+1}$  (ج)  $y = \frac{2}{x+3}$  (د)

ج : (١)  $-10$  (ب)  $-1$  (ج)  $-1/8$

٢٠- أوجد إحداثيات رأس القطع المكافئ  $y = x^2 - 4x + 1$  مستقيماً من كون ميل المماس عند الرأس مسلوهاً للصفر .

ج :  $V(2, -3)$

٢١- أوجد ميل مماسات القطع المكافئ  $y = -x^2 + 5x - 6$  عند نقط تقاطعه مع المحور السيني .

ج :  $m = 1$  عند  $x = 2$  و  $m = -1$  عند  $x = 3$

٢٢- إذا كانت  $s$  مقاسة بالأمتار (m) و  $t$  بالثواني (s) فأوجد سرعة الحركات التالية عند الزمن  $t = 2$  .

(١)  $s = t^2 + 3t$  (ب)  $s = t^3 - 3t^2$  (ج)  $s = \sqrt{t+2}$

ج : (أ)  $7 \text{ ms}^{-1}$  (ب)  $0 \text{ ms}^{-1}$  (ج)  $\frac{1}{4} \text{ ms}^{-1}$

٢٣- بين أن معدل التغير الحظي لحجم مكعب بالنسبة لضلعه  $x(\text{cm})$  هو  $75 \text{ cm}^3$  لكل  $\text{cm}$  وذلك عندما تكون  $x = 5 \text{ cm}$  .



# الفصل الخامس

## مشتقات الدوال الجبرية

نقول عن دالة إنها قابلة للاشتقاق عند  $x = x_0$  إذا كان لها مشتقة هناك . ونقول عن دالة إنها قابلة للاشتقاق في فترة ما إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقط هذه الفترة .

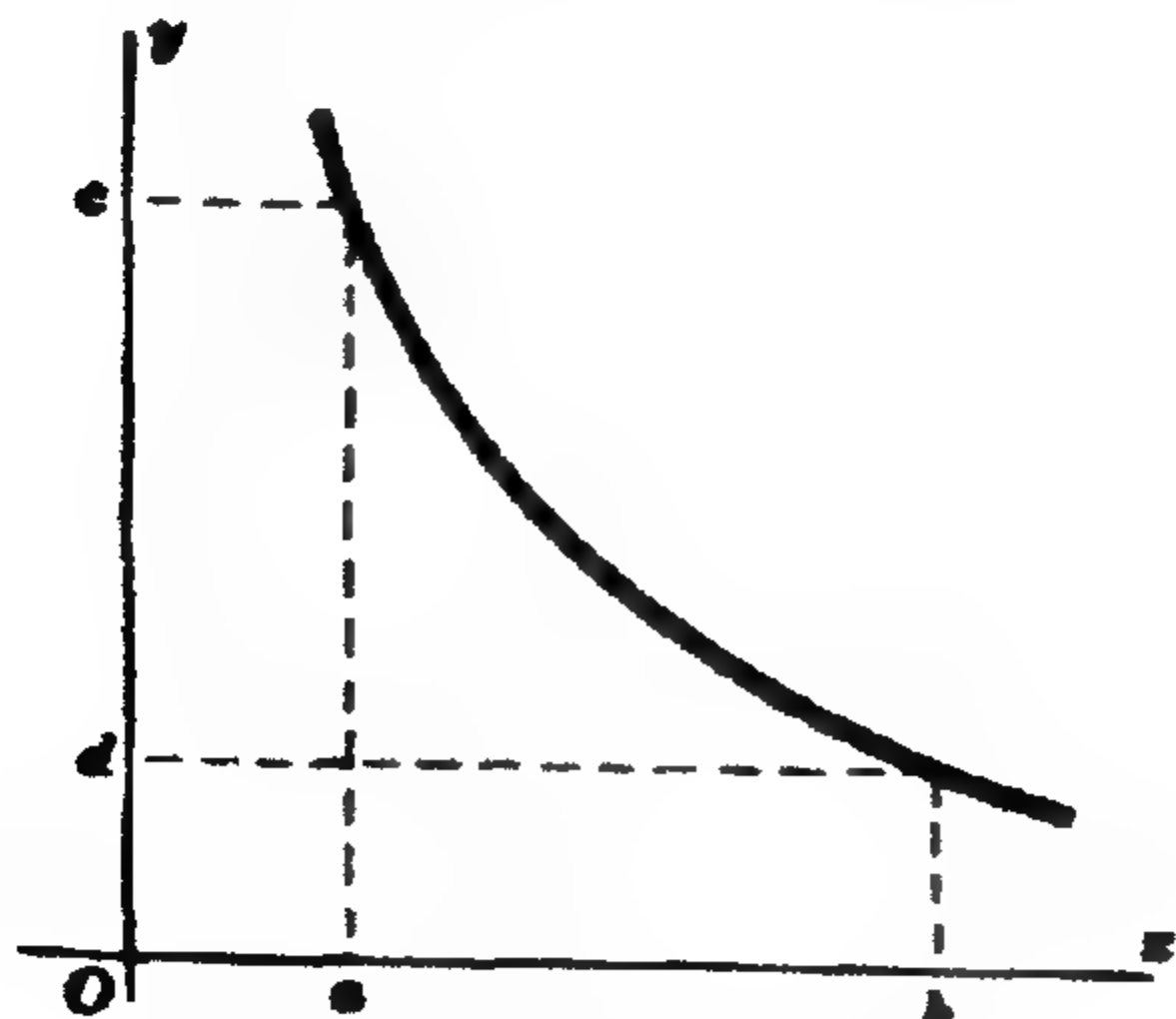
إن دوال حساب التفاضل والتكامل الابتدائية قابلة للاشتقاق في فترات تعريفها باستثناء على الأكثر ، بعض النقط المنزلة في هذه الفترات .

**صيغ الاشتقاق :** نعتبر الدوال  $u, v, w$  في المصغ التالية قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ  $x$  :

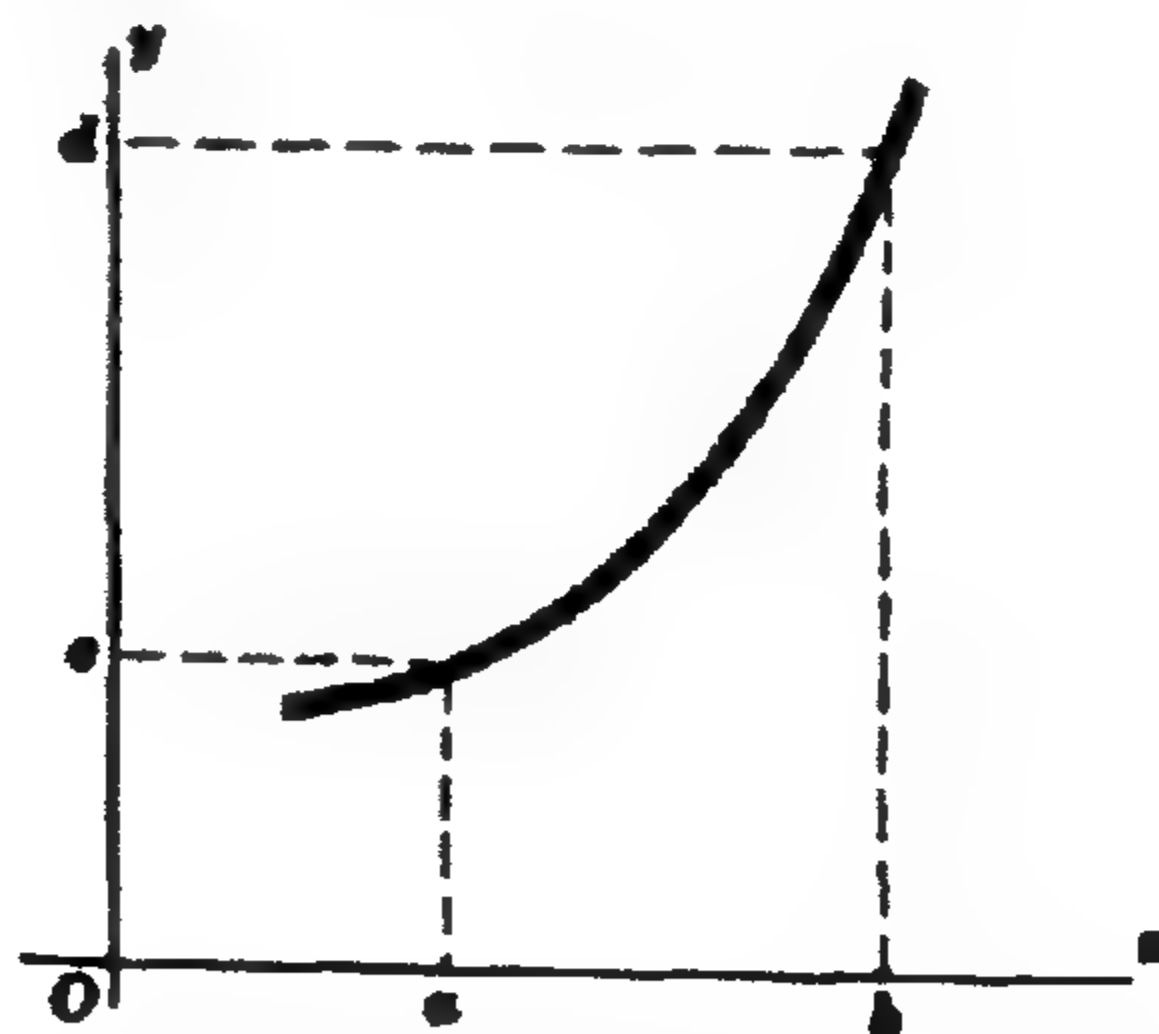
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(c) &= 0, -1 & \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) &= \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dx}(u), c \neq 0 - 7 \\ \frac{d}{dx}(x) &= 1 - 2 & \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right) &= c \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{c}{u^2} \cdot \frac{d}{dx}(u), u \neq 0 - 8 \\ \frac{d}{dx}(u+v+\dots) &= \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) + \dots - 3 & \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v \frac{d}{dx}(u) - u \frac{d}{dx}(v)}{v^2}, v \neq 0 - 9 \\ \frac{d}{dx}(cu) &= c \frac{d}{dx}(u) - 4 & \frac{d}{dx}(x^n) &= nx^{n-1} - 10 \\ \frac{d}{dx}(uv) &= u \frac{d}{dx}(v) + v \frac{d}{dx}(u) - 5 & \frac{d}{dx}(u^n) &= nu^{n-1} \frac{d}{dx}(u) - 11 \\ \frac{d}{dx}(uvw) &= uv \frac{d}{dx}(w) + uw \frac{d}{dx}(v) + vw \frac{d}{dx}(u) - 6 \end{aligned}$$

أنظر المسائل ١ - ١٣

**الدوال العكسية :** لتكن الدالة  $y = f(x)$  قابلة للاشتقاق في الفترة  $a \leq x \leq b$  ولنفرض أن  $dy/dx$  لا يغير إشارته في هذه الفترة . عندئذ يحدد من الشكلين ١ - (أ) و ١ - (ب) أن الدالة تأخذ قيمة واحدة وقيمة فقط بين  $f(a) = c$  و  $f(b) = d$  وحل هذا فكل قيمة لـ  $y$  تقابلها الفترة الممثلة قيمة لـ  $x$  وقيمة واحدة فقط وبالتالي فإن  $x$  دالة لـ  $y$  ولتكن  $x = g(y)$  والدالتين  $y = f(x)$  ،  $x = g(y)$  تسمى بالدوال العكسية .



شكل ١ - (ب)



شكل ١ - (أ)

### مثال ١ :

- (١)  $y = f(x) = 3x + 2$  و  $x = g(y) = 1/3(y - 2)$  دالتان عكسيتان .  
 (ب) إن الدالتين  $y = x^2 - 4x + 3$  و  $x = 2 - \sqrt{y+1}$  عكسيتان عندما  $x \leq 2$  و  $y \geq -1$   
 والدالتين  $y = x^2 - 4x + 3$  و  $x = 2 + \sqrt{y+1}$  عكسيتان عندما  $x \geq 2$  و  $y \geq -1$  .  
 لإيجاد  $dy/dx$  عندما يعطى  $x = g(y)$  :

(١) حل المعادلة بالنسبة لـ  $y$  ، إذا كان ذلك ممكناً ، ثم اشتق بالنسبة لـ  $x$  أو

(ب) اشتق  $x = g(y)$  بالنسبة لـ  $y$  ثم نستخدم العلاقة ١٢

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad - ١٢$$

### مثال ٢ :

- أوجد  $dy/dx$  إذا كان  $x = \sqrt{y+5}$  .  
 باستخدام (١) نجد أن  $y = (x-5)^2$  و  $dy/dx = 2(x-5)$  .  
 باستخدام (ب)  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2(x-5)}$  ، وبالتالي  $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} = 2(x-5)$  .  
 أنظر المسائل ١٤ - ١٥

### اشتقاق دالة الدالة :

إذا كان  $y = f(u)$  و  $u = g(x)$  فنحن نريد أن يكون  $y = f\{g(x)\}$  دالة لـ  $x$  وإذا كانت  $y$  دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ  $u$  و  $u$  كانت دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ  $x$  فإن  $y = f\{g(x)\}$  تكون دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ  $x$  ويمكن الحصول على المشتقة  $dy/dx$  باتباع إحدى الطريقتين التاليتين :

(١) عبر عن  $y$  صريحة في  $x$  ثم اشتق .

### مثال ٣

- إذا كانت  $y = u^2 + 3$  و  $u = 2x + 1$  فنحن نريد  $y = (2x + 1)^2 + 3$  و  $dy/dx = 8x + 4$  .  
 (ب) اشتق كلا من الدالتين بالنسبة للمتغير المستقل واستخدم العلاقة التالية (قاعدة السلسلة) .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad - ١٣$$

### مثال ٤ :

- إذا كان  $y = u^2 + 3$  و  $u = 2x + 1$  فإن  $\frac{du}{dx} = 2$  ،  $\frac{dy}{du} = 2u$  ، ومنه  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u = 8x + 4$  .  
 أنظر المسائل ١٦ - ٢٠

### المشتقات العليا :

تكن  $y = f(x)$  دالة قابلة للاشتقاق لـ  $x$  ولنفرض أن مشتقتها تسمى المشتقة الأولى للدالة . فإذا كانت المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق فإن مشتقتها تسمى المشتقة الثانية للدالة (الأصلية) ونرمز لها بإحدى الرموز التالية

$\frac{d^2 y}{dx^2}$  ،  $y''$  ،  $f''(x)$  وبالتالي فإن مشتقة المشتقة الثانية تسمى المشتقة الثالثة للدالة ونرمز لها بإحدى الرموز التالية .

$$\frac{d^3 y}{dx^3} , y''' , f'''(x)$$

**ملاحظة :** لا توجد مشتقة من رتبة معينة عند نقطة ما لم تكن الدالة وجميع مشتقاتها الأدنى في الرتبة قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة .

أنظر المسائل ٢١ - ٢٢

### مسائل محلولة

١- أثبت أن : (أ)  $\frac{d}{dx}(c) = 0$  حيث  $c$  أى ثابت (ب)  $\frac{d}{dx}(x) = 1$  (ج)  $\frac{d}{dx}(cx) = c$

حيث  $c$  أى ثابت (د)  $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$  عندما يكون  $n$  عددا صحيحا موجبا .

$$\text{بما أن } \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ فإن}$$

$$\frac{d}{dx}(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad (أ)$$

$$\frac{d}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1 \quad (ب)$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c(x+\Delta x) - cx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c = c \quad (ج)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left\{ x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n \right\} - x^n}{\Delta x} \quad (د)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right\} = nx^{n-1}$$

٢ - إذا كانت  $u$  و  $v$  دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة لـ  $x$  فأثبت أن (أ)  $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{d}{dx}(u) - u \cdot \frac{d}{dx}(v)}{v^2}, \quad v \neq 0 \quad (ج) \quad \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{d}{dx}(v) + v \cdot \frac{d}{dx}(u) \quad (ب)$$

(أ) لنفرض أن  $f(x) = u + v = u(x) + v(x)$ ؛ إذن :

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

وبأخذ النهاية عندما  $\Delta x \rightarrow 0$  نجد أن  $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}u(x) + \frac{d}{dx}v(x) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$ .

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} \quad \text{إذن } f(x) = u \cdot v = u(x) \cdot v(x); \quad (ب) \text{ لنفرض أنه}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - v(x) \cdot u(x+\Delta x)] + [v(x) \cdot u(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)]}{\Delta x}$$

$$= u(x+\Delta x) \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x) \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u(x) \frac{d}{dx}v(x) + v(x) \frac{d}{dx}u(x) = u \frac{d}{dx}(v) + v \frac{d}{dx}(u) \quad \text{ومن ثم}$$

$$(ج) \text{ لنفرض أن } f(x) = \frac{u}{v} = \frac{u(x)}{v(x)}; \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{\Delta x \{v(x) \cdot v(x + \Delta x)\}} \\
 &= \frac{[u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)] - [u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)]}{\Delta x \{v(x) \cdot v(x + \Delta x)\}} \\
 &= \frac{v(x) \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - u(x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x) \cdot v(x + \Delta x)} \\
 \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v(x) \frac{d}{dx} u(x) - u(x) \frac{d}{dx} v(x)}{\{v(x)\}^2} = \frac{v \frac{d}{dx} (u) - u \frac{d}{dx} (v)}{v^2} . \text{ ومنه }
 \end{aligned}$$

اشتق كلا من الدوال التالية :

$$y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5 - 7$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 2(1) - 3(2x) - 5(3x^2) - 8(4x^3) + 9(5x^4) = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 45x^4$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3} - 8$$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} + 3(-2x^{-3}) + 2(-3x^{-4}) = -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

$$y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{1/4} - 8$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + 6\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) - 2\left(\frac{3}{4}x^{-3/4}\right) = x^{-1/2} + 2x^{-2/3} - 3x^{1/4} = \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{2}{x^{2/3}} - 3x^{1/4}$$

$$y = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{6}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{3/4}} - \frac{4}{x^{3/4}} = 2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} - 2x^{-3/4} - 4x^{-3/4} - 9$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= 2\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) + 6\left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}\right) - 2\left(-\frac{3}{4}x^{-7/4}\right) - 4\left(-\frac{3}{4}x^{-7/4}\right) \\
 &= -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} + 3x^{-3/4} + 3x^{-7/4} = -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{3/4}} + \frac{3}{x^{7/4}}
 \end{aligned}$$

$$y = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}} = (3x^2)^{1/3} - (5x)^{-1/2} - 9$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(3x^2)^{-2/3} \cdot 6x - \left(-\frac{1}{2}\right)(5x)^{-3/2} \cdot 5 = \frac{2x}{(9x^4)^{1/3}} + \frac{5}{2(5x)(5x)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}} + \frac{1}{2x\sqrt{5x}}$$

$$z = (t^2 - 3)^2 - 8$$

$$\frac{dz}{dt} = 4(t^2 - 3)^2 (2t) = 8t(t^2 - 3)^2$$

$$z = \frac{8}{(a^2 - y^2)^2} = 8(a^2 - y^2)^{-2} - 9$$

$$\frac{dz}{dy} = 8(-2)(a^2 - y^2)^{-3} \cdot \frac{d}{dy} (a^2 - y^2) = 8(-2)(a^2 - y^2)^{-3} (-2y) = \frac{12y}{(a^2 - y^2)^3}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3} = (x^2 + 6x + 3)^{1/2} - 10$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 6x + 3)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 6x + 3) = \frac{1}{2} (x^2 + 6x + 3)^{-1/2} (2x + 6) = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 3}}$$

$$y = (x^2 + 4)^2 (2x^3 - 1)^3 - 11$$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + 4)^2 \cdot \frac{d}{dx} (2x^3 - 1)^3 + (2x^3 - 1)^3 \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 4)^2 \\ &= (x^2 + 4)^2 \cdot 3(2x^3 - 1)^2 \cdot \frac{d}{dx} (2x^3 - 1) + (2x^3 - 1)^3 \cdot 2(x^2 + 4) \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 4) \\ &= (x^2 + 4)^2 \cdot 3(2x^3 - 1)^2 \cdot 6x^2 + (2x^3 - 1)^3 \cdot 2(x^2 + 4) \cdot 2x = 2x(x^2 + 4)(2x^3 - 1)^3 (13x^2 + 36x - 2) \end{aligned}$$

$$y = \frac{3 - 2x}{3 + 2x} - 12$$

$$y' = \frac{(3 + 2x) \cdot \frac{d}{dx} (3 - 2x) - (3 - 2x) \cdot \frac{d}{dx} (3 + 2x)}{(3 + 2x)^2} = \frac{(3 + 2x)(-2) - (3 - 2x)(2)}{(3 + 2x)^2} = \frac{-12}{(3 + 2x)^2}$$

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{x^2}{(4 - x^2)^{1/2}} - 12$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(4 - x^2)^{1/2} \cdot \frac{d}{dx} (x^2) - x^2 \cdot \frac{d}{dx} (4 - x^2)^{1/2}}{4 - x^2} = \frac{(4 - x^2)^{1/2} (2x) - x^2 \cdot \frac{1}{2} (4 - x^2)^{-1/2} (-2x)}{4 - x^2} \\ &= \frac{(4 - x^2)^{1/2} (2x) + x^2 (4 - x^2)^{-1/2}}{4 - x^2} \cdot \frac{(4 - x^2)^{1/2}}{(4 - x^2)^{1/2}} = \frac{2x(4 - x^2) + x^2}{(4 - x^2)^{3/2}} = \frac{8x - x^3}{(4 - x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$14 - \text{إذا كان } x = y\sqrt{1 - y^2} \text{ فاجد } dy/dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{1 - 2y^2} \quad \text{و} \quad \frac{dx}{dy} = (1 - y^2)^{1/2} + \frac{1}{2} y (1 - y^2)^{-1/2} (-2y) = \frac{1 - 2y^2}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$15 - \text{أوجد ميل المنحنى } x = y^2 - 4y \text{ عند نقط تقاطعه مع المحور } y$$

$$\text{إن نقطي التقاطع هما النقطتان } (0, 4) \text{ و } (0, 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{2y - 4} \quad \text{و} \quad \frac{dx}{dy} = 2y - 4$$

$$\text{والميل عند النقطة } (0, 0) \text{ هو } -1/4 \text{ عند النقطة } (0, 4) \text{ يكون الميل } 1/4$$

### قاعدة السلسلة :

$$16 - \text{استنتج قاعدة السلسلة} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ليكن  $\Delta y$  ,  $\Delta u$  التزايدين اللذين يطرآن على  $y$  و  $u$  على التوالي عندما نطلي  $x$  تزايداً مقداره  $\Delta x$  فإذا فرضنا الآن أن  $\Delta u \neq 0$  فإن

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\text{وبفرض } \Delta u \neq 0 \text{ عندما } \Delta x \rightarrow 0 \text{ نجد أن } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ وهو المطلوب .}$$

يتمتع التقيد الذي فرضناه على  $\Delta u$  عموماً إذا انصرفت  $|\Delta x|$  على قيم صغيرة بغير كاف . أما إذا كان هذا الأمر مستحيلاً فنعلم يمكن برهان قاعدة السلسلة على النحو التالي :



نضع  $\Delta y = \frac{dy}{du} \Delta u + \epsilon \cdot \Delta u$  حيث  $\epsilon \rightarrow 0$  عندما  $\Delta x \rightarrow 0$   
(أنظر المسألة ١٢ من الفصل الرابع)

عندئذ يكون

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \epsilon \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

وبأخذ النهاية عندما  $\Delta x \rightarrow 0$  نجد أن  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$  كما سبق .

١٧- أوجد  $dy/dx$  بفرض أن  $y = \frac{u^3-1}{u^2+1}$  و  $u = \sqrt{x^2+2}$

أن  $\frac{du}{dx} = \frac{2x}{2(x^2+2)^{1/2}} = \frac{x}{(x^2+2)^{1/2}}$  و  $\frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}$

وبالتالي  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \cdot \frac{x}{(x^2+2)^{1/2}} = \frac{8x}{3u(u^2+1)^2}$

١٨- تتحرك نقطة على المنحنى  $y = x^3 - 3x + 5$  بحيث تكون  $x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$  حيث  $t$  هو الزمن . بأى معدل تتغير  $y$  عندما تكون  $t = 4$  ؟  
ينبغي أن نجد قيمة  $dy/dt$  عندما  $t = 4$  .

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 1), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{3(x^2 - 1)}{4\sqrt{t}}$$

وعندما  $t = 4$  تكون  $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} + 3 = 4$  و  $\frac{dy}{dt} = \frac{3(16-1)}{4 \cdot 2} = \frac{45}{8}$  أى  $45/8$  وحدة في كل وحدة زمن .

١٩- تتحرك نقطة على المستوى وفق القانون  $x = t^3 + 2t$ ,  $y = 2t^3 - 6t$ . أوجد  $dy/dx$  عندما  $t = 0, 2, 5$  .  
بما أنه يمكن حل العلاقة الأولى بالنسبة لـ  $t$  والتعويض بالنتيجة عن  $t$  في العلاقة الثانية فإنه يتضح أن  $y$  دالة لـ  $x$  .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 6(t^2 - 1) \cdot \frac{1}{2(t+2)} = 3(t-1) \cdot \frac{1}{t+2}$$

و  $\frac{dy}{dt} = 6t^2 - 6$ ,  $\frac{dx}{dt} = 2t + 2$ ,  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t+2}$

والقيمة المطلوبة لـ  $dy/dx$  هي  $-3$  عندما  $t = 0$  و  $3$  عندما  $t = 2$  و  $12$  عندما  $t = 5$  .

٢٠- إذا كان  $y = x^2 - 4x$  و  $x = \sqrt{2t^2 + 1}$  فأوجد  $dy/dt$  عندما  $t = \sqrt{2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-2), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{(2t^2+1)^{1/2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{4t(x-2)}{(2t^2+1)^{1/2}}$$

وعندما  $t = \sqrt{2}$  فإن  $x = \sqrt{5}$  و  $\frac{dy}{dt} = \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{2}}{5}(5-2\sqrt{5})$  .

٢١- بين أن لدالة  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 2$  مشتقات من جميع الرتب عندما  $x = a$

$$\begin{aligned} f'(a) &= 3a^2 + 6a - 8 & f'(x) &= 3x^2 + 6x - 8 \\ f''(a) &= 6a + 6 & f''(x) &= 6x + 6 \\ f'''(a) &= 6 & f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

و جميع المشتقات ذات الرتب الأعلى تساوي صفر .

٢٢- ابحث في المشتقات المتتالية لـ  $f(x) = x^{1/3}$  عندما  $x = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

و  $f'(0) = 0$

$$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-5/3}$$

و  $f''(0)$  غير موجودة .

ومكثا فالمشتقة الأولى موجودة عندما  $x = 0$  دون سواها من المشتقات ذات الرتبة الأعلى .

$$f^{(n)}(x). \quad \text{نأوجد} \quad f(x) = \frac{2}{1-x} = 2(1-x)^{-1}, \quad \text{٢٢- إذا فرضنا}$$

$$f'(x) = 2(-1)(1-x)^{-2}(-1) = 2(1-x)^{-2} = 2 \cdot 1! (1-x)^{-2} \quad \text{نجد}$$

$$f''(x) = 2(1!)(-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2 \cdot 2! (1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 2(2!)(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 2 \cdot 3! (1-x)^{-4}$$

$$f^{(n)}(x) = 2 \cdot n! (1-x)^{-(n+1)}, \quad \text{وهذا يوضح لنا أن}$$

$$f^{(k)}(x) = 2 \cdot k! (1-x)^{-(k+1)}, \quad \text{ولبرهان ذلك يمكن الرجوع إلى الاستقراء الرياضي وثبت أنه إذا كان}$$

$$f^{(k+1)}(x) = -2 \cdot k! (k+1)(1-x)^{-(k+2)}(-1) = 2 \cdot (k+1)! (1-x)^{-(k+2)} \quad \text{فإن}$$

### مسائل إضافية

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^n} \right) \quad \text{٢٤- برهن الصيغة ١٠ بفرض} \quad m = -1/n \quad \text{حيث} \quad n \quad \text{عدد صحيح موجب مستخدما الصيغة ٩ لحساب}$$

( أنظر المسألة ٤ من الفصل السادس لحالة  $m = p/q$  حيث  $p$  و  $q$  عدنان صحيحان ) .

أوجد المشتقة في كل من المسائل ٢٥ - ٤٢ .

$$y = x^3 + 5x^2 - 10x^2 + 6 \quad \text{ج} \quad \frac{dy}{dx} = 5x(x^3 + 4x^2 - 4) \quad \text{٢٥-}$$

$$y = 3x^{1/3} - x^{2/3} + 2x^{-1/3} \quad \text{ج} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{٢٦-}$$

$$y = \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-2} + 4x^{-1/2} \quad \text{ج} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^{3/2}} \quad \text{٢٧-}$$

$$y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x} \quad \text{ج} \quad y' = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}} \quad \text{٢٨-}$$

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{6}{\sqrt[3]{t}} \quad \text{ج} \quad f'(t) = -\frac{t^{1/2} + 2t^{1/3}}{t^2} \quad \text{٢٩-}$$

$$y = (1-5x)^2 \quad \text{ج} \quad y' = -30(1-5x)^2 \quad \text{٣٠-}$$

$$f(x) = (3x - x^2 + 1)^2 \quad \text{ج} \quad f'(x) = 12(1-x^2)(3x - x^2 + 1) \quad \text{٣١-}$$

$$y = (3 + 4x - x^2)^{1/3} \quad \text{ج} \quad y' = \frac{2-x}{y} \quad \text{٣٢-}$$

$$\theta = \frac{3r+2}{2r+3} \quad \text{ج} \quad \frac{d\theta}{dr} = \frac{6}{(2r+3)^2} \quad \text{٣٣-}$$

$$y = \left( \frac{x}{1+x} \right)^2 \quad \text{ج} \quad y' = \frac{5x^2}{(1+x)^3} \quad \text{٣٤-}$$

$$y = 2x^2\sqrt{2-x} \quad \text{ج} \quad y' = \frac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}} \quad \text{٣٥-}$$

$$f(x) = x\sqrt{3-2x^2} \quad \text{ج} \quad f'(x) = \frac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}} \quad \text{٣٦-}$$

$$y = (x-1)\sqrt{x^2-2x+2} \quad \text{ج} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}} \quad \text{٣٧-}$$

$$z = \sqrt{1-4w^2} \quad \text{ج} \quad \frac{dz}{dw} = \frac{1}{(1-4w^2)^{3/2}} \quad \text{٣٨-}$$

$$y = \sqrt{1+\sqrt{x}} \quad \text{ج} \quad y' = \frac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}} \quad \text{٣٩-}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} : \text{ج} & f(x) &= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - ٤٠ \\ y' &= 2x(x^2+3)^2(2x^2-5)^2(17x^2+27x-20) : \text{ج} & y &= (x^2+3)^4(2x^2-5)^3 - ٤١ \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{10t}{(8-t^2)^2} : \text{ج} & s &= \frac{t^2+2}{8-t^2} - ٤٢ \\ y' &= \frac{36x^2(x^2-1)^2}{(2x^2+1)^3} : \text{ج} & y &= \left(\frac{x^2-1}{2x^2+1}\right)^4 - ٤٣ \end{aligned}$$

٤٤ - احسب  $dy/dx$  بطريقتين مختلفتين وتحقق من عدم اختلاف النتائج :

$$x = 1/(2+y), \quad (ب) \quad x = (1+2y)^2, \quad (١)$$

استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد  $dy/dx$  في المسائل ٤٥ - ٤٨

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} : \text{ج} & y &= \frac{u-1}{u+1}, \quad u = \sqrt{x} - ٤٥ \\ \frac{dy}{dx} &= 6x^2(x+2)^2(x+1) : \text{ج} & y &= u^3+4, \quad u = x^2+2x - ٤٦ \\ & : \text{ج} : \text{أنظر المسألة ٣٩} & y &= \sqrt{1+u}, \quad u = \sqrt{x} - ٤٧ \end{aligned}$$

أنظر المسألة ٣٦

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} : \text{إرشاد} \quad y = \sqrt{u}, \quad u = v(3-2v), \quad v = x^2 - ٤٨$$

أوجد في كل من المسائل ٤٩ - ٥٢ المشتقة الميعة إلى جانب كل مسألة

$$\begin{aligned} y''' &= 72x : \text{ج} & y &= 3x^4 - 2x^2 + x - 5; \quad y''' - ٤٩ \\ y^{(iv)} &= \frac{105}{16x^{3/2}} : \text{ج} & y &= 1/\sqrt{x}; \quad y^{(iv)} - ٥٠ \\ f''(x) &= \frac{-6}{(2-3x^2)^{3/2}} : \text{ج} & f(x) &= \sqrt{2-3x^2}; \quad f''(x) - ٥١ \\ y'' &= \frac{4-x}{4(x-1)^{3/2}} : \text{ج} & y &= x/\sqrt{x-1}, \quad y'' - ٥٢ \end{aligned}$$

أوجد المشتق من المرتبة  $n$  في كل من المسائل ٥٣ - ٥٤

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{(-1)^n (n+1)!}{x^{n+2}} : \text{ج} & y &= 1/x^2 - ٥٣ \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{3^n \cdot n!}{(3x+2)^{n+1}} : \text{ج} & f(x) &= 1/(3x+2) - ٥٤ \end{aligned}$$

٥٥ - إذا كان  $y = f(u)$  و  $u = g(x)$  فبين أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + 3 \frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d^2y}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \quad (ب) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \quad (١)$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{3(y'')^2 - y' y'''}{(y')^3} \quad \text{استنتج} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} \quad \text{من العلاقة} - ٥٦$$

# الفصل السادس

## الاشتقاق الضمني

**الدوال الضمنية :** نقول عن معادلة  $(x, y) = 0$  الشكل  $(x, y) = 0$  كـ على مدين معين وقد يكونان مقيدتين المتغيرين ،  
أنها تعرف  $y$  دالة  $x$  بشكل ضمني .

**مثال ١ :**

$$(١) \text{ تعرف المعادلة } xy + x - 2y - 1 = 0 \text{ عندما } x \neq 2 \text{ الدالة } y = \frac{1-x}{x-2}$$

(ب) تعرف المعادلة  $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$  الدالة  $y = 2/3 \sqrt{9-x^2}$  عندما  $y \geq 0, |x| \leq 3$  والدالة  $y = -2/3 \sqrt{9-x^2}$  عندما  $y \leq 0, |x| \leq 3$  . لاحظ أن القطع الناقص يمكن اعتباره على أنه مكون من قوسين متصلين عند القطبين  $(3, 0)$  و  $(-3, 0)$  .

ويمكن الحصول على المشتق  $y'$  باتباع إحدى الطريقتين :

(١) حل المعادلة بالنسبة لـ  $y$  إن كان الأمر ممكناً ثم اشتق بالنسبة لـ  $x$  ولكن ينبغي أن نتوقع ضرورة تفادي هذه الطريقة في المعادلات البسيطة جداً .

(ب) اعتبر  $y$  دالة لـ  $x$  واشتق المعادلة المفروضة بالنسبة لـ  $x$  ثم حل العلاقة الناتجة بالنسبة لـ  $y'$  . تعرف طريقة الاشتقاق هذه بالاشتقاق الضمني .

**مثال ٢ :**

$$(١) \text{ أوجد } y' \text{ إذا كان } xy + x - 2y - 1 = 0.$$

$$\text{لدينا } x \cdot \frac{d}{dx}(y) + y \cdot \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x) - 2 \cdot \frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\text{أو } xy' + y + 1 - 2y' = 0; \text{ إذن } y' = \frac{1+y}{2-x}.$$

$$(ب) \text{ إذا كان } 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0. \text{ فلوجد } y' \text{ عندما } x = \sqrt{5}$$

$$\text{لدينا } 0 = 8x + 18yy' = 8x + 9 \cdot \frac{d}{dy}(y^2) \frac{dy}{dx} = 8x + 9 \cdot \frac{d}{dx}(x^2) + 9 \cdot \frac{d}{dx}(y^2) = 8x + 18xy' \text{ ومنه } y' = -\frac{4x}{9y}.$$

وعندما  $x = \sqrt{5}$  يكون  $y = \pm 4/3$  ويكون عند النقطة  $(\sqrt{5}, 4/3)$  على القوس العلوي من القطع الناقص  $y' = -\sqrt{5}/3$  ويكون عند النقطة  $(\sqrt{5}, -4/3)$  على القوس السفلي  $y' = \sqrt{5}/3$  .

يمكن الحصول على المشتقات ذات الرتب الأعلى باتباع إحدى الطريقتين :

(1) اشتق ضمنيا المشتقة من رتبة أدنى بواحد وعوض عن  $y'$  بقيمتها من العلاقة التي سبق أن وجدها .

مثال ٣ :

لدينا من المثال ٢ (1)  $y' = \frac{1+y}{2-x}$  إذن :

$$\frac{d}{dx}(y') = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+y}{2-x}\right) = \frac{(2-x)y' + 1+y}{(2-x)^2} = \frac{(2-x)\left(\frac{1+y}{2-x}\right) + 1+y}{(2-x)^2} = \frac{2+2y}{(2-x)^2}$$

(ب) اشتق المعادلة المفروضة ضمنيا العدد الضروري من المرات كي تحصل على المشتقة المطلوبة ثم احذف جميع المشتقات من الرتب الأصغر . وتفضل هذه الطريقة فقط إذا كان المطلوب الحصول على مشتقة من رتبة عليا عند نقطة مفروضة .

مثال ٤ :

أوجد قيمة  $y''$  عند النقطة  $(-1, 1)$  على المنحنى  $x^2y + 3y - 4 = 0$  بالاشتقاق الضمني مرتين بالنسبة لـ  $x$  نجد أن :

$$x^2y' + 2xy + 3y' = 0 \quad \text{منه} \quad x^2y'' + 2xy' + 2xy' + 2y + 3y'' = 0$$

وبالتعويض عن  $x = -1$  نجد  $y = 1$  من العلاقة الأولى . إذن  $y' = 1/2$   
 وبالتعويض عن  $x = -1$  و  $y = 1$  و  $y' = 1/2$  في العلاقة الثانية إذن  $y'' = 0$

### مسائل محلولة

١ - إذا كان  $x^2y - xy^2 + x^3 + y^3 = 0$  فأوجد  $y'$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) &= 0 \\ x^2 \frac{d}{dx}(y) + y \frac{d}{dx}(x^2) - x \frac{d}{dx}(y^2) - y^2 \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) &= 0 \\ x^2y' + 2xy - 2xyy' - y^2 + 2x + 2yy' &= 0 \end{aligned}$$

٢ - إذا كان  $x^3 - xy + y^3 = 3$  فأوجد  $y'$  و  $y''$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^3) &= 2x - xy' - y + 2yy' = 0 \\ y' &= \frac{2x-y}{x-2y} \quad \text{وبالتالي} \\ y'' &= \frac{(x-2y) \frac{d}{dx}(2x-y) - (2x-y) \frac{d}{dx}(x-2y)}{(x-2y)^2} = \frac{(x-2y)(2-y') - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2} \\ &= \frac{3xy' - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{3x\left(\frac{2x-y}{x-2y}\right) - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x-2y)^2} = \frac{18}{(x-2y)^2} \end{aligned}$$



٢- إذا كان  $x^2y + xy^2 = 2$  فلوجد  $y'$  و  $y''$  عندما  $x = 1$

$$x^2y' + 3x^2y + 3xy^2y' + y^3 = 0$$

$$x^2y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy + 3x^2y'' + 6xy(y')^2 + 3y^2y' + 3y^2y' = 0 \quad \text{و}$$

وعندما  $x = 1$  يكون  $y = 1$  بالتعويض في علاقة المشتقة الأولى نجد أن  $y' = -1$

وبالتعويض عن  $x = 1, y = 1, y' = -1$  في العلاقة الثانية نجد أن  $y'' = 0$

### مسائل اضافية

٤- استنتج الصيغة ١٠ من الفصل الخامس عندما  $m = p/q$  حيث  $p, q$  عدنان صحيحان وذلك بكتابة  $y = x^{p/q}$  بالشكل  $y^q = x^p$  ثم بالاشتقاق بالنسبة لـ  $x$ .

٥- أوجد  $y''$  بفرض (أ)  $x + xy + y = 2$  (ب)  $x^3 - 3xy + y^3 = 1$

$$y'' = -\frac{4xy}{(y^3 - x)^2} \quad (\text{ب}) \quad y'' = \frac{2(1+y)}{(1+x)^2}, \quad (\text{أ}) \quad \text{ج}$$

٦- أوجد  $y', y'', y'''$  عند (أ) النقطة  $(2, 1)$  على المنحنى  $x^2 - y^2 - x = 1$  (ب) النقطة  $(1, 1)$  على المنحنى  $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$  ج: (أ)  $3/2, -5/4, 45/8$ ; (ب)  $1, 0, 0$

٧- أوجد الميل عند نقطة  $(x_0, y_0)$  لـ (أ)  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  (ب)  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  ج: (أ)  $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$  (ب)  $\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$  (ج)  $\frac{4x_0y_0 - x_0^2}{y_0^2 - 2x_0^2}$

٨- أثبت أن المنحنيين  $5y - 2x + y^2 - x^2y = 0$  و  $2y + 5x + x^2 - x^2y = 0$  يتقاطعان بزاوية قائمة عند نقطة الأصل.

٩- (أ) المساحة السطحية الكلية لتوازي مستطيلات قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها  $y$  وارتفاعه  $x$  تعطى بالعلاقة  $S = 2y^2 + 4xy$  فإذا كانت  $S$  ثابتة فلوجد  $dy/dx$  دون حل العلاقة بالنسبة لـ  $y$ .

(ب) تعطى المساحة السطحية الكلية لاسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها  $r$  وارتفاعها  $h$  بالعلاقة  $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

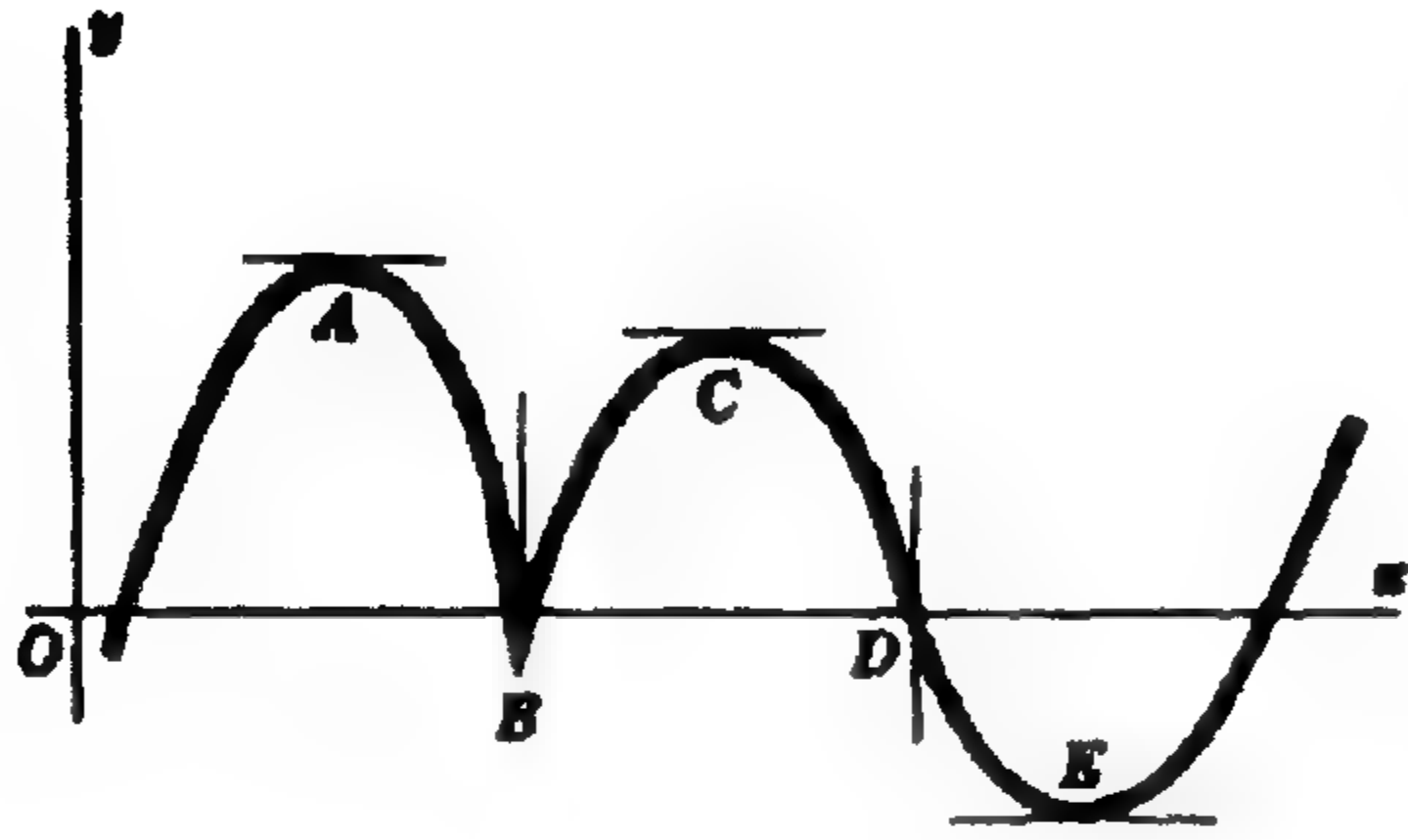
$$\text{فلما كانت } S \text{ ثابتة فلوجد } dh/dr \quad \text{ج : (أ) } -\frac{y}{x+y} \quad (\text{ب}) -\frac{r}{2r+h}$$

$$10- \text{للعائرة } x^2 + y^2 = r^2 \text{ أثبت أن } \left| \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} \right| = \frac{1}{r}.$$

١١- إذا كان  $S = \pi x(x + 2y)$  و  $V = \pi x^2y$  فاثبت أن  $dS/dx = 2\pi(x - y)$  عندما تكون  $V$  ثابتة، وأن  $dV/dx = -\pi x(x - y)$  عندما تكون  $S$  ثابتة.

# الفصل السابع

## المماسات والأعمدة



شكل ٧ - ١

إذا كان للدالة  $f(x)$  مشتقة محددة  $f'(x_0)$  عند  $x = x_0$  فنحن نذكر  $y = f(x)$  المنحنى مماس عند النقطة  $P_0(x_0, y_0)$  به .

$$m = \tan \theta = f'(x_0)$$

وإذا كانت  $m = 0$  فإنه يكون المنحنى مماس أفق يملأ بالملاقة  $y = y_0$  عند  $P_0$  كما في A, C, E في الشكل ٧ - ١ وباستثناء هذه الحالة فإن معادلة المماس هي

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

وعندما تكون  $f(x)$  مستمرة عند  $x = x_0$  ولكن  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty$  فنحن نذكر  $y = f(x)$  المنحنى مماس رأسي معادته  $x = x_0$  كما في B, D من الشكل ٧ - ١ .

إن العمود على منحنى عند إحدى نقاطه ، هو مستقيم مار بتلك النقطة وقائم على المماس عندها . ومعادلة العمود عند  $P_0(x_0, y_0)$  هي .

إذا كان المماس أفقياً  $x = x_0$

و إذا كان المماس عمودياً  $y = y_0$

وباستثناء هاتين الحالتين فإن معادلة العمود هي

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

أنظر المائل ١ - ٩

**تعريف زاوية تقاطع منحنين** على أنها الزاوية بين مماسيهما عند نقطة التقاطع .

لنمين زاوية تقاطع منحنين :

( ١ ) حل المعادلتين آنيا للحصول على نقط التقاطع .

( ٢ ) أوجد الميلين  $m_1, m_2$  لمماسي المنحنين عند كل نقط تقاطعهما .

(٣) إذا كان  $m_1 = m_2$  فزاوية التقاطع  $\phi = 0^\circ$

(٤) وإذا كان  $m_1 = -1/m_2$  فزاوية التقاطع هي  $\phi = 90^\circ$

وفي غير ذلك يكون

$$\tan \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

وتكون  $\phi$  زاوية التقاطع الحادة عندما يكون  $\tan \phi > 0$

وتكون  $\phi = 180^\circ$  زاوية التقاطع الحادة عندما يكون  $\tan \phi < 0$

أنظر المسائل ١٠ - ١٢

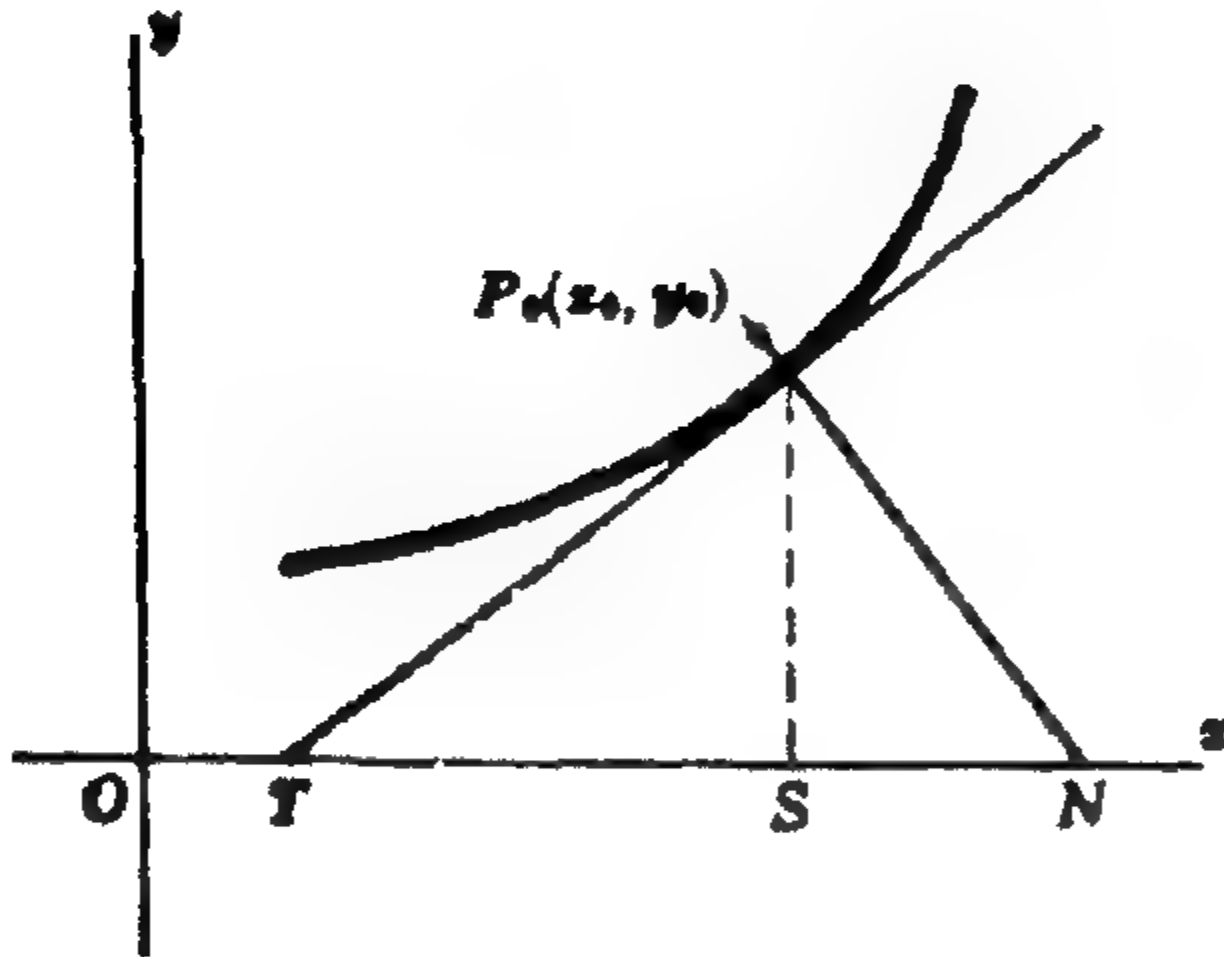
**طول المماس والعمودي وتحت المماس وتحت العمودي :** يعرف طول المماس لمنحنى عند إحدى نقاطه ،

على أنه طول الجزء المماس بين نقطة التماس والمحور  $x$  ويسمى طول سقط هذا الجزء من المماس على المحور  $x$  بطول تحت المماس .

ويعرف طول العمودي على أنه طول الجزء العمودي بين نقطة

تماس المماس والمحور  $x$  . ويسمى طول سقط هذا الجزء على

المحور  $x$  بطول تحت العمودي .



شكل ٧ - ٢

طول تحت المماس  $y_0/m = TS$

طول تحت العمودي  $my_0 = SN$

طول المماس  $TP_0 = \sqrt{(TS)^2 + (SP_0)^2}$

طول العمود  $P_0N = \sqrt{(SN)^2 + (SP_0)^2}$

**ملاحظة :** إن طول تحت المماس وتحت العمودي هي أطوال موجبة . إنما يفضل بعض المؤلفين الطولين غير الموجبين  $|y_0/m|$  و  $|my_0|$  على التوالي . عندئذ ينبغي في هذه الحالة إهمال الإشارات في إجابة المسائل التالية .

أنظر المسألة ١٣

### مسائل محلولة

١ - أوجد نقط التماس المماسات الأفقية والعمودية لمنحنى  $27 = x^3 - xy + y^3$

بالاشتقاق نجد  $y' = \frac{y-2x}{2y-x}$  . للحصول على المماسات الأفقية نضع البسط في  $y'$  مساوية للصفر فنحصل على  $y = 2x$  ونقط التماس هي نقط تقاطع المستقيم  $y = 2x$  مع المنحنى المفروض . فإذا حللنا هاتين المعادلتين أننا نحصل على النقطتين (3,6) و (-3, -6)

ولاحصول على المماسات العمودية نضع المقام في  $y'$  مساويا للصفر فنحصل على  $x = 2y$  . ونقط التماس هي نقط تقاطع المستقيم  $x = 2y$  مع المنحنى المفروض . فإذا حللنا هاتين المعادلتين آتينا نحصل على النقطتين (6,3) و (-3, -6)

٢ - أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى  $y = x^3 - 2x^2 + 4$  عند النقطة (2,4) .

إن  $f'(x) = 3x^2 - 4x$  وميل المماس عند (2,4) هو  $m = f'(2) = 4$

ومعادلة المماس هي  $y - 4 = 4(x - 2)$  أو  $y = 4x - 4$

ومعادلة العمودى هي  $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$  أو  $x + 4y = 18$

٣ - أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى  $x^2 + 3xy + y^2 = 5$  عند النقطة (1,1) .

إن  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}$  وميل المماس عند (1,1) هو  $m = -1$

ومعادلة المماس هي  $y - 1 = -1(x - 1)$  أو  $x + y = 2$

ومعادلة العمودى هي  $y - 1 = 1(x - 1)$  أو  $x - y = 0$

٤ - أوجد معادلات المماس للقطع الناقص  $4x^2 + 9y^2 = 40$  ، التى ميلها  $m = -2/9$  .  
نفرض أن  $P_0(x_0, y_0)$  هي نقطة تماس المماس المطلوب عندئذ يكون .

$$(1) \quad 4x_0^2 + 9y_0^2 = 40 \quad \text{لأن } P_0 \text{ تقع على المنحنى}$$

$$(ب) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y} \quad \text{وعند النقطة } (x_0, y_0) \text{ يكون } m = \frac{-4x_0}{9y_0} = -\frac{2}{9} \text{ ومنه } y_0 = 2x_0$$

(ج) نقط التماس هي الحلول الآتية (1,2) و (-1,-2) للمعادلتين (1) ، (ب) - ومعادلة المماس عند (1,2) هي  $y - 2 = -2/9(x - 1)$  أو  $2x + 9y = 20$  . ومعادلة المماس عند (-1,-2) هي  $y + 2 = -2/9(x + 1)$  أو  $2x + 9y = -20$  .

٥ - أوجد معادلة المماس للقطع الزائد  $x^2 - y^2 = 16$  والمار بالنقطة (2,-2) .

نفرض أن  $P_0(x_0, y_0)$  هي نقطة التماس للمماس المطلوب . عندئذ :

$$(1) \quad x_0^2 - y_0^2 = 16 \quad \text{لأن النقطة } P_0 \text{ تقع على القطع الزائد}$$

$$(ب) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \text{وعند النقطة } (x_0, y_0) \text{ يكون } m = \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0 + 2}{x_0 - 2} = \text{ميل المستقيم الذى يصل } P_0$$

ب (2,-2) وعندئذ يكون

$$x_0 + y_0 = 8 \text{ أو } 2x_0 + 2y_0 = x_0^2 - y_0^2 = 16$$

(ج) نقطة التماس هي الحل الآن (5,3) للمعادلتين (1) ، (ب) وعلى ذلك تكون معادلة المماس هي

$$5x - 3y = 16 \text{ أو } y - 3 = \frac{5}{3}(x - 5)$$

٦ - أوجد معادلات المستقيمت الرأسية التى تلاقى كلا منها المنحنيين

$$(1) \quad y = x^2 + 2x^2 - 4x + 5 \quad (2) \quad y = 2x^2 + 9x^2 - 3x - 3$$

نفرض أن  $x = x_0$  أحد هذه المستقيمت الرأسية .

المنحنى (١) يكون  $y' = 3x^2 + 4x - 4$  وعند  $x = x_0$  يكون  $m = 3x_0^2 + 4x_0 - 4$ .

والمنحنى (٢) يكون  $3y' = 6x^2 + 18x - 3$  وعند  $x = x_0$  يكون  $m = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$ .

ربما أنه ينبغي أن يكون  $3x_0^2 + 4x_0 - 4 = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$  فإن  $x_0 = 3, x_0 = -1$  والمستقيمان هما  $x = 3, x = -1$ .

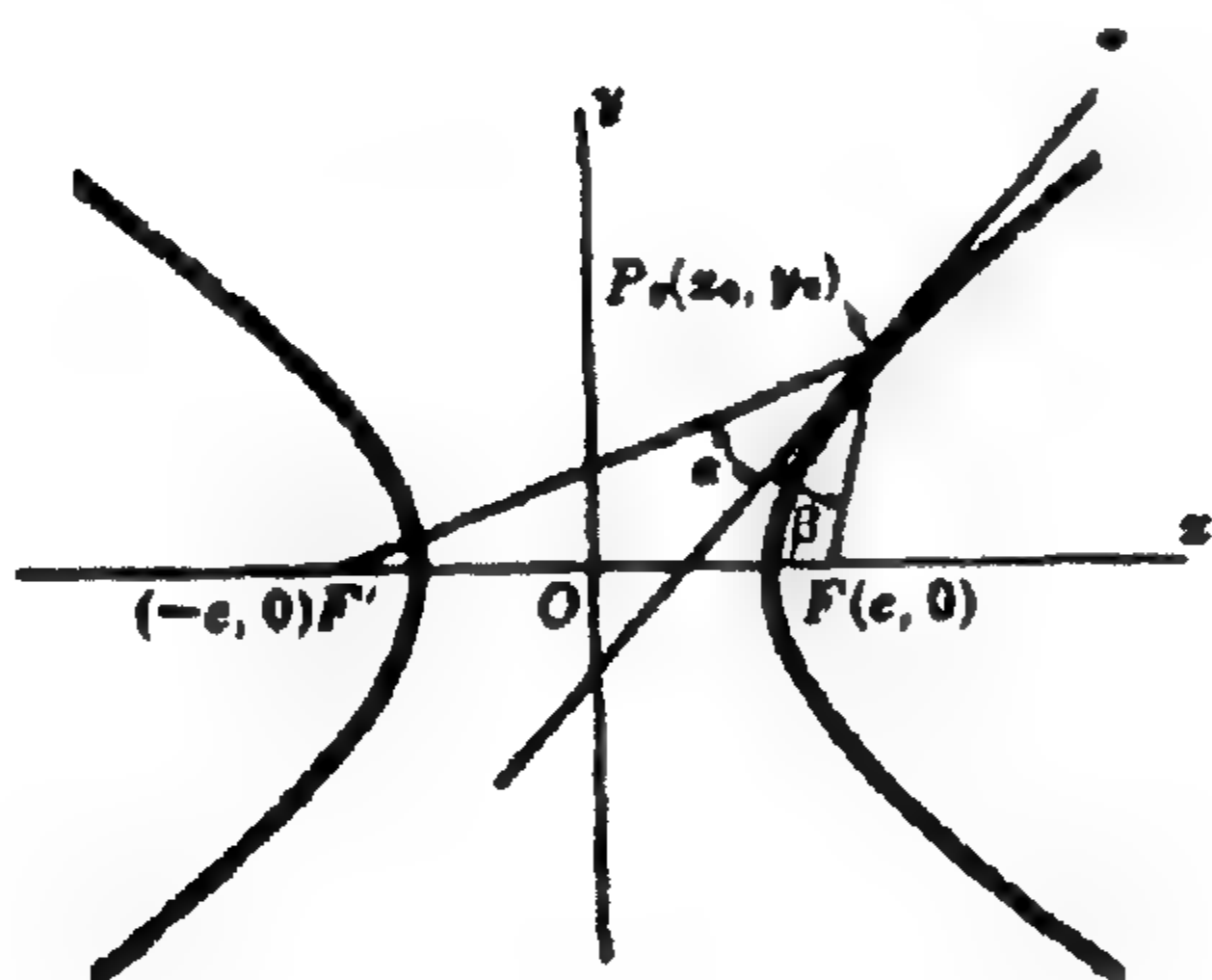
٧ - (١) بين أن معادلة المماس الذي ميله  $m \neq 0$  لقطع المكافئ  $y^2 = 4px$  هي  $y = mx + p/m$

(ب) بين أن معادلة المماس لقطع الناقص  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  عند نقطة عليه  $P_0(x_0, y_0)$  هي  $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$

(١)  $y' = 2p/y$  نفرض أن  $P_0(x_0, y_0)$  هي نقطة المماس ، إذن  $y_0^2 = 4px_0$  و  $m = 2p/y_0$  وكذلك  $y_0 = 2p/m$  و  $x_0 = 1/4 y_0^2/p = p/m^2$  وتكون معادلة المماس هي  $y - 2p/m = m(x - p/m^2)$  أو  $y = mx + p/m$ .

(ب)  $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$  ويكون عند النقطة  $P_0$  :  $m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$  وبالتالي فإن معادلة المماس هي

$$b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2 \quad \text{أو} \quad y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$



شكل ٧ - ٢

٨ - بين أن المماس عند النقطة  $P_0(x_0, y_0)$  لقطع الزائد  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  ينصف الزاوية المحصورة بين نصفي القطرين البؤريين للنقطة  $P_0$ .

إن ميل المماس عند النقطة  $P_0$  لقطع الزائد يساوي  $b^2x_0/a^2y_0$  وميل نصفي القطرين البؤريين  $P_0F'$  و  $P_0F$  هما  $y_0/(x_0 + c)$  و  $y_0/(x_0 - c)$  على التوالي وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\frac{b^2x_0}{a^2y_0} - \frac{y_0}{x_0 + c}}{1 + \frac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0 + c}} \\ &= \frac{(b^2x_0^2 - a^2y_0^2) + b^2cx_0}{(a^2 + b^2)x_0y_0 + a^2cy_0} \\ &= \frac{a^2b^2 + b^2cx_0}{c^2x_0y_0 + a^2cy_0} = \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{cy_0(a^2 + cx_0)} = \frac{b^2}{cy_0} \end{aligned}$$

وحيث أن  $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$  و  $a^2 + b^2 = c^2$

$$\tan \beta = \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} - \frac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1 + \frac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0 - c}} = \frac{b^2cx_0 - (b^2x_0^2 - a^2y_0^2)}{(a^2 + b^2)x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2cx_0 - a^2b^2}{c^2x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2}{cy_0}$$

وحيث أن  $\tan \alpha = \tan \beta$  يكون  $\alpha = \beta$ .

٩ - برهن أن الوتر الذي يصل نقطتي تماس المماسين لقطع الناقص  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  المارين بأي نقطة على دليل القطع يمر بالبؤرة المرافقة لهذا الدليل.

لتكن  $P_0(x_0, y_0)$  أية نقطة يمكن منها رسم مماسين لقطع الناقص ولتكن  $P_1(x_1, y_1)$  و  $P_2(x_2, y_2)$  نقطتي



التماس الموائجين . إن معادلتى المماسين عند  $P_2, P_1$  هما  $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$  و  $b^2x_2x + a^2y_2y = a^2b^2$  .  
 وحيث أنهما يمران بـ  $P_0$  فإن  $b^2x_1x_0 + a^2y_1y_0 = a^2b^2$  و  $b^2x_2x_0 + a^2y_2y_0 = a^2b^2$  .  
 ويكون المستقيم  $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$  الذى يمر بالنقطتين  $P_2, P_1$  هو وتر التماس . لنفرض أن  $P(a^2/c, \bar{y})$  هي نقطة على الدليل الأيمن . عندئذ تكون معادلة وتر التماس المار بـ  $P$  هي  $(b^2a^2/c)x + a^2\bar{y}y = a^2b^2$  ويمكن التحقق بسهولة من أن هذا الوتر يمر بالبرة  $F(c, 0)$  المرافقة للدليل المذكور .

١٠ - أوجد زوايا التقاطع الحادة للمنحنين  $y^2 = 4x$  (١) و  $2x^2 = 12 - 5y$  (٢) .

(١) إن نقطى تقاطع المنحنين هما  $P_1(1, 2)$  و  $P_2(4, -4)$

(ب) المنحنى (١) تكون  $y' = 2/y$  والمنحنى (٢) تكون  $y' = -4x/5$

وبذلك يكون عند النقطة  $P_1(1, 2)$  ،  $m_2 = -4/5$  وعند النقطة  $P_2(4, -4)$   $m_2 = -16/5$  و  $m_1 = -1/2$

(ج) وعند النقطة  $P_1$  نجد أن  $\tan \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{1 + 4/5}{1 - 4/5} = 9$  و  $\phi = 83^\circ 40'$  هي زاوية التقاطع الحادة  
 وعند النقطة  $P_2$  نجد  $\tan \phi = \frac{-1/2 + 16/5}{1 + 8/5} = 1.0385$  و  $\phi = 46^\circ 5'$  هي زاوية التقاطع الحادة .

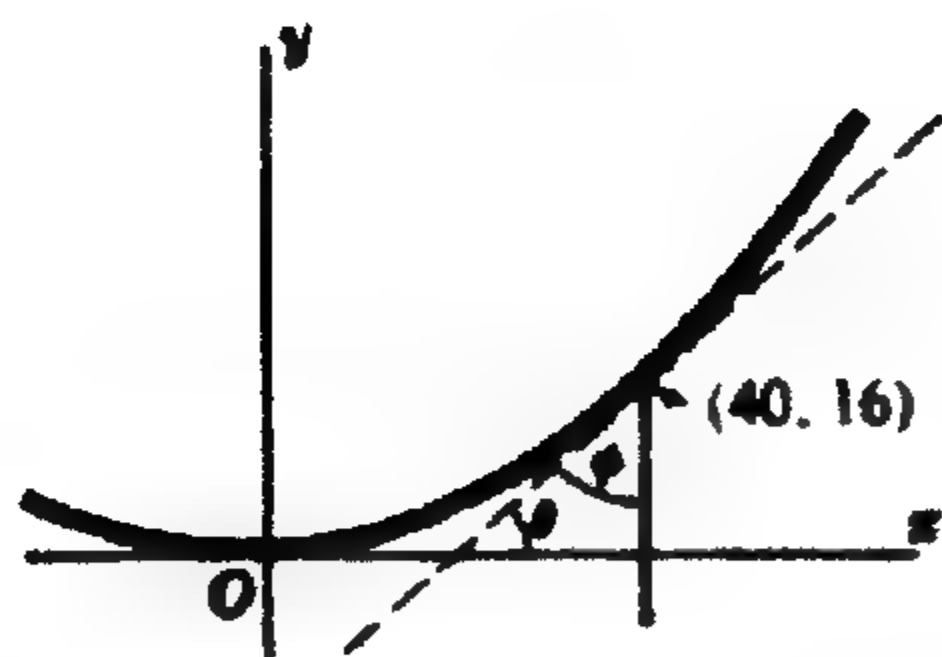
١١ - أوجد زوايا التقاطع الحادة للمنحنين  $2x^2 + y^2 = 20$  (١) و  $4y^2 - x^2 = 8$  (٢)

إن نقطى التقاطع هي  $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$  و  $(\pm 2\sqrt{2}, -2)$  .

والمنحنى (١) تكون  $y' = -2x/y$  والمنحنى (٢) تكون  $y' = x/4y$  وعند النقطة  $(2\sqrt{2}, 2)$  نجد أن  $m_2 = 1/4\sqrt{2}$  و  $m_1 = -2\sqrt{2}$

وحيث أن  $m_1 m_2 = -1$  فإن زاوية التقاطع  $\phi = 90^\circ$  (أى أن المنحنين متعامدان) ونجد ، بالتالى ، أن المنحنين متعامدان عند كل نقطة من نقط تقاطعهما .

١٢ - يربط جبل بحجر معلق عند طرفيه بدعامتين البعد بينهما 80 m فإذا علق على شكل قطع مكافئ تقع أقل نقطة فيه على بعد 16 m من نقطى التعلق فأوجد الزاوية بين الجبل والدعامتين .



لنأخذ نقطة الأصل عند رأس القطع المكافئ . كما فى الشكل ٧ - ٤

إن معادلة القطع المكافئ هي  $y = \frac{16}{1600}x^2$  و  $y' = \frac{x}{50}$

وعند النقطة  $(40, 16)$  يكون  $m = \frac{40}{50} = .8000$  وبالتالى  $\theta = 38^\circ 40'$  والزاوية المطلوبة هي  $\phi = 90^\circ - \theta = 51^\circ 20'$  .

شكل ٧ - ٤

١٣ - أوجد طول كل من تحت المماس وتحت المماسى والمنحنى  $xy + 2x - y = 5$  عند النقطة  $(2, 1)$

وعند النقطة  $(2, 1)$  يكون  $\frac{dy}{dx} = \frac{2+y}{1-x}$  و  $m = -3$  .

وطول تحت المماس  $y_0/m = -1/3$  وطول تحت المماسى  $my_0 = -3$  .

وطول المماس  $\sqrt{10}/3 = \sqrt{1/9+1}$  وطول المماسى  $\sqrt{10} = \sqrt{9+1}$  .

### مسائل إضافية

- ١٤ - ابحث في المماسات الأفقية والرأسية للمنحنى  $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ .
- ج : مماسان أفقيان عند  $(3, -3/2)$  و  $(-3, 3/2)$  و مماسان رأسيان عند  $(6, -3/4)$  و  $(-6, 3/4)$ .
- ١٥ - أوجد معادلتى المماس والعمود للمنحنى  $x^2 - y^2 = 7$  عند النقطة  $(4, -3)$ .
- ج :  $4x + 3y = 7$ ;  $3x - 4y = 24$ .
- ١٦ - من النقاط التى يكون عندها المماس للمنحنى  $y = x^2 + 5$  (أ) موازيا للمستقيم  $12x - y = 17$  (ب) عموديا على المستقيم  $x + 3y = 2$  ج : (أ)  $(2, 13)$ ,  $(-2, -3)$ ; (ب)  $(1, 6)$ ,  $(-1, 4)$ .
- ١٧ - أوجد معادلات المماسات للمنحنى  $8x^2 + 16y^2 = 52$  الموازية للمستقيم  $9x - 8y = 1$  ج  $9x - 8y = \pm 26$ .
- ١٨ - أوجد معادلات المماسات للقطع الزائد  $xy = 1$  المارة بالنقطة  $(-1, 1)$ .
- ج :  $y = (2\sqrt{2} - 8)x + 2\sqrt{2} - 2$ ;  $y = -(2\sqrt{2} + 3)x - 2\sqrt{2} - 2$ .
- ١٩ - بين أن معادلة المماس للقطع المكافئ  $y^2 = 4px$  عند إحدى نقاط  $P(x_0, y_0)$  هى  $yy_0 = 2p(x + x_0)$ .
- ٢٠ - بين أن معادلتى المماسين للقطع الناقص  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  والذين يلبها  $m$  هما  $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ .
- ٢١ - بين أنه للقطع الزائد  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  تكون (أ) معادلة المماس عند إحدى نقاط  $P(x_0, y_0)$  هى  $\frac{x_0y}{b^2} - \frac{y_0x}{a^2} = 1$  و (ب) معادلتا المماسين اللذين يلبها  $m$  هما  $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ .
- ٢٢ - بين أن العمود على القطع المكافئ عند إحدى نقاط  $P_0$  ينصف الزاوية المحصورة بين نصف القطر البؤرى للنقطة  $P_0$  والمستقيم الموازى لمحور القطع والمار بـ  $P_0$ .
- ٢٣ - برهن أن أى مماس للقطع المكافئ ، باستثناء المماس عند الرأس يقطع الدليل والوتر البؤرى العمودى عند نقطتين متساويتى البعد عن البؤرة .
- ٢٤ - برهن أن الوتر الذى يصل نقط تماس مماسات قطع مكافئ بنقطة على دليله يمر بالبؤرة .
- ٢٥ - برهن أن العمود على القطع الناقص عند أى نقطة  $P_0$  من ينصف الزاوية المحصورة بين نصفي القطرين البؤريين لـ  $P_0$ .
- ٢٦ - برهن أن الوتر الذى يصل نقط تماس مماسات قطع زائد بنقطة على دليله يمر بالبؤرة المراقبة .
- ٢٧ - برهن أن نقطة تماس القطع الزائد تنصف جزء المماس المحصور بين الخطين المقاربين للقطع .
- ٢٨ - برهن أن ميل المماس عند أى طرف من طرفى الوتر البؤرى العمودى سواء للقطع الناقص أو للقطع الزائد ، يساوى متديا الاختلاف المركزى للقطع .
- ٢٩ - برهن أن (أ) مجموع ما يقطعه المماس للمنحنى  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$  مع محورى الإحداثيات ثابت (ب) مجموع مربعى ما يقطعه المماس للمنحنى  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  مع محورى الإحداثيات ثابت .

٢٠- أوجد زاوية التقاطع الحادة للدائرتين  $x^2 - 4x + y^2 = 0$  و  $x^2 + y^2 = 8$ . ج :  $45^\circ$

٢١- بين أن المنحنيين  $y = 2x^2 + 2$  و  $y = x^2 + 2$  مماسا مشتركا عند النقطة  $(0, 2)$  وأنها يتقاطعان عند  $(2, 10)$  بزاوية  $\phi = \text{Arc tan } 4/97$

٢٢- بين أن القطع الناقص  $4x^2 + 9y^2 = 45$  والقطع الزائد  $x^2 - 4y^2 = 5$  متعامدان .

٢٣- أوجد معادلتى المماس والممودى للقطع المكافئ  $y = 4x^2$  عند النقطة  $(-1, 4)$  ثم احسب أطوال تحت المماس وتحت الممودى والمماس الممودى . ج :  $-\frac{1}{2}, -32, \frac{1}{2}\sqrt{65}, 4\sqrt{65}$  ;  $8y - x - 33 = 0$ ,  $y + 8x + 4 = 0$

٢٤- أوجد أطوال تحت المماس وتحت الممودى ، والمماس والممودى ، للقطع الزائد  $3x^2 - 2y^2 = 10$  عند النقطة  $(-2, 1)$

ج :  $-1/8, -3, \sqrt{10}/3, \sqrt{10}$

٢٥- عند أى نقطة على المنحنى  $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$  يمر المماس عندها بنقطة الأصل ؟

ج :  $x = -3, -1, 3/4$

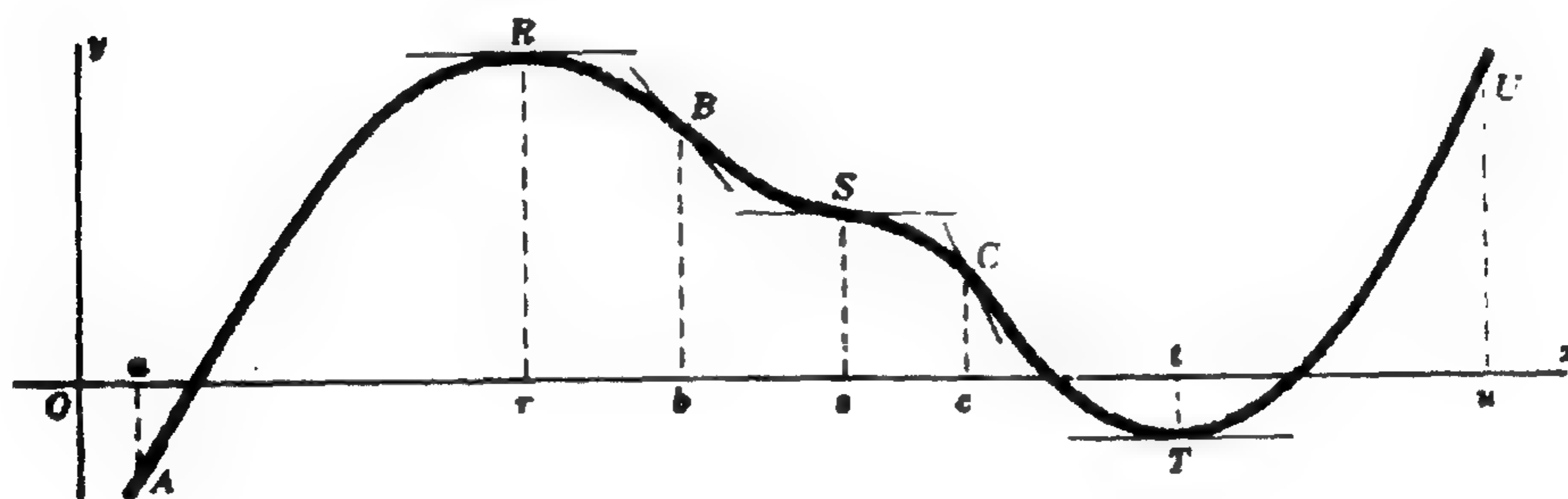
# الفصل الثامن

## القيم العظمى والصغرى

**الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة :** نقول عن دالة  $f(x)$  إنها متزايدة عند  $x = x_0$  ، إذا كان عند  $h$  الموجبة والصغيرة بقدر كاف ،  $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$  ونقول عن دالة  $f(x)$  إنها متناقصة عند  $x = x_0$  إذا كان عند  $h$  ، الموجبة والصغيرة بقدر كاف ،  $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$  .

إذا كان  $f'(x_0) > 0$  فإن  $f(x)$  دالة متزايدة عند  $x = x_0$  وإذا كان  $f'(x_0) < 0$  فتدلّ تكون  $f(x)$  دالة متناقصة عند  $x = x_0$  ( لبرهان انظر المسألة ١٧ ) . أما إذا كان  $f'(x_0) = 0$  فإننا نقول إن  $f(x)$  مستقرة عند  $x = x_0$  .

ونقول عن دالة غير ثابتة إنها متزايدة ( متناقصة ) في فترة ما إذا كانت متزايدة ( متناقصة ) أو مستقرة في كل نقطة من نقط الفترة .



شكل ٨ - ١

في الشكل ٨ - ١ المنحنى  $y = f(x)$  صاعد ( الدالة متزايدة ) في الفترتين  $a < x < r$  و  $s < x < u$  . والمنحنى هابط ( الدالة متناقصة ) في الفترة  $r < x < t$  . والدالة مستقرة عند  $x = r$  و  $x = s$  و  $x = t$  . والمنحنى مماسات أفقية عند النقط  $R, S, T$  وكثيرا ما نسمي قيم  $x (r, s, t)$  التي تكون عندها الدالة  $f(x)$  مستقرة (  $f'(x) = 0$  ) بالقيم الحرجة للدالة ونسمي النقط المقابلة (  $R, S, T$  ) على المنحنى بالنقط الحرجة للمنحنى .

**القيم العظمى والصغرى النسبية لدالة :** نقول عن دالة  $y = f(x)$  إن لها قيمة عظمى نسبية (صغرى نسبية) عند  $x = x_0$  إذا كانت  $f(x_0)$  أكبر ( أصغر ) من قيم الدالة السابقة واللاحقة مباشرة . انظر المسألة ١ .

النقطة  $R [ r, f(r) ]$  في الشكل ٨ - ١ هي نقطة قيمة عظمى نسبية للمنحنى لأن  $f(r) > f(x)$  عند أي نقطة مجاوره صغير بقدر كاف  $0 < |x - r| < \delta$  . وسنعتبر أن لدالة  $y = f(x)$  قيمة عظمى نسبية ( تساوي  $f(r)$  ) عندما  $x = r$  . وإن النقطة  $T [ t, f(t) ]$  على نفس الشكل هي نقطة قيمة صغرى نسبية لأن  $f(t) < f(x)$  عند نقطة مجاورة

صغير بقدر كاف  $0 < |x - t| < \delta$ . وسنعتبر أن الدالة  $y = f(x)$  قيمة صغرى نسبية (تساوى  $f(t)$ ) عندما  $x = t$ . يلاحظ أن  $R$  تربط قوسا صاعدا  $AR$  ( $f'(x) > 0$ ) بقوس هابط  $RB$  ( $f'(x) < 0$ ) في حين تربط  $T$  قوسا هابطا  $CT$  ( $f'(x) < 0$ ) بقوس صاعد  $TU$  ( $f'(x) > 0$ ) أما عند  $S$  فإنه يرتبط كل من القوسين الهابطين  $BS$  و  $SC$  والنقطة  $S$  ليست نقطة عظمى نسبية كما أنها ليست نقطة صغرى نسبية.

إذا كانت  $y = f(x)$  قابلة للاشتقاق على  $a \leq x \leq b$  وكان  $f(x)$  قيمة عظمى (صغرى) نسبية عند  $x = x_0$  حيث  $a < x_0 < b$  فمعتد ذلك يكون  $f'(x_0) = 0$  والبرهان المسألة ١٨.

لإيجاد القيم العظمى (الصغرى) النسبية [سنطلق عليها من الآن قيما عظمى (صغرى)] لدالة  $f(x)$  هي ومشتقتها الأولى مستمران :

### اختبار المشتقة الأولى :

- ١ - حل المعادلة  $f'(x) = 0$  للحصول على القيم الحرجة .
- ٢ - حدد مواضع القيم الحرجة على محور عددي مكونا بذلك عددا من الفترات .
- ٣ - حدد إشارة  $f'(x)$  على كل فترة .
- ٤ - اجمل  $x$  تتزايد مارة بكل قيمة حرجة  $x = x_0$  عندئذ يكون  $f(x)$  قيمة عظمى نسبية (تساوى  $f(x_0)$ ) إذا تغيرت  $f'(x)$  من  $+$  إلى  $-$  يكون  $f(x)$  قيمة صغرى نسبية (تساوى  $f(x_0)$ ) إذا تغيرت  $f'(x)$  من  $-$  إلى  $+$  لا يكون  $f(x)$  قيمة عظمى وصغرى عند  $x = x_0$  إذا لم تغير  $f'(x)$  إشارتها .

انظر المسائل ٢ - ٥ .

يمكن لدالة  $y = f(x)$  بالضرورة أقل بساطة من دوال التمارين ٢ - ٥ ، أن يكون لها قيمة عظمى أو صغرى [تساوى  $f(x_0)$ ] مع أن  $f'(x_0)$  ليست موجودة . نسمى أيضا القيم  $x = x_0$  التي يكون عندها الدالة  $f(x)$  معرفة ولكن مشتقتها  $f'(x)$  غير موجودة بالقيم الحرجة للدالة . وينبغي أن نستعمل هذه القيم مع القيم التي عندها  $f'(x) = 0$  لتحديد الفترات المذكورة في الخطوة ٢ السابقة الذكر .

انظر المسائل ٦ - ٨ .

وهناك حالة أخيرة يكون فيها  $f(x_0)$  قيمة عظمى (صغرى) مع أنه لا توجد فترة  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$  تكون  $f'(x)$  موجبة (سالبة) ولا توجد فترة  $x_0 < x < x_0 + \delta$  تكون  $f'(x)$  عليها سالبة (موجبة) . ولكننا سوف لا ندرس هذه الحالة هنا .

**اتجاه الانحناء :** نقول من قوس من منحنى  $y = f(x)$  إنه مقعر عند كل نقطة من نقطة إذا وقع القوس فوق مماسة عند تلك النقطة . عندما تتزايد  $x$  فإما أن تبقى  $f'(x)$  محافظة على إشارتها وتكون متزايدة (كما هي الحال على الفترة  $c < x < b$  في الشكل ٨ - ١) أو أنها تغير إشارتها من السالبة إلى الموجبة (كما هي الحال على الفترة  $a < x < c$ ) وفي كلا الحالتين يكون الميل  $f'(x)$  متزايدا وتكون  $f''(x) > 0$  .

ونقول من قوس منحنى  $y = f(x)$  إنه مقعر لأسفل إذا وقع القوس ، عند كل نقطة من نقطة تحت مماسه عند تلك النقطة وهنا عندما تتزايد  $x$  إما أن تبقى  $f'(x)$  محافظة على إشارتها وتنقص (كما هي الحال على الفترة  $a < x < c$ ) أو أنها تغير إشارتها من الموجبة إلى السالبة (كما هي الحال على الفترة  $c < x < b$ ) . وفي كلا الحالتين يكون الميل  $f'(x)$  متناقصا وتكون  $f''(x) < 0$  .



**نقطة الانعطاف :** هي نقطة يتغير المنحنى عندها من مقعر لأعلى إلى مقعر لأسفل أو بالعكس .

في الشكل ٨ - ١ نقط الانعطاف هي  $B, S, C$  .

ويكون المنحنى  $y = f(x)$  نقطة من نقطة  $x = x_0$  كنقطة انعطاف له

إذا كانت  $f''(x_0) = 0$  أو أنها غير معروفة .

إذا غيرت  $f''(x)$  إشارتها عندما تتزايد  $x$  عبر  $x_0$

ويمكن أن نستبدل بالشرط الأخير الشرط  $f'''(x_0) \neq 0$  عندما توجد  $f'''(x_0)$  .

انظر المسائل ٩ - ١٣

### الاختبار الثاني للقيم العظمى والصغرى • اختبار المشتقة الثانية :

١ - حل المعادلة  $f'(x) = 0$  لإيجاد القيم الحرجة :

٢ - عند القيمة الحرجة  $x = x_0$  يكون :

لـ  $f(x)$  قيمة عظمى ( تساوى  $f(x_0)$  ) إذا كانت  $f''(x_0) < 0$

لـ  $f(x)$  قيمة صغرى ( تساوى  $f(x_0)$  ) إذا كانت  $f''(x_0) > 0$

ويفشل الاختبار إذا كانت  $f''(x_0) = 0$  أو غير محددة .

وينبغي في الحالة الأخيرة استعمال طريقة المشتقة الأولى .

انظر المسائل ١٤ - ١٦

### مسائل محلولة

١ - ( أ ) الدالة  $y = -x^2$  قيمة عظمى نسبية ( تساوى صفر ) عند  $x = 0$  لأن  $y = 0$  عندما  $x = 0$  و  $y < 0$

عندما  $x \neq 0$  .

( ب ) الدالة  $y = (x-3)^2$  قيمة صغرى نسبية ( تساوى صفر ) عند  $x = 3$  لأن  $y = 0$  عندما  $x = 3$  و  $y > 0$

عندما  $x \neq 3$  .

( ج ) الدالة  $y = \sqrt{25-4x^2}$  قيمة عظمى نسبية ( تساوى 5 ) عند  $x = 0$  لأن  $y = 5$  عندما  $x = 0$  و  $y < 5$

عندما  $-1 < x < 1$  .

( د ) ليس الدالة  $y = \sqrt{x-4}$  قيمة عظمى أو صغرى نسبية [ يعرف بعض المؤلفين القيم العظمى ( الصغرى )

النسبية بحيث يكون لهذه الدالة قيمة صغرى نسبية عند  $x = 4$  . انظر المسألة ٢٠ ]

٢ - بفرض  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$  أوجد :

( أ ) النقط الحرجة

( ب ) الفترات التي تتزايد أو تتناقص فيها  $y$

( ج ) القيم العظمى والصغرى لـ  $y$

$$y' = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) \quad (1)$$

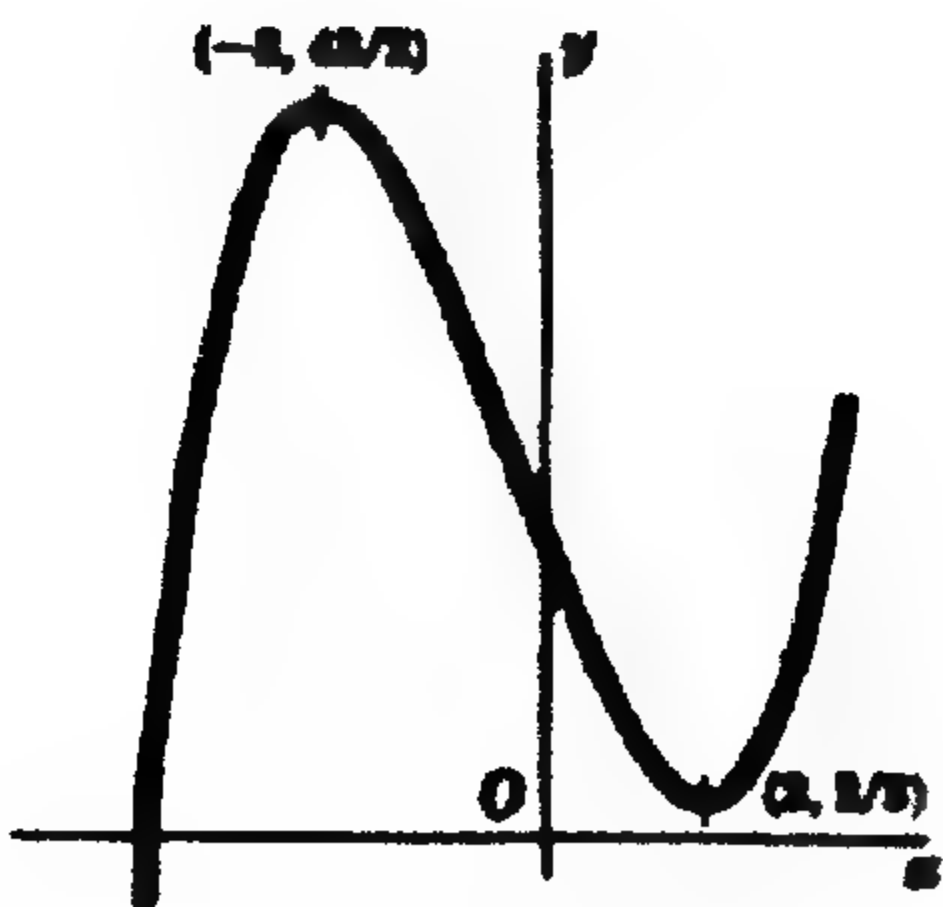
بوضع  $y' = 0$  نجد أن القيم الحرجة هي  $x = -3, 2$

التنطكان الحرجان هما  $(2, 2/3)$  و  $(-3, 43/2)$  .

( ب ) عندما تكون  $y'$  موجبة تتزايد  $y$  وعندما تكون  $y'$  سالبة تتناقص  $y$  .

عندما  $x < -3$  مثلا إذا أخذنا  $x = -4$  فإن  $y' = (-)(-) = +$  فإن

والدالة  $y$  متزايدة .



شكل ٨ - ٢

وعندما  $2 < x < 3$  مثلا إذا أخذنا  $x = 0$  فإن  $y' = (-)(+) = -$  والدالة  $y$  متناقصة .  
وعندما  $x > 3$  مثلا إذا أخذنا  $x = 3$  فإن  $y' = (+)(+) = +$  والدالة  $y$  متزايدة .  
ويمكن توضيح ذلك بالرسم التالى

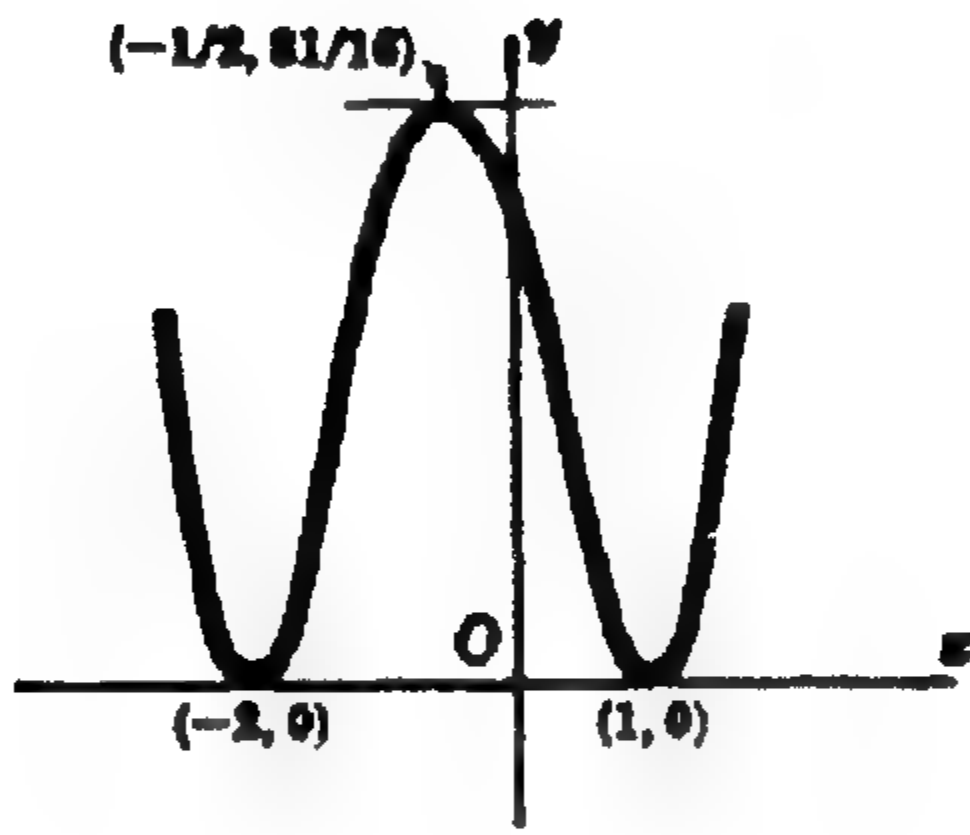
عظمى		صغرى		
$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$y' = +$ $y$ متزايدة		$y' = -$ $y$ متناقصة		$y' = +$ $y$ متزايدة

(ج) لنختبر القيمتين الحرجتين  $x = -3, 2$  بحثا عن القيم العظمى والصغرى .  
عندما تزايد  $x$  مرة بـ  $3$  فإن  $y'$  تغير إشارتها من  $+$  إلى  $-$  وبالتالي فهناك قيمة عظمى  $43/2$  عند  $x = -3$  .  
وعندما تزايد  $x$  مرة بـ  $2$  فإن  $y'$  تغير إشارتها من  $-$  إلى  $+$  وبالتالي فهناك قيمة صغرى  $2/3$  عند  $x = 2$  .

٣ - بفرض  $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$  أوجد

(أ) الفترات التى تزايد أو تناقص فيها  $y$  .

(ب) القيم العظمى والصغرى لـ  $y$



$$y' = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 2(x+2)(2x+1)(x-1)$$

بوضع  $y' = 0$  نجد أن القيم الحرجة هي  $x = -2, -1/2, 1$  .

(أ) عندما  $x < -2$  فإن  $y' = 2(-)(-)(-) = -$ ، وتكون  $y$  متناقصة .

عندما  $-2 < x < -1/2$  فإن  $y' = 2(+)(-)(-) = +$ ، وتكون  $y$  متزايدة .

عندما  $-1/2 < x < 1$  فإن  $y' = 2(+)(+)(-) = -$ ، وتكون  $y$  متناقصة .

عندما  $x > 1$  فإن  $y' = 2(+)(+)(+) = +$ ، وتكون  $y$  متزايدة .

ويمكن توضيح ذلك بالرسم التالى

شكل ٨ - ٣

قيمة صغرى		قيمة عظمى		قيمة صغرى		
$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < -1/2$	$x = -1/2$	$-1/2 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$y' = -$ $y$ متناقصة		$y' = +$ $y$ متزايدة		$y' = -$ $y$ متناقصة		$y' = +$ $y$ متزايدة

(ب) لنختبر القيم الحرجة  $x = -2, -1/2, 1$  بحثا عن القيم العظمى والصغرى .

عندما تزايد  $x$  مرة بـ  $2$  فإن  $y'$  تغير إشارتها من  $-$  إلى  $+$  وبالتالي فإن لـ  $y$  قيمة صغرى  $0$  عند  $x = -2$  .

عندما تزايد  $x$  مرة بـ  $1/2$  فإن  $y'$  تغير إشارتها من  $+$  إلى  $-$  وبالتالي فإن لـ  $y$  قيمة عظمى  $81/16$  عند  $x = -1/2$  .

عندما تزايد  $x$  مرة بـ  $1$  فإن  $y'$  تغير إشارتها من  $-$  إلى  $+$  وبالتالي فإن لـ  $y$  قيمة صغرى  $0$  عند  $x = 1$  .

٤ - بين أنه ليس للمنحنى  $y = x^3 - 8$  قيمة عظمى أو صغرى .

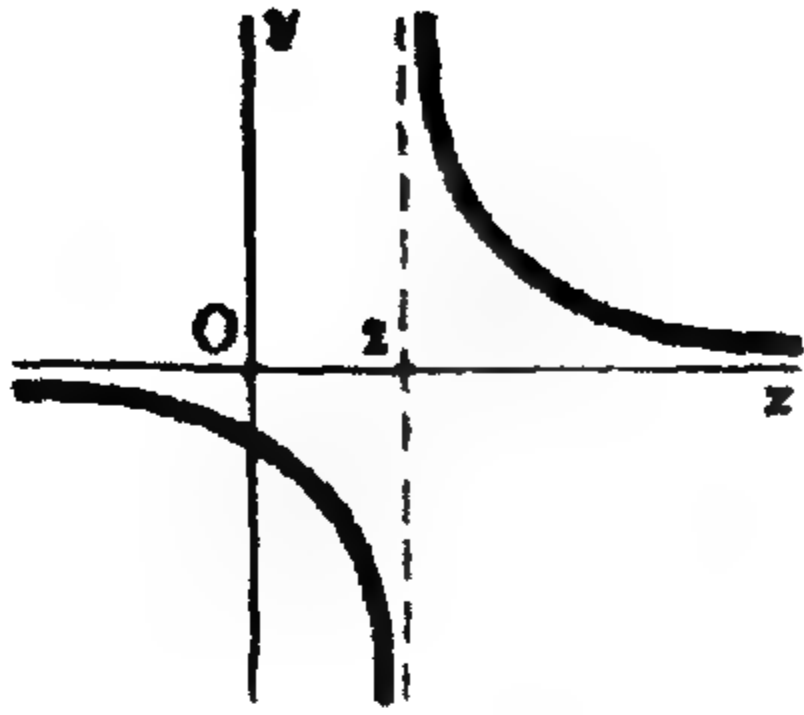
$y' = 3x^2$  وإذا وضعنا  $y' = 0$  نجد القيمة الحرجة  $x = 0$  .

رسواء كان  $x < 0$  أو  $x > 0$  فإن  $y' > 0$  وليس لـ  $y$  قيمة عظمى أو صغرى

ولكن للمنحنى عند  $x = 0$  نقطة انعطاف .

٥ - اختر  $y = f(x) = \frac{1}{x-2}$  للحصول على القيم العظمى والصغرى ،

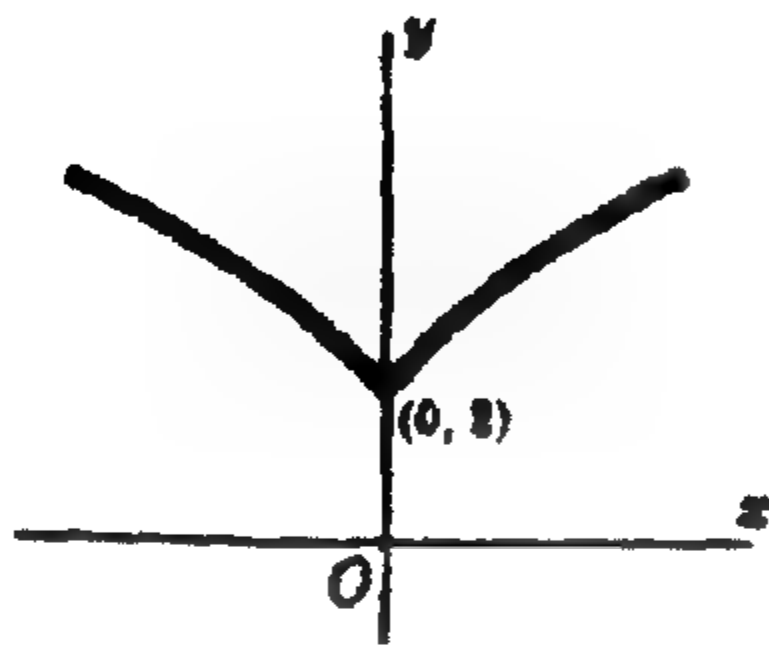
وحدد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة ومتناقصة .



شكل ٨ - ٤

$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$  وحيث أن  $f(2)$  غير معرفة . (أي أن  $f(x)$  تصبح غير محددة عندما تقترب من 2) فإنه ليس هناك نقط حرجة ، ومع ذلك نستخدم  $x=2$  لتحديد فترات تزايد  $f(x)$  وتناقصها .  
 $f'(x) < 0$  لجميع قيم  $x \neq 2$  . وبالتالي فإن  $f(x)$  تتناقص في الفترتين  $x < 2$  و  $x > 2$  .

٦ - حدد القيم العظمى والصغرى للدالة  $f(x) = 2 + x^{2/3}$  وحدد الفترات التي تزايد أو تتناقص فيها .



شكل ٨ - ٥

$f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}$  وهناك قيمة حرجة  $x=0$  حيث أن  $f'(x)$  تصبح غير محددة عندما تقترب  $x$  من الصفر .  
 وعندما  $x < 0$  تكون  $f'(x) = -$  والدالة  $f(x)$  متناقصة .  
 وعندما  $x > 0$  تكون  $f'(x) = +$  والدالة  $f(x)$  متزايدة .  
 أما عند  $x=0$  فللدالة قيمة صغرى تساوي 2 .

٧ - اختر  $y = x^{4/3}(1-x)^{1/3}$  للحصول على القيم العظمى والصغرى .

$$\text{هنا } y' = \frac{x^{1/3}(4-5x)}{3(1-x)^{2/3}} \text{ والقيم الحرجة هي } x = 0, 4/5, 1$$

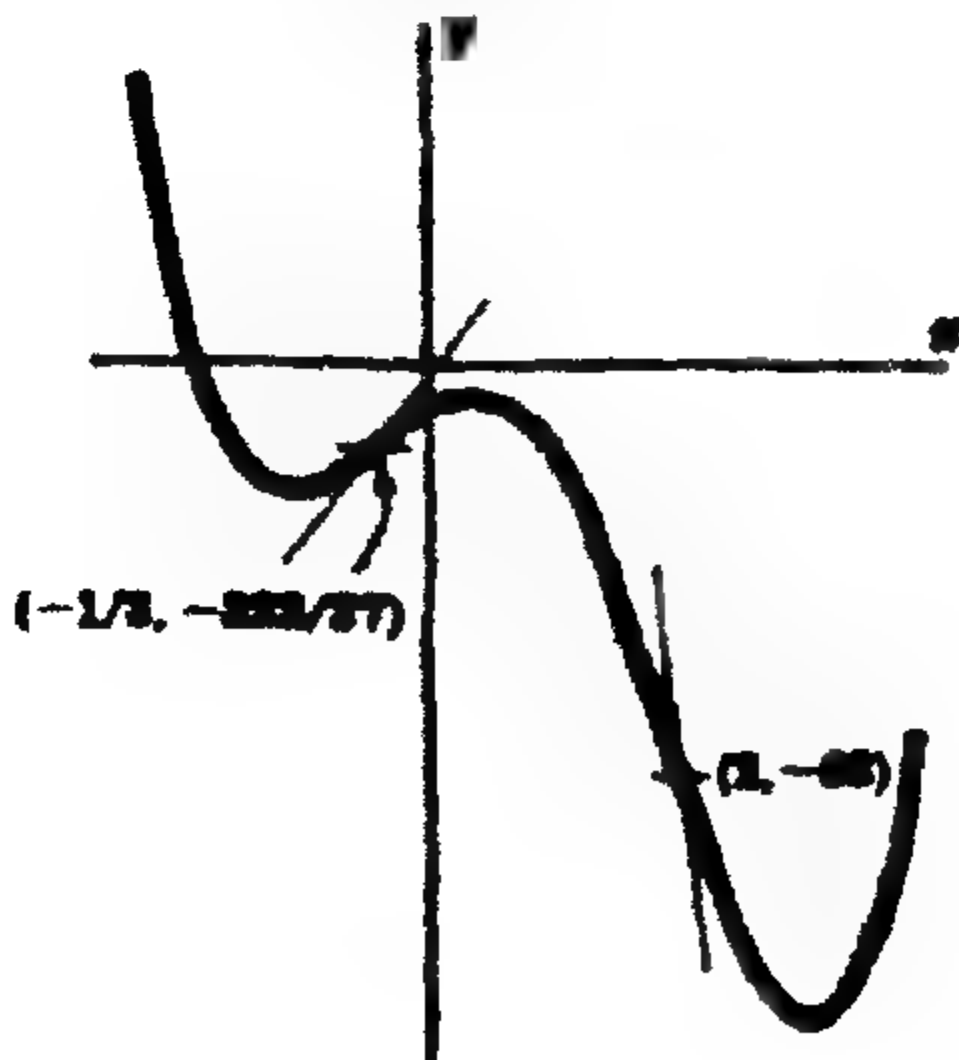
وعندما  $x < 0$  تكون  $y' < 0$  وعندما  $0 < x < 4/5$  تكون  $y' > 0$  .

وعندما  $4/5 < x < 1$  تكون  $y' < 0$  وعندما  $x > 1$  تكون  $y' > 0$  .

للدالة قيمة صغرى (تساوي صفر) عندما  $x=0$  وقيمة عظمى (تساوي  $4/25 \sqrt[3]{20}$ ) عندما  $x=4/5$  .

٨ - اختر  $y = |x|$  للحصول على القيم العظمى والصغرى

إن الدالة معرفة في كل مكان ولها مشتقة لجميع قيم  $x$  باستثناء  $x=0$  (انظر المسألة ١١ من الفصل الرابع) .  
 وبهذا نجد أن  $x=0$  قيمة حرجة . وعندما تكون  $x < 0$  نجد أن  $f'(x) = -1$  بينما نجد  $f'(x) = +1$  عندما  $x > 0$  وللدالة قيمة صغرى (تساوي صفر) عندما  $x=0$  . إن هذه النتيجة واضحة جداً من بيان الدالة .



شكل ٨ - ٦

٩ - اختر  $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$  لمعرفة اتجاه الانحناء ولتعيين نقط الانطفاف

$$y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$$

$$y'' = 36x^2 - 60x - 24 = 12(3x+1)(x-2)$$

ضع  $y'' = 0$  وحل هذه المعادلة تحصل على النقط التي يحتمل أن تكون نقط انطفاف وهي  $x = -1/3, 2$  .

وعندما  $x < -1/3$  نجد  $y'' = +$  والقوس مقعراً لأعلى .

وعندما  $-1/3 < x < 2$  نجد  $y'' = -$  والقوس مقعراً لأسفل .

وعندما  $x > 2$  نجد  $y'' = +$  والقوس مقعراً لأعلى .

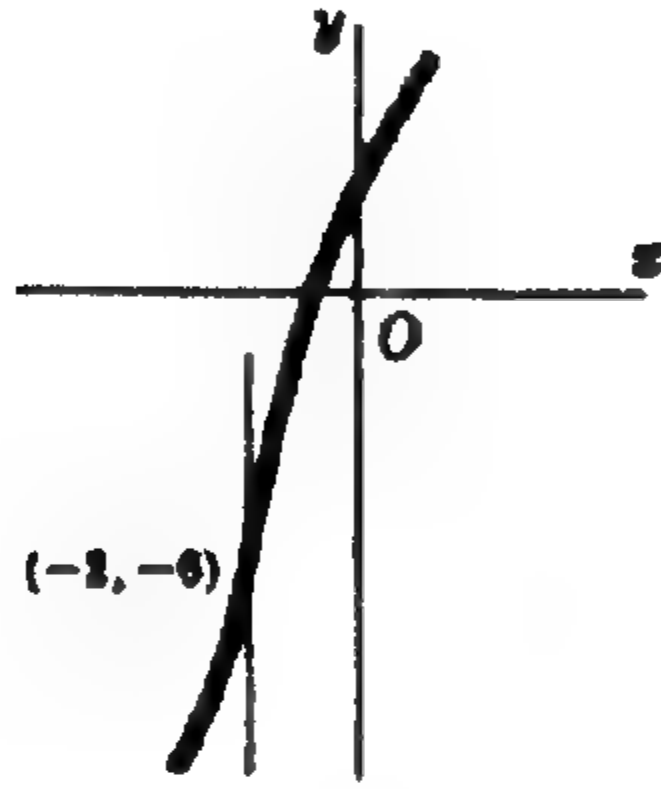
$x < -1/3$	$x = -1/3$	$-1/3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$y'' = +$ التقعر لأعلى		$y'' = -$ التقعر لأسفل		$y'' = +$ التقعر لأعلى

نقط الانعطاف هي  $(-1/3, 322/27)$  و  $(2, -63)$  لأن  $y''$  تغير إشارتها عند كل من  $x = -1/3, x = 2$ .

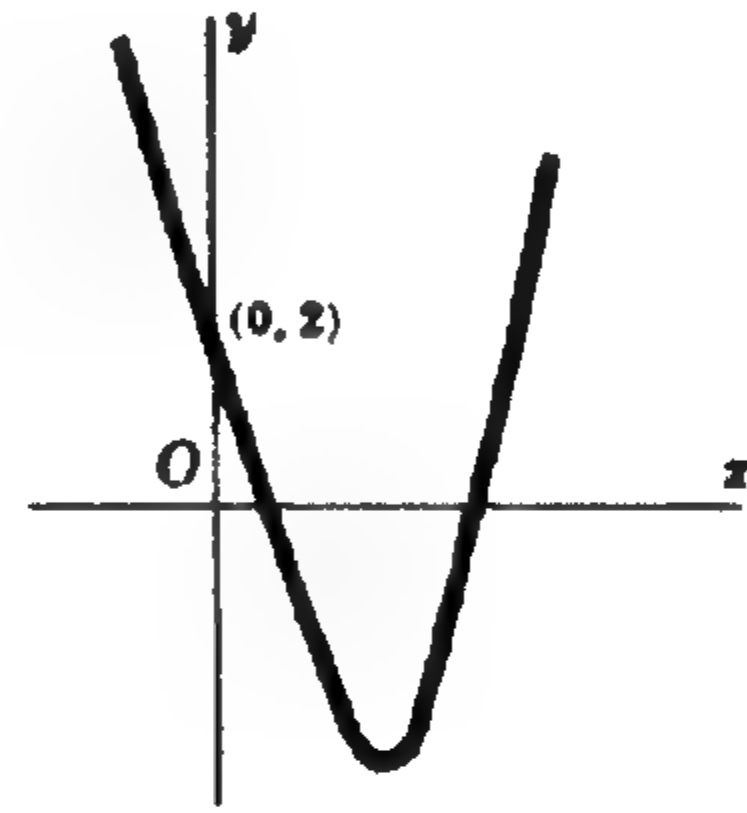
١٠ - اختبر  $y = x^3 - 6x + 2$  لتحصل على اتجاه الانحناء ونقط الانعطاف . انظر الشكل ٨ - ٧ .

$y'' = 12x^2$  ونقطة الانعطاف الممكنة هي عند  $x = 0$  .

وحيث أننا نجد  $y'' = +$  على كل من الفترتين  $x < 0$  و  $x > 0$  فالقوسان مقعران لأعلى . والنقطة  $(0, 2)$  ليست نقطة انعطاف .



شكل ٨ - ٨



شكل ٨ - ٧

١١ - اختبر  $y = 3x + (x+2)^{2/3}$  لمعرفة اتجاه الانحناء ونقط الانعطاف . انظر الشكل ٨ - ٨ .

$$y' = 3 + \frac{3}{5(x+2)^{2/3}} \quad y'' = \frac{-6}{25(x+2)^{5/3}}$$

ونقطة الانعطاف الممكنة هي عند  $x = -2$  .

ولكن عندما  $x > -2$  فإن  $y'' = -$  والقوس مقعر لأسفل .

وعندما  $x < -2$  فإن  $y'' = +$  والقوس مقعر لأعلى والنقطة  $(-2, -6)$  نقطة انعطاف .

١٢ - أوجد معادلات المماسات عند نقط الانعطاف المنحني

$$y = f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$$

توجد نقطة انعطاف عند  $x = x_0$  عندما  $f''(x_0) = 0$  و  $f''(x_0) \neq 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$$

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2)$$

$$f'''(x) = 24x - 36 = 12(2x-3)$$

ونقطتا الانعطاف الممكنتان هما عند  $x = 1, 2$  . وبما أن  $f'''(1) \neq 0, f'''(2) \neq 0$

فالنقطتان  $(1, -1)$  و  $(2, 0)$  هما نقطتا انعطاف .

وبما أن الميل عند  $(1, -1)$  هو  $m = f'(1) = 2$  فمعادلة المماس تكون .

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{أو} \quad y + 1 = 2(x - 1) \quad \text{أو} \quad y = 2x - 3$$

والميل عند  $(2, 0)$  هو  $f'(2) = 0$  ومعادلة المماس هي  $y = 0$  .

١٣ - بين أن نقط انعطاف  $y = \frac{a-x}{x^2+a^2}$  تقع على خط مستقيم ثم أوجد معادلاته .

$$y' = \frac{x^2 - 2ax - a^2}{(x^2 + a^2)^2} \quad \text{و} \quad y'' = -2 \frac{x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + a^3}{(x^2 + a^2)^3}$$

الآن  $x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + a^3 = 0$  عندما  $x = -a$  و  $a(2 \pm \sqrt{3})$  ونقط الانعطاف هي :  
 $(-a, 1/a), (a(2 + \sqrt{3}), (1 - \sqrt{3})/4a), (a(2 - \sqrt{3}), (1 + \sqrt{3})/4a)$ .  
 إن ميل المستقيم الواصل بين أى نقطتين من هذه النقط يساوى  $-1/4a^2$  ومعادلة مستقيم نقط الانعطاف هو  $x + 4a^2y = 3a$ .

١٤ - اختبر  $f(x) = x(12 - 2x)^2$  للحصول على القيم العظمى والصغرى مستخدماً طريقة المشتقة الثانية .

$$(أ) \quad f'(x) = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6). \quad \text{والقيم الحرجة هي } x = 2, 6.$$

$$(ب) \quad f''(x) = 12(2x - 8) = 24(x - 4).$$

$$(ج) \quad \text{إن } f''(2) < 0 \text{ وبالتالي فلداالة } f(x) \text{ قيمة عظمى } 128 \text{ عند } x = 2.$$

$$\text{وإن } f''(6) > 0 \text{ وبالتالي فلداالة } f(x) \text{ قيمة صغرى } 0 \text{ عند } x = 6.$$

١٥ - اختبر  $y = x^3 + \frac{250}{x}$  للحصول على القيم العظمى والصغرى مستخدماً طريقة المشتقة الثانية .

$$(أ) \quad y' = 2x - \frac{250}{x^2} = \frac{2(x^3 - 125)}{x^2} \quad \text{والقيمة الحرجة هي } x = 5.$$

$$(ب) \quad y'' = 2 + \frac{500}{x^3}$$

$$(ج) \quad \text{إن } y'' > 0 \text{ عند } x = 5 \text{ ولداالة } y \text{ قيمة صغرى } 75 \text{ عند } x = 5.$$

١٦ - اختبر  $y = (x - 2)^{2/3}$  للحصول على القيم العظمى والصغرى .

$$(أ) \quad y' = \frac{2}{3}(x - 2)^{-1/3} = \frac{2}{3(x - 2)^{1/3}} \quad \text{والقيمة الحرجة هي } x = 2.$$

$$(ب) \quad y'' = -\frac{2}{9}(x - 2)^{-4/3} = -\frac{2}{9(x - 2)^{4/3}}$$

$$(ج) \quad \text{إن } y'' \text{ تصبح غير محددة عندما تقترب } x \text{ من } 2 \text{ إذن فالاختبار فاشل.}$$

وباستخدام طريقة المشتقة الأولى . فإن  $y = -1$  عندما  $x = 2$  و  $y = +$  عندما  $x > 2$  وبهذا نجد أن  $y$  قيمة صغرى نسبية 0 عند  $x = 2$ .

١٧ - أثبت أن الدالة  $f(x)$  متزايدة عند  $x = x_0$  إذا كان ، من أجل  $h$  الموجبة والصغيرة بقدر كاف .

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h).$$

$$\text{إذا كان } f'(x_0) > 0 \text{ فإن } f(x) \text{ متزايدة عند } x = x_0.$$

$$\text{لأنه إذا كان } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) > 0 \text{ فإن } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$$

من أجل قيم  $|\Delta x|$  الصغيرة بقدر كاف وذلك استناداً إلى المسألة ٤ من الفصل الثالث .

$$\text{وإذا كان } \Delta x < 0 \text{ فإن } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0 \text{ وبوضع } \Delta x = -h \text{ نجد :}$$

$$f(x_0 - h) < f(x_0) \text{ أما إذا كان } \Delta x > 0 \text{ ولنضع } \Delta x = h \text{ مثلاً فإنه يكون } f(x_0 + h) > f(x_0)$$

$$\text{وبالتالى } f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h) \text{ كما هو مطلوب فى التعريف . أنظر المسألة ٢٢ من أجل نظرية}$$

مرافقة .

١٨ - أثبت أنه إذا كانت  $y = f(x)$  قابلة للاختلاف على  $a \leq x \leq b$  وإذا كان  $f(x)$  قيمة عظمى نسبية عند  $x = x_0$

$$\text{حيث } a < x_0 < b \text{ فإن } f'(x_0) = 0.$$



بما أن  $f(x)$  قيمة عظمى نسبة عند  $x = x_0$  فإنه لجميع  $\Delta x$  بحيث  $|\Delta x|$  صغير بقدر كاف ، يكون :

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0 \quad \text{و} \quad f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$$

والآن عندما  $\Delta x < 0$  فإن  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$  و  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$  و  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$  .  
كذلك عندما  $\Delta x > 0$  فإن  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$  و  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$  و  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$  .  
وهكذا يكون  $0 \leq f'(x_0) \leq 0$  و  $f'(x_0) = 0$  وهو المطلوب إثباته . أنظر المسألة ٢٤ من أجل نظرية مرافقة .

١٩ - أثبت اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى : إذا كان كل من  $f(x)$  و  $f'(x)$  قابلاً للاشتقاق على  $a \leq x \leq b$  وكانت  $x = x_0$  حيث  $a < x_0 < b$  قيمة حرجية لـ  $f(x)$  وكانت  $f''(x_0) > 0$  فإن لـ  $f(x)$  قيمة صغرى نسبية عند  $x = x_0$  .

بما أن  $f''(x_0) > 0$  فإن  $f'(x)$  متزايدة عند  $x = x_0$  وبالتالي فإنه يوجد عدد  $h > 0$  بحيث يكون  $f'(x_0 - h) < f'(x_0) < f'(x_0 + h)$  . وهكذا إذا كانت  $x$  قريبة من  $x_0$  ولكن أصغر منها فإن  $f'(x) < f'(x_0)$  . أما إذا كانت  $x$  قريبة من  $x_0$  ولكن أكبر منها فإن  $f'(x) > f'(x_0)$  . والآن نستطيع القول إنه بما أن  $f'(x_0) = 0$  و  $f'(x) < 0$  عندما  $x < x_0$  و  $f'(x) > 0$  عندما  $x > x_0$  فإن الشروط (أنظر المسألة ١٨) التي تضمن وجود قيمة صغرى لـ  $f(x)$  عند  $x = x_0$  محققة . نترك للقارئ أن يبرهن النظرية المرافقة في حالة القيمة العظمى النسبية .

٢٠ - لننظر في مسألة البحث عن نقطة  $(X, Y)$  على القطع الزائدة  $x^2 - y^2 = 1$  التي هي أقرب ما يمكن من نقطة مبروزة  $P(a, 0)$  حيث  $a > 0$  . إن مربع البعد بين النقطتين هو  $D^2 = (X - a)^2 + Y^2$  ثم إن  $X^2 - Y^2 = 1$  لوقوع النقطة  $(X, Y)$  على القطع الزائد .  
فإذا عبرنا عن  $D^2$  بدلالة  $X$  فقط نجد أن :

$$f(X) = (X - a)^2 + X^2 - 1 = 2X^2 - 2aX + a^2 - 1$$

حيث  $X = \frac{1}{2}a$  هي القيمة الحرجة الوحيدة .  
لنأخذ  $a = \frac{1}{2}$  فنجد أن أي نقطة تحقق المطلوب لأن  $Y$  تخيلية للقيمة الحرجة  $X = \frac{1}{4}$  غير أنه يتضح من الشكل أن أقرب نقطة على القطع للنقطة  $P(\frac{1}{4}, 0)$  هي النقطة  $V(1, 0)$  . بسبب الإشكال هنا هو تجاوزنا الحقيقة لأنه كان ينبغي في هذه الحالة أن نبحث عن القيمة الصغرى للدالة  $f(X) = (X - \frac{1}{2})^2 + X^2 - 1$  ضمن القيمة  $X \geq 1$  ( نلاحظ أن هذا الشرط لم ينشأ عن الدالة  $f(X)$  نفسها . فالدالة  $f(X)$  دون وجود قيود على  $X$  قيمة صغرى نسبية عند  $X = \frac{1}{4}$  ) أما في الفترة  $X \geq 1$  فالدالة  $f(X)$  قيمة صغرى مطلقه عند الطرف  $X = 1$  دون أن يكون لها قيمة صغرى نسبية . نترك كتمرين البحث في الحالتين (i)  $a = \sqrt{2}$  و (ii)  $a = 3$  .

### مسائل إضافية

٢١ - اختر كل دالة في المسألة ١ وحدد فترات تزايد الدالة وتناقصها .  
ج : (أ) تزايد  $x < 0$  تناقص  $x > 0$  (ب) تزايد  $x > 3$  تناقص  $x < 3$  (ج) تزايد  $-5/2 < x < 0$  تناقص  $0 < x < 5/2$  (د) تزايد  $x > 4$  .

٢٢ - (أ) بين أن الدالة  $y = x^3 + 20x - 6$  متزايدة لجميع قيم  $x$  .  
(ب) بين أن الدالة  $y = 1 - x^3 - x^7$  متناقصة لجميع قيم  $x$  .

٢٣ - اختر كلا من الدوال التالية للحصول على القيم العظمى والصغرى مستعملا طريقة المشتقة الأولى :

- (أ)  $f(x) = x^3 + 2x - 3$  ج : قيمة صغرى نسبية = -4 عند  $x = -1$   
 (ب)  $f(x) = 3 + 2x - x^2$  ج : قيمة عظمى نسبية = 4 عند  $x = 1$   
 (ج)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$  ج : قيمة صغرى نسبية = -256/27 عند  $x = 2/3$   
 قيمة عظمى نسبية = 0 عند  $x = -2$   
 (د)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$  ج : قيمة عظمى نسبية = -4 عند  $x = 1$   
 قيمة صغرى نسبية = -8 عند  $x = 3$   
 (هـ)  $f(x) = (2 - x)^3$  ج : لا يوجد أية قيمة عظمى أو صغرى  
 (و)  $f(x) = (x^2 - 4)^3$  ج : قيمة عظمى نسبية = 16 عند  $x = 0$   
 قيمة صغرى نسبية = 0 عند  $x = \pm 2$   
 (ز)  $f(x) = (x - 4)^4 (x + 3)^3$  ج : قيمة عظمى نسبية = 69/2 عند  $x = 0$   
 قيمة صغرى نسبية = 0 عند  $x = 4$   
 لا قيمة عظمى ولا قيمة صغرى عند  $x = -3$   
 (ح)  $f(x) = x^3 + 48/x$  ج : قيمة عظمى نسبية = -32 عند  $x = -2$   
 قيمة صغرى نسبية = 32 عند  $x = 2$   
 (ط)  $f(x) = (x - 1)^{1/3} (x + 2)^{2/3}$  ج : قيمة عظمى نسبية = 0 عند  $x = -2$   
 قيمة صغرى نسبية =  $-\sqrt[3]{4}$  عند  $x = 0$   
 لا قيمة عظمى ولا قيمة صغرى عند  $x = 1$

٢٤ - اختر دوال المسألة ٢٣ (أ) - (و) للحصول على القيم العظمى والصغرى باستخدام طريقة المشتقة الثانية .  
 عين كذلك نقط الانعطاف والفترات التي تكون عندها الدالة مقعرة لأعلى والفترات التي عندها الدالة مقعرة لأسفل .

- ج (أ) لا يوجد نقطة انعطاف . التقرر لأعلى باستمرار .  
 (ب) لا يوجد نقطة انعطاف . التقرر لأسفل باستمرار .  
 (ج) نقطة انعطاف  $x = -2/3$  . التقرر لأعلى  $x > -2/3$  والتقرر لأسفل  $x < -2/3$  .  
 (د) نقطة انعطاف  $x = 2$  . التقرر لأعلى  $x > 2$  والتقرر لأسفل  $x < 2$  .  
 (هـ) نقطة انعطاف  $x = 2$  . التقرر لأسفل  $x > 2$  والتقرر لأعلى  $x < 2$  .  
 (و) نقطة الانعطاف  $x = \pm 2\sqrt{3}/3$  . التقرر لأعلى  $x > 2\sqrt{3}/3$  و  $x < -2\sqrt{3}/3$  .  
 التقرر لأسفل  $-2\sqrt{3}/3 < x < 2\sqrt{3}/3$

٢٥ - بين أنه لا يوجد دالة  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  قيمة عظمى نسبية أو قيمة صغرى نسبية .

٢٦ - اختر  $y = x^3 - 3px + q$  للحصول على القيم العظمى والصغرى النسبية .  
 ج : قيمة صغرى =  $q - 2p^{3/2}$  وقيمة عظمى =  $q + 2p^{3/2}$  بشرط  $p > 0$  وخلاف ذلك لا توجد قيم عظمى أو صغرى .

٢٧ - بين أن  $y = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \dots + (a_n - x)^2$  قيمة صغرى نسبية عندما

$$x = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n.$$

٢٨ - أثبت أنه إذا كانت  $f''(x_0) = 0$  و  $f'''(x_0) \neq 0$  فتمتلك توجد نقطة انعطاف عند  $x = x_0$

٢٩ - أثبت أنه إذا كانت  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  لها نقطتان حرجتان فإن نقطة الانعطاف تقع في منتصف المسافة بينهما . وإذا كان للمنحنى نقطة حرجية واحدة فإنها تكون نقطة انعطاف .

٣٠ - نقول إن لدالة  $f(x)$  قيمة عظمى (صغرى) مطلقة عند  $x = x_0$  إذا كان  $f(x_0)$  أكبر (أصغر) من أية قيمة أخرى (أو مساوية لها) يمكن أن تأخذها الدالة على مجال التعريف . استخدم الأشكال (البيانية) لتوضح أن (أ) لدالة  $y = -x^2$  قيمة عظمى مطلقة عند  $x = 0$  (ب) لدالة  $y = (x-3)^2$  قيمة صغرى مطلقة (تساوى صفر) عند  $x = 3$  (ج) لدالة  $y = \sqrt{25-4x^2}$  قيمة عظمى مطلقة (تساوى 5) عند  $x = 0$  . وقيمة صغرى مطلقة (تساوى صفر) عند  $x = \pm 5/2$  (د) لدالة  $y = \sqrt{x-4}$  قيمة صغرى مطلقة (تساوى صفر) عند  $x = 4$  .

٣١ - ابحث في القيم العظمى والصغرى المطلقة في الفترات المذكورة فقط .  
 (أ)  $y = -x^2$  على  $-2 < x < 2$  ج : قيمة عظمى ( $= 0$ ) عند  $x = 0$  .  
 (ب)  $y = (x-3)^2$  على  $0 \leq x \leq 4$  قيمة عظمى ( $= 9$ ) عند  $x = 0$  قيمة صغرى ( $= 0$ ) عند  $x = 3$  .  
 (ج)  $y = \sqrt{25-4x^2}$  على  $-2 \leq x \leq 2$  ج : قيمة عظمى ( $= 5$ ) عند  $x = 0$  قيمة صغرى ( $= 3$ ) عند  $x = \pm 2$  .  
 (د)  $y = \sqrt{x-4}$  على  $4 \leq x \leq 29$  ج : قيمة عظمى ( $= 5$ ) عند  $x = 29$  قيمة صغرى ( $= 0$ ) عند  $x = 4$  .  
 ملاحظة : إن هذه القيم هي القيم العظمى والصغرى المتناهية في الخاصية II الفصل الثالث للدوال المستمرة .

٣٢ - تحقق من أن الدالة  $f(x)$  متزايدة (متناقصة) عند  $x = x_0$  إذا كانت زاوية ميل المماس عند  $x = x_0$  للمنحنى  $y = f(x)$  زاوية حادة (منفرجة) .

٣٣ - أذكر مع البرهان مرافقة المسألة ١٧ لدالة المتناقصة .

٣٤ - أذكر مع البرهان مرافقة المسألة ١٨ للقيمة الصغرى النسبية .

٣٥ - اختر  $2x^3 - 4xy + 3y^3 - 8x + 8y - 1 = 0$  لمحول على النقط العظمى والصغرى .  
 ج : عظمى عند  $(5, 3)$  وصغرى عند  $(-1, -3)$

٣٦ - عند مرور تيار كهربائي في ملف دائري نصف قطره  $r$  فإنه يؤثر بقوة  $F = \frac{kx}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$  على مغناطيس صغير موضوع على مسافة  $x$  أعلى مركز الملف . بين أن قيم  $F$  تكون أكبر ما يمكن عندما  $x = \frac{1}{2}r$  .

٣٧ - إذا كان الشغل المبذول بواسطة خلية ثلاثية ، ذات قوة دافعة كهربائية ثابتة  $E$  ومقدومة داخلية ثابتة  $r$  ، لإمرار تيار منتظم خلال مقاومة خارجية  $R$  يقاب مع  $E^2 R / (r + R)^2$  فأثبت أن الشغل المبذول يكون أكبر ما يمكن عندما  $R = r$  .

# الفصل التاسع

## مسائل تطبيقية للقيم العظمى والصغرى

### مسائل في القيم العظمى والصغرى :

ليس من الضروري في التطبيقات البسيطة البحث عن القيم العظمى والصغرى النسبية ، حيث يتم الاختيار المناسب للقيم الحرجة من دراسة التمرين نفسه .

ومن الممكن في الوقت ذاته أن تكون القيم العظمى أو الصغرى النسبية قيما عظمى أو صغرى مطلقة ( أى أن تكون أكبر وأصغر قيمة ) للدالة . في مثل هذه الحالات تكون العبارات أكبر ما يمكن . . . إلخ مبررة في نص التمرين .

### مسائل محلولة

١ - قسم العدد 120 إلى عددين بحيث يكون حاصل الضرب  $P$  لأحدهما بمربع الآخر أكبر ما يمكن .

ليكن  $x$  أحد العددين فيكون  $120 - x$  هو العدد الآخر ويكون  $P = (120 - x)x^2$

وبالتالي  $(80 = x)$   $dP/dx = 3x$  والقيم الحرجة هي  $x = 0$  و  $x = 80$  .

ومن الواضح أن القيمة الحرجة  $x = 0$  مرفوضة . والعددين المطلوبين هما  $x = 80$  و  $120 - x = 40$  .

٢ - مساحة قطعة من ورق الإعلانات تساوى  $2 \text{ m}^2$  . فإذا كانت الهوامش المطلوبة من أهل الورقة وأسفلها  $21 \text{ cm}$  وعل

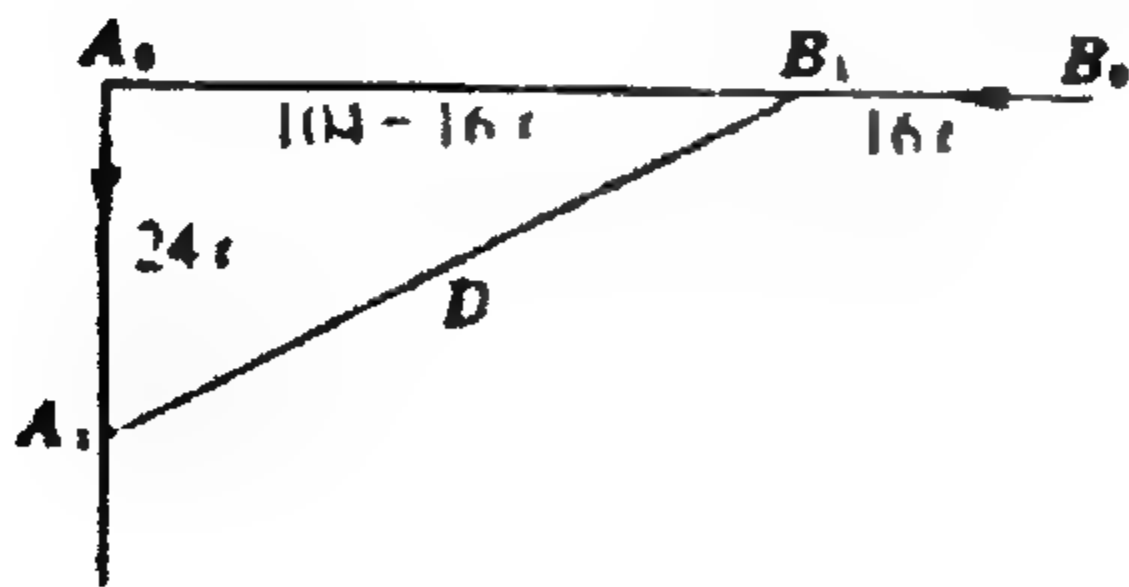
الجانبين  $14 \text{ cm}$  ، فإما بعدا قطعة الورق كي تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن ؟

ليكن  $x$  طول الإعلان فيكون  $2/x$  عرضها . أنظر الشكل ٩ - ١

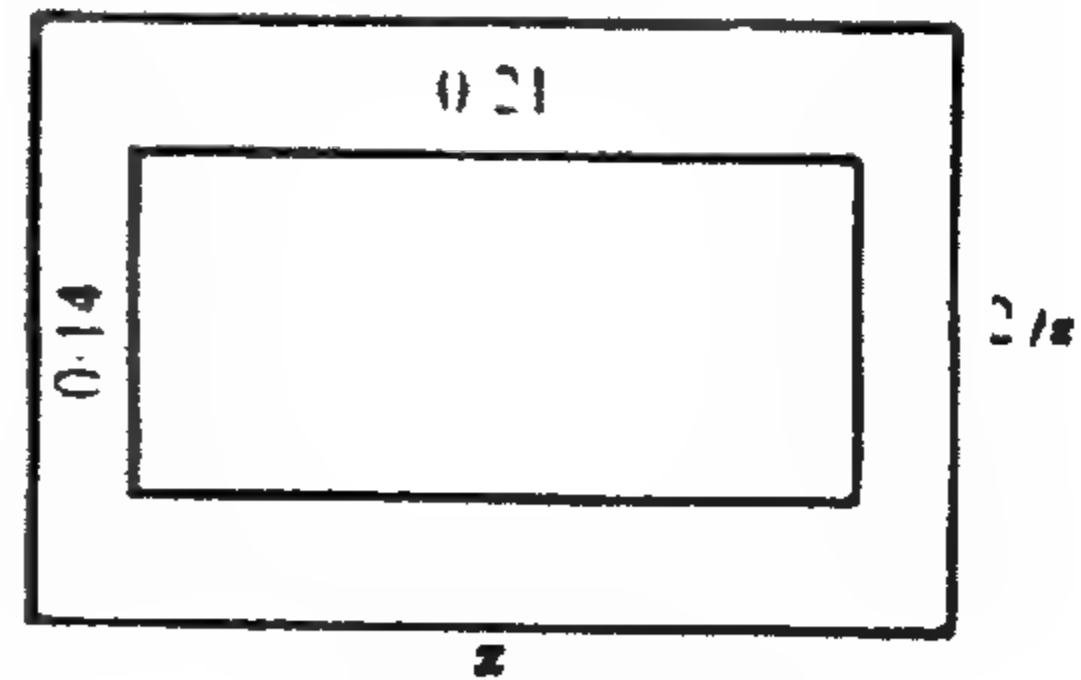
وتكون المساحة المطبوعة هي  $A = (x - 0.28) (\frac{2}{x} - 0.42) \text{ m}^2$  .

إذن  $\frac{dA}{dx} = \frac{0.56}{x^2} - 0.42$  وبجمل المعادلة  $\frac{dA}{dx} = 0$  نجد القيمة الحرجة  $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  .

والبعدان المطلوبان لقطعة الورق هما  $x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m}$  ،  $\frac{2}{x} = \sqrt{3} \text{ m}$  .



شكل ٩ - ٢



شكل ٩ - ١

٢ - كانت الباخرة  $B$  في الساعة التاسعة صباحا على بعد  $104 \text{ km}$  إلى الشرق تماما بالنسبة لباخرة أخرى  $A$ . وكانت  $B$  مبحرة نحو الغرب تماما بسرعة  $16 \text{ km/h}$  أما  $A$  فكانت مبحرة نحو الجنوب تماما بسرعة  $24 \text{ km/h}$  ، فإذا استمرت وفق البرنامج الموصوف ففى تكونان أقرب ما يمكن من بعضهما وعلى أى بعد ؟ أنظر الشكل ٩ - ٢ .

لتفرض  $A_0$  و  $B_0$  موضعى الباخرتين في الساعة التاسعة صباحا و  $A_1$  و  $B_1$  موضعيهما بعد  $t$  ساعة . فتكون المسافة المقطوعة خلال  $t$  ساعة بالباخرة  $A$  هي  $24t \text{ km}$  وبالباخرة  $B$  هي  $16t \text{ km}$  . والمسافة  $D$  بين الباخرتين تعطى بالعلاقة  $D^2 = (24t)^2 + (104 - 16t)^2$  .

وبالتالى  $\frac{dD}{dt} = \frac{832t - 1664}{D}$  وبحل المعادلة  $\frac{dD}{dt} = 0$  نجد انقيمة الحرجة  $t = 2$  التى تعطى أقل قيمة ممكنة لـ  $D$  بوضع  $t = 2$  فى  $D^2 = (24t)^2 + (104 - 16t)^2$  نجد  $D = 24\sqrt{13} \text{ km}$  والباخرتان تكونان أقرب ما يمكن من بعضهما في الساعة الحادية عشرة صباحا وتكون المسافة بينهما في ذلك الوقت هي  $24\sqrt{31} \text{ km}$  .

٤ - وعاء اسطوانى قاعدته دائرية الشكل وحجمه  $1000 \text{ cm}^3$  . أوجد أبعاده بحيث تكون كمية المعدن اللازمة لصنعه ( أى مساحته السطحية ) أصغر ما يمكن وذلك في الحالتين ( أ ) الرعاء مفتوح من قاعدته العليا ( ب ) الوعاء مغلق . لتفرض أن  $r$  ،  $h$  هما نصف قطر القاعدة والارتفاع مقدرين بالسنتيمترات على الترتيب ولتكن  $A$  كمية المعدن و  $V$  حجم الوعاء .

$$(1) \quad V = \pi r^2 h = 1000 \quad \text{و} \quad A = 2\pi rh + \pi r^2$$

لتعبر عن  $A$  بدلالة متغير واحد يبنى أن نحل العلاقة الأولى بالنسبة لـ  $h$  ( حيث أنها الأسهل ) ثم نعوض في الثانية فنحصل على

$$A = 2\pi r(1000/\pi r^2) + \pi r^2 = 2000/r + \pi r^2 \quad \text{والقيمة الحرجة هي} \quad r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$\text{وبالتالى} \quad h = 1000/\pi r^2 = 10/\sqrt[3]{\pi} \text{ cm} \quad \text{إذن} \quad h = r = 10/\sqrt[3]{\pi} \text{ cm}$$

$$(ب) \quad V = \pi r^2 h = 1000 \quad \text{و} \quad A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(1000/\pi r^2) + 2\pi r^2 = 2000/r + 2\pi r^2$$

$$\text{والقيمة الحرجة هي} \quad r = 5\sqrt[3]{4/\pi} \quad \text{و} \quad \frac{dA}{dr} = -\frac{2000}{r^2} + 4\pi r = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

$$\text{وبالتالى فإن} \quad h = 1000/\pi r^2 = 10\sqrt[3]{4/\pi} \quad \text{إذن} \quad h = 2r = 10\sqrt[3]{4/\pi} \text{ cm}$$

٥ - إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج  $x$  جهاز راىو بريا تساوى  $(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$  دولارا والسر الذى يمكن أن يباع به الجهاز الواحد  $(50 - \frac{1}{2}x)$  دولارا .

( أ ) نكم يبنى أن يكون الإنتاج اليوم لنحصل على أكبر ربح كل ممكن ؟

( ب ) بين أن تكلفة الإنتاج هي صغرى نسبيا .

$$(1) \quad \text{إن الربح من بيع } x \text{ جهاز في اليوم يساوى} \quad P = x(50 - \frac{1}{2}x) - (\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$$

$$\text{بحل المعادلة} \quad \frac{dP}{dx} = 0 \quad \text{فى القيمة الحرجة} \quad x = 10$$

والإنتاج الذى يطلو ربحا أكبر ما يمكن هو 10 أجهزة يوميا .

$$(ب) \quad \text{تكلفة الإنتاج هي} \quad C = \frac{8(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)}{x} = 8\left(\frac{1}{4}x + 35 + \frac{25}{x}\right)$$

$$\text{وبحل المعادلة} \quad \frac{dC}{dx} = 0 \quad \text{نجد} \quad x = 10 \quad \text{والتكلفة صغرى .}$$



٩ - إذا كانت نفقات الوقود لقاطرة متحركة تتناسب مع مربع السرعة ولكن 25 دولار في الساعة . لـ سرعة 40 km/hr وإذا كانت هناك نفقات أخرى تقدر بـ 100 دولار في الساعة مهما كانت السرعة فأوجد السرعة التي تجعل النفقات لكل كيلومتر أقل ما يمكن .

لتكن  $v$  السرعة المطلوبة و  $C$  النفقات الكلية لكل كيلومتر .

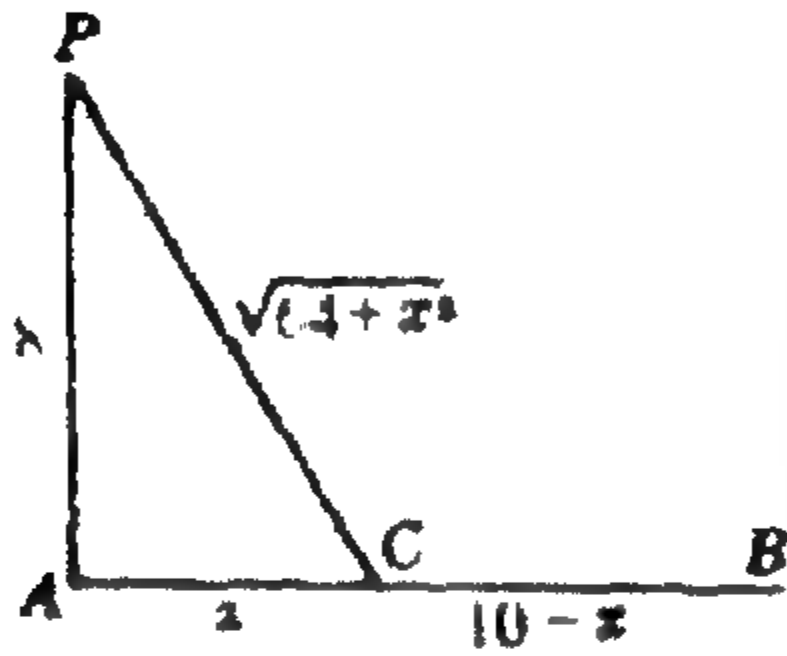
فتكون نفقات الوقود في كل ساعة  $kv^2$  حيث  $k$  ثابت ينبغي تعيينه عندما  $v = 40$  km/hr و  $kv^2 = 1600$   $k = 25$

إذن  $k = 1/64$  وتكون النفقات ( مقدرة بالدولار / كم ) =  $\frac{\text{النفقات مقدرة بالدولار / ساعة}}{\text{السرعة مقدرة بـ كم / ساعة}}$

$$C = \frac{v^2/64 + 100}{v} = \frac{v}{64} + \frac{100}{v} \text{ أي}$$

ومنه  $\frac{dC}{dv} = \frac{1}{64} - \frac{100}{v^2} = \frac{(v-80)(v+80)}{64v^2}$  وبما أن  $v > 0$  فإن القيمة الحرجة المناسبة الوحيدة هي  $v = 80$

والسرعة الأفضل اقتصاديا هي 80 km/hr .



٧ - رجل في زورق تجديف عند النقطة  $P$  على بعد 8 km من النقطة  $A$  ، أقرب نقطة إليه من الشاطئ المستقيم . يرغب هذا الرجل أن يصل النقطة  $B$  ، التي تبعد 10 km من  $A$  على الشاطئ في أقصر وقت ممكن . فإذا كانت سرعة تجديف هذا الرجل 3 km/hr وسرعة ماشيا 6 km/hr ، شكل ٩ - ٣ .

شكل ٩ - ٣

أين ينبغي أن يهبط إلى اليابسة كي يصل بأقصر وقت ممكن ؟

لتكن  $C$  النقطة بين  $A$  و  $B$  التي ينبغي أن يزل منها الرجل ، ولنفرض  $AC = x$  . المسافة المقطوعة تجديفا تساوي  $PC = \sqrt{64+x^2}$  والزمن  $t_1$  اللازم لذلك يساوي ( المسافة / السرعة ) .

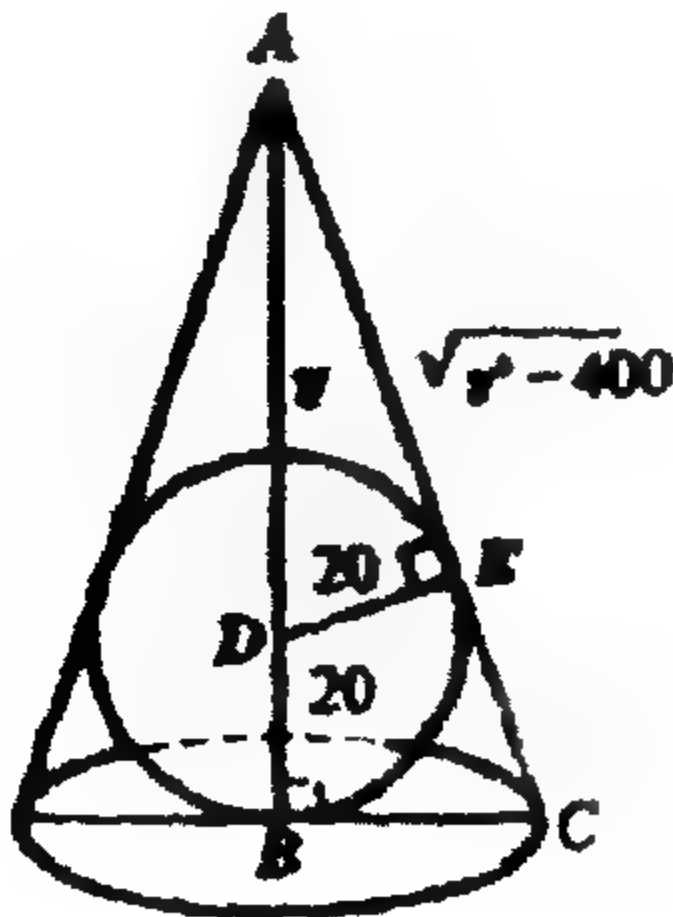
$t_1 = \frac{\sqrt{64+x^2}}{3}$  ثم إن المسافة المقطوعة مشيا هي  $10-x$  والزمن اللازم  $t_2 = (10-x)/6$  والزمن الكلي المطلوب

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{3}\sqrt{64+x^2} + \frac{1}{6}(10-x) \text{ يكون}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{3\sqrt{64+x^2}} - \frac{1}{6} = \frac{2x - \sqrt{64+x^2}}{6\sqrt{64+x^2}}$$

والقيمة الحرجة من  $2x - \sqrt{64+x^2} = 0$  هي  $x = \frac{4}{3}\sqrt{3} = 4.62$  وهكذا نجد أن على الرجل أن يهبط على اليابسة في نقطة تبعد 4.62 km من  $A$  نحو  $B$  .

٨ - براد عمل سياج حول حقل مستطيل الشكل ذي مساحة مفروشة . فإذا كان هناك نهر على أحد جوانب الحقل ( طول المستطيل ) ولا نحتاج إلى إقامة سياج على هذا الجانب فبرهن أنه إذا كان طول الحقل يساوي ضعف عرضه فالتكلفة اللازمة تكون أقل ما يمكن .



ليكن  $x$  الطول و  $y$  العرض . والمساحة  $A = xy$  والسياج اللازم  $F = x + 2y$

$$\frac{dF}{dx} = 1 + 2\frac{dy}{dx} \text{ ومن } \frac{dF}{dx} = 0 \text{ نجد } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$$

ولكن  $dA/dx = 0 = y + x dy/dx$  إذن  $y - \frac{1}{2}x = 0$  ومنه  $x = 2y$  وهو المطلوب .

٩ - ما هي أبعاد مخروط دائري قائم ذي حجم أقل ما يمكن تستطيع رسمه حول كرة نصف قطرها 20 cm .

ليكن  $x$  نصف قطر قاعدة المخروط و  $y + 20$  ارتفاعه . من المثلثين المتشابهين  $ABC$  و  $AED$  نجد .

شكل ٩ - ٤

$$x^2 = \frac{100(y+20)^2}{y^2-400} = \frac{400(y+20)}{y-20} \quad \text{وبالتالى} \quad \frac{x}{20} = \frac{y+20}{\sqrt{y^2-400}}$$

$$V = \frac{(\pi x^2)(y+20)}{3} = \frac{400\pi(y+20)^2}{3(y-20)} \quad \text{حجم المخروط هو}$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{400\pi(y+20)(y-60)}{3(y-20)^2} \quad \text{ومن ثم}$$

والقيمة الحرجة التي تنفي بالفرض هي  $y = 60$ .

وارتفاع المخروط إذن هو  $y + 20 = 80 \text{ cm}$  ونصف قطر قاعدته  $x = 20\sqrt{2} \text{ cm}$ .

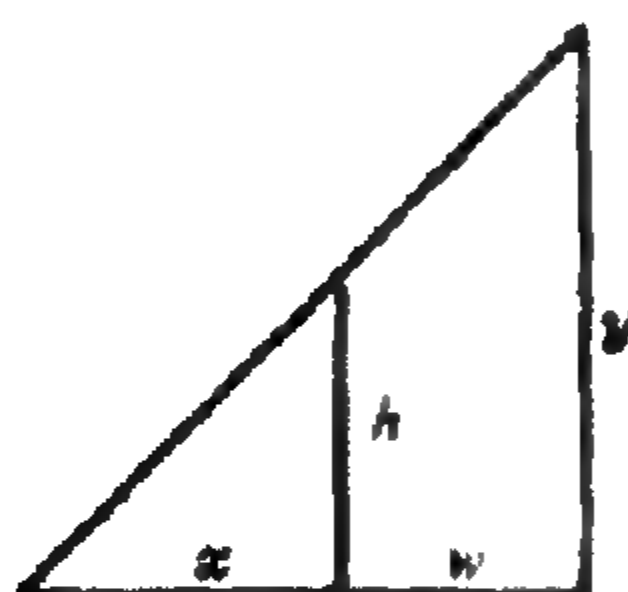
١٠ - أوجد بعنى المستطيل ذي المساحة عظمى والذي يمكن رسمه داخل قطعة القطع المكافئ  $y^2 = 4px$  المحددة بالمستقيم  $x = a$ .

نفرض أن المستطيل هو  $FBB'P'$  وأن  $(x, y)$  إحداثى النقطة  $P$  أنظر الشكل ٩ - د.

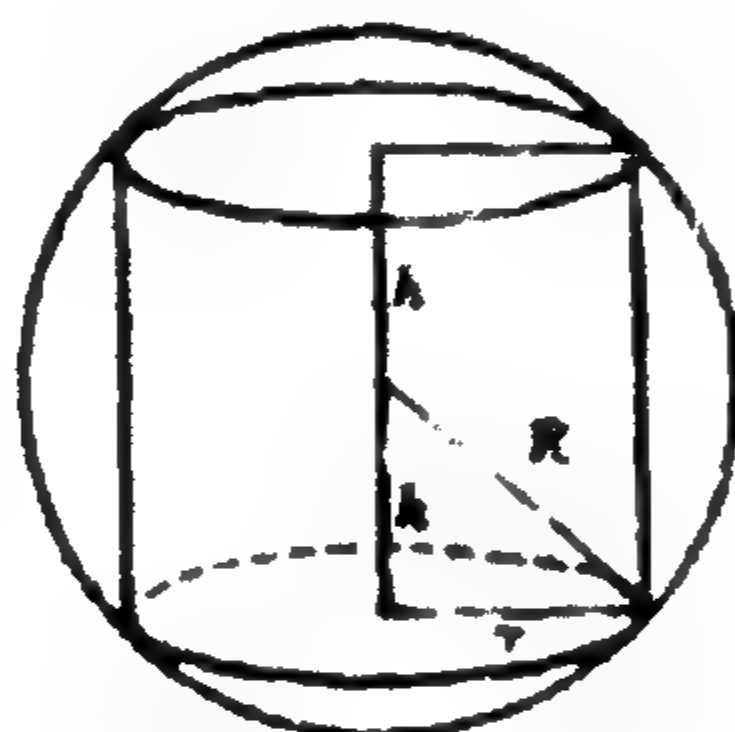
$$\text{إذن مساحة المستطيل هي } A = 2y(a-x) = 2y(a-y^2/4p) = 2ay - y^3/2p.$$

ومن ثم  $dA/dy = 2a - 3y^2/2p$  وبحل المعادلة  $dA/dy = 0$  نجد القيمة الحرجة  $y = \sqrt{4ap/3}$ .

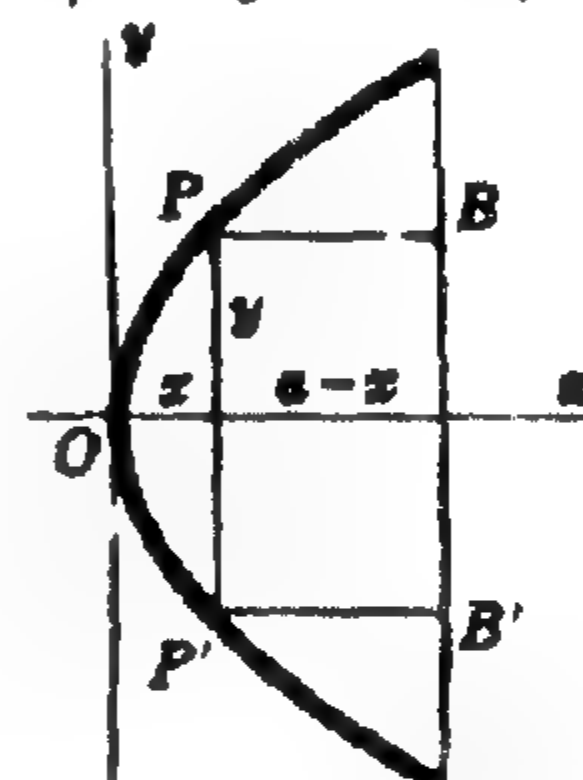
$$\text{إذن بعنى المستطيل هي } a-x = a-y^2/4p = 2a/3 \quad \text{و} \quad 2y = \sqrt{3} \sqrt{4ap} = \frac{4}{3} \sqrt{3ap}$$



شكل ٩ - ٧



شكل ٩ - ٦



شكل ٩ - ٥

١١ - أوجد ارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات حجم أعظم  $V$  والتي يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها  $R$  أنظر الشكل ٩ - ٧.

نفرض أن  $r$  هو نصف قطر قاعدة الاسطوانة و  $2h$  ارتفاعها.

$$\text{إذا } V = 2\pi r^2 h \quad \text{و} \quad r^2 + h^2 = R^2 \quad \text{عندئذ} \quad dV/dr = 2\pi(r^2 dh/dr + 2rh) \quad \text{and} \quad 2r + 2h dh/dr = 0.$$

$$\text{ومن العلاقة الأخيرة نجد أن } dh/dr = -r/h. \quad \text{إذن } dV/dr = 2\pi(-r^3/h + 2rh).$$

$$\text{وعندما يكون الحجم أكبر ما يمكن فإن } dV/dr = 2\pi(-r^3/h + 2rh) = 0 \quad \text{ومن ثم } r^2 = 2h^2.$$

$$\text{وبما أن } r^2 + h^2 = R^2 \quad \text{فإن } 2h^2 + h^2 = R^2 \quad \text{ومن ثم } h = R/\sqrt{3} \quad \text{وارتفاع الاسطوانة } 2h \text{ يساوى } 2R/\sqrt{3}.$$

١٢ - يراد تقوية جدار جانبي لبناء بدعامة بحيث تمر هذه الدعامة فوق جدار ارتفاعه  $h \text{ m}$  ويبعد عن الجدار الأول  $w \text{ m}$ .

أوجد الطول  $L$  لأتصر دعامة بحيث أن تن الفرض.

نفرض أن  $x$  هي المسافة بين طرف الدعامة الذي يرتكز على الأرض والجدار الموازي وأن  $y \text{ m}$  بعد طرف الدعامة العلوى عن الأرض (أنظر الشكل ٩ - ٧).

$$\text{من الواضح أن } L^2 = (x+w)^2 + y^2 \quad \text{ومن المثلثات المتشابهة نجد} \quad \frac{h}{y} = \frac{x}{x+w} \quad \text{و} \quad y = \frac{h(x+w)}{x}.$$

$$\text{إذن } L^2 = (x+w)^2 \left\{ 1 + \frac{h^2}{x^2} \right\} \quad \text{و} \quad \frac{dL^2}{dx} = 2(x+w) \left\{ 1 + \frac{h^2}{x^2} \right\} + (x+w)^2 \left\{ -\frac{2h^2}{x^3} \right\} = 2(x+w) \left\{ 1 - \frac{wh^2}{x^3} \right\}$$

والقيمة الحرجة المناسبة هي  $x = w^{1/3} h^{2/3}$  وطول أقصر دعامة هو

$$L = (w+x) \left( 1 + \frac{h^2}{x^2} \right)^{1/2} = (w + w^{1/3} h^{2/3}) (1 + w^{-2/3} h^{2/3})^{1/2} = (w^{2/3} + h^{2/3})^{3/2}$$

### مسائل إضافية

- ١٢ - عددان موجبين مجموعهما 20 أوجد العددين (أ) إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .  
(ب) إذا كان مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن (ج) إذا كان حاصل ضرب مربع أحدهما بمكعب الآخر أكبر ما يمكن .  
ج : (أ) 10, 10 (ب) 10, 10 (ج) 8, 12 .
- ١٣ - عددان موجبين حاصل ضربهما 16 أوجد العددين (أ) إذا كان مجموعهما أصغر ما يمكن .  
(ب) إذا كان ناتج جمع أحدهما إلى مربع الآخر أصغر ما يمكن . ج : (أ) 4, 4 (ب) 8, 2 .
- ١٤ - يرا صنع صندوق مفتوح على شكل متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مربع وحجمه  $216 \text{ m}^3$  . فإذا كانت تكلفة المتر المربع من القاعدة 50 سنتا ومن الجوانب 25 سنتا . فما هي أبعاد الصندوق التي تضمن لنا أقل تكلفة ممكنة .  
ج :  $6 \times 6 \times 6 \text{ m}$  .
- ١٥ - يقع جدار ارتفاعه  $3\sqrt{3} \text{ m}$  ، على بعد متر واحد من منزل . ما هو طول أقصر سلم يمكن أن يصل بين الأرض والمنزل بحيث يستند على الجدار من أعلاه . ج :  $138/9 \text{ m}$  .
- ١٦ - تعرض شركة قائمة الأسعار التالية 30 دولارا قيمة كل ألف إذا كان الطلب 50,000 أو أقل وتنقص قيمة كل ألف  $3\frac{1}{2}$  سنتا لكل ألف يزيد عن 50,000 . فما هو لطلب الذي يجعل الشركة تحصل على أعظم ما يمكن من الدخل . ج 65,000 .
- ١٨ - أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (3,4) بحيث يقطع من الربع الأول من المستوى مثلثا مساحته أصغر ما يمكن .  
ج :  $4x + 3y - 24 = 0$  .
- ١٩ - عين النقطة من المثلث المكافئ  $x = 4 - y$  والواقعة في الربع الأول من المستوى بحيث يحدد المماس لقطع عند هذه النقطة مع محوري الإحداثيات مثلثا مساحته أصغر ما يمكن . ج :  $(2\sqrt{3}/3, 8/3)$  .
- ٢٠ - أوجد أقصر مسافة بين النقطتين (4,2) والقطع المكافئ  $y^2 = 8x$  . ج :  $2\sqrt{2}$  وحدة .
- ٢١ - يراد رسم مماس لقطع الناقص  $x^2/25 + y^2/16 = 1$  بحيث يكون طول جزء المماس المحده بالمحورين الإحداثيين أقصر ما يمكن . بين أن طول هذا الجزء يساوى 9 وحدات .
- ٢٢ - مستطيل مرسوم داخل القطع الناقص  $x^2/400 + y^2/225 = 1$  بأضلاع موازية لمحاور القطع أوحد إحدى المستطيل بحيث تكون (أ) مساحته أكبر ما يمكن (ب) طول محيطه أكبر ما يمكن .  
ج : (أ)  $20\sqrt{2} \times 15\sqrt{2}$  (ب)  $32 \times 18$  .
- ٢٣ - أوجد نصف القطر  $R$  لمخروط دائري قائم يمكن رسمه على كرة نصف قطرها  $r$  بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن .  
ج :  $R = \frac{2}{3} r \sqrt{2}$  .
- ٢٤ - المطلوب رسم اسطوانة دائرية قائمة داخل مخروط دائري قائم نصف قطره  $r$  أوجد نصف قطر الاسطوانة  $R$  بحيث يكون (أ) إذا كان حجمها أكبر ما يمكن (ب) إذا كانت مساحتها الجانبية أكبر ما يمكن .  
ج : (أ)  $R = \frac{2}{3} r$  (ب)  $R = \frac{1}{2} r$  .
- ٢٥ - بين أن ارتفاع خيمة مخروطية الشكل ، ذات سعة مفروشة ، يساوى  $\sqrt{2}$  مرة من نصف قطر قاعدتها إذا أردنا أن نكلفنا أقل ما يمكن من مادة الصنع .
- ٢٦ - بين أن المثلث المتساوي الأضلاع والنقطة ارتفاعه  $3r$  هو أقل المثلثات المتساوية الساقين مساحة والتي يمكن رسمها على دائرة نصف قطرها  $r$  .
- ٢٧ - عين أبعاد اسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها 20 cm بحيث تكون مساحتها الجانبية أكبر ما يمكن . ج :  $h = 2r = 20\sqrt{2} \text{ cm}$  .
- ٢٨ - ناقش إمكانية رسم اسطوانة دائرية قائمة ذات مساحة عظمى داخل مخروط دائري قائم نصف قطره  $r$  وارتفاعه  $h$  .  
ج : إذا كان  $h > 2r$  فإن نصف قطر الاسطوانة يساوى  $\frac{1}{2} hr / (h - r)$  .

# الفصل العاشر

## الحركة المستقيمة والدائرية

### الحركة المستقيمة :

تتميز حركة جسم  $P$  تعييناً تاماً على خط مستقيم بالمعادلة  $s = f(t)$  حيث  $t > 0$  هو الزمن . و  $s$  هي بعد  $P$  عن نقطة ثابتة  $O$  من مسارها .

$$v = \frac{ds}{dt}$$

إن سرعة  $P$  في لحظة ما هي

إذا كانت  $v > 0$  فإن  $P$  تتحرك في اتجاه تزايد  $s$  .

وإذا كانت  $v < 0$  فإن  $P$  تتحرك في اتجاه تناقص  $s$  .

أما إذا كانت  $v = 0$  فإن  $P$  في وضع السكون آنياً .

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

و أما تسارع (عجلة)  $P$  في اللحظة  $t$  فهي

فإذا كانت  $a > 0$  فإن  $v$  متزايدة وإذا كانت  $a < 0$  فإن  $v$  متناقصة .

وعندما تكون كل من  $a$  و  $v$  لها نفس الإشارة . فإن سرعة  $P$  متزايدة .

أما إذا كان  $a$  و  $v$  إشارتان متعاكستان فإن سرعة  $P$  متناقصة .

أنظر المسائل ١ - ٥ .

### الحركة الدائرية :

تتميز حركة جسم  $P$  تعييناً تاماً على دائرة بالمعادلة  $\theta = f(t)$  حيث  $\theta$  الزاوية المركزية بالتقدير الدائري التي يقطعها المستقيم الذي يصل النقطة  $P$  بمركز الدائرة في زمن قدرة  $t$  .

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

إن السرعة الزاوية لـ  $P$  في اللحظة  $t$  تساوي

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

والتسارع الزاوي لـ  $P$  في اللحظة  $t$  يساوي

إذا كان  $\alpha$  ثابتاً لجميع قيم  $t$  فإن  $P$  تتحرك بتسارع زاوي ثابت .

أما إذا كان  $\alpha = 0$  صفر لجميع قيم  $t$  فإن  $P$  تتحرك بسرعة زاوية ثابتة .

أنظر المسألة ٦

### مسائل محلولة

تقدر  $s$  في المسائل التالية للحركة المستقيمة بالأمتار (m) والزمن بالثواني (s) .

١ - يتحرك جسم في خط مستقيم وفقاً لقانون  $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$  عين سرعته وتسارعه عندما تمضي ثانيتان .

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 - 2 \quad \text{وعندما } t = 2 \text{ يكون } v = \frac{3}{2}(2)^2 - 2 = 4 \text{ ms}^{-1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 3t \quad \text{وعندما } t = 2 \text{ يكون } a = 3(2) = 6 \text{ ms}^{-2}$$

٢ - تعطى حركة جسم يسير في خط مستقيم بالمعادلة  $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ .

(أ) أوجد  $a, s$  عندما  $v = 0$  (ب) أوجد  $v, s$  عندما  $a = 0$ .

(ج) متى تكون  $s$  متزايدة؟ (د) متى تكون  $v$  متزايدة؟

(هـ) متى يتغير اتجاه الحركة؟

$$v = ds/dt = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) \quad a = dv/dt = 6(t-2)$$

(أ) عندما  $v = 0$  فإن  $t = 1, 3$  وعندما  $t = 1$  تكون  $s = 8$  و  $a = -6$  وعندما  $t = 3$  يكون  $a = 6$  و  $s = 4$ .

(ب) عندما  $a = 0$  فإن  $t = 2$  وفي اللحظة  $t = 2$  تكون  $s = 6$  و  $v = -3$ .

(ج) إن  $s$  متزايدة عندما  $v > 0$  أي عندما  $t < 1$  و  $t > 3$ .

(د) إن  $v$  متناقصة عندما  $a < 0$  أي عندما  $t < 2$ .

(هـ) يتغير اتجاه الحركة عندما  $v = 0$  و  $a \neq 0$  نستنتج من (أ) أن الاتجاه يتغير عندما  $t = 1$  و  $t = 3$ .

٣ - يتحرك جسم على مستقيم أفقي وفق القانون  $s = f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ .

(أ) متى تزايد  $s$  ومتى تناقص؟

(ب) متى تزايد  $v$  ومتى تناقص؟

(ج) متى تكون السرعة القياسية للجسم متزايدة ومتى تكون متناقصة؟

(د) أوجد المسافة الكلية التي قطعها الجسم في الثواني الخمس الأولى للحركة.

$$v = ds/dt = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4) \quad a = dv/dt = 6(t-3)$$

(أ) إن  $s$  متزايدة عندما  $v > 0$  أي عندما  $t < 2$  و  $t > 4$ .

وإن  $s$  متناقصة عندما  $v < 0$  أي عندما  $2 < t < 4$ .

(ب) إن  $v$  متزايدة عندما  $a > 0$  أي عندما  $t < 3$ .

وإن  $v$  متناقصة عندما  $a < 0$  أي عندما  $t > 3$ .

(ج) إن السرعة القياسية متزايدة عندما يكون  $v$  و  $a$  الإشارة ذاتها و متناقصة عندما تكون إشارتهما متعاكسين.

ولكن بما أن  $v$  تغير إشارتها عندما  $t = 2$  و  $t = 4$  في حين تغير  $a$  إشارتها عندما  $t = 3$  فإنه ينبغي

أن نقارن الإشارات في الفترات التالية  $t < 2$  و  $2 < t < 3$  و  $3 < t < 4$  و  $t > 4$ .

في الفترة  $t < 2$  تكون  $v > 0$  و  $a < 0$  والسرعة القياسية متناقصة.

وفي الفترة  $2 < t < 3$  تكون  $v < 0$  و  $a < 0$  والسرعة القياسية متزايدة.

وفي الفترة  $3 < t < 4$  تكون  $v < 0$  و  $a > 0$  والسرعة القياسية متناقصة.

وفي الفترة  $t > 4$  تكون  $v > 0$  و  $a > 0$  والسرعة القياسية متزايدة.

(د) عندما  $t = 0$  يكون  $s = 0$  والجسم في الموضع  $O$  والحركة الابتدائية نحو اليمين ( $v > 0$ ) ونشر كذلك

مدة ثانيتين يصل الجسم في نهايتها إلى البعد  $s = f(2) = 20$  m من  $O$ .

بعد ذلك وخلال الثانيتين التاليتين يتحرك الجسم نحو اليسار ويكون في نهاية هذا الزمن على بعد  $s = f(4) = 16$  m من  $O$ .

وبعدا يعود الجسم لمحركته نحو اليمين حيث يصل بعد خمس ثوان من بداية الحركة إلى الموضع  $s = f(5) = 20$  m من  $O$ .

والمسافة الكلية التي قطعها الجسم هي  $20 + 4 + 4 = 28$  m.



شكل ١٠ - ١



٤ - يتحرك جسم في خط مستقيم أفق وفق القانون  $s = f(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$ .

(أ) متى تكون السرعة القياسية متزايدة ومتى تكون متناقصة؟

(ب) متى يتغير اتجاه الحركة؟

(ج) أوجد المسافة الكلية التي قطعها الجسم خلال الثواني الثلاث الأولى.

$$v = ds/dt = 4t^3 - 18t^2 + 24t - 10 = 2(t-1)(2t-5) \quad a = dv/dt = 12t(t-2)$$

(أ) قد تغير  $v$  إشارتها عندما  $t = 1$  و  $t = 2.5$  أما  $a$  فقد تغير إشارتها عندما  $t = 1$  و  $t = 2$ .

في الفترة  $t < 1$  يكون  $v < 0$  و  $a > 0$  والسرعة القياسية متناقصة.

وفي الفترة  $1 < t < 2$  يكون  $v < 0$  و  $a < 0$  والسرعة القياسية متزايدة.

وفي الفترة  $2 < t < 2.5$  يكون  $v < 0$  و  $a > 0$  والسرعة القياسية متناقصة.

وفي الفترة  $t > 2.5$  يكون  $v > 0$  و  $a > 0$  والسرعة القياسية متزايدة.

(ب) أما اتجاه الحركة فيتغير عندما  $t = 2.5$  لأن  $v = 0$  و  $a \neq 0$ .

أما عند  $t = 1$  فلا يتغير اتجاه الحركة لأن  $v$  لا تغير إشارتها عندما تزايد  $t$  مرة بـ  $t = 1$ .

يلاحظ أنه عندما  $t = 1$  فإن  $v = 0$  و  $a = 0$ . وبالتالي ليست هناك معلومات يمكن الحصول عليها.

(ج) عندما  $t = 0$  تكون  $s = 3$  والجسم يبعد ثلاثة أمتار إلى اليمين من  $C$ .

ونتم الحركة نحو اليسار خلال 2.5 ثانية الأولى حيث يصل الجسم في نهايتها إلى  $27/19$  m إلى اليسار من  $O$ .

وعندما تصبح  $t = 3$  تكون  $s = 0$  ويكون بذلك قد تحرك الجسم  $27/16$  m إلى اليمين. والمسافة الكلية

$$\text{المقطوعة} = 3 + 27/16 + 27/16 = 51/8$$



شكل ١٠ - ٢

٥ - قذف حجر رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية  $34.3$  m/s فتتحرك وفق القانون  $s = 34.3t - 4.9t^2$  حيث  $s$  البعد عن

نقطة الإنطلاق حسب (أ) السرعة والتسارع عندما  $t = 3$  وعندما  $t = 4$ . (ب) أقصى إرتفاع يصله الحجر.

(ج) متى يصبح إرتفاعه  $29.4$  m؟

$$v = ds/dt = 34.3 - 9.8t \quad a = dv/dt = -9.8$$

(أ) عندما  $t = 3$  تكون  $v = 4.9$  و  $a = -9.8$  والحجر صاعداً بمعدل  $4.9$  m/s.

وعندما  $t = 4$  تكون  $v = -4.9$  و  $a = -9.8$  والحجر هابطاً بمعدل  $4.9$  m/s.

(ب) يكون الجسم في أعلى نقطة عندما تكون  $v = 0$ .

$$\text{بحل المعادلة } 34.3 - 9.8t = 0 \text{ نجد أن } t = 3.5$$

وعند هذه اللحظة تكون  $s = 60.025$  m.

$$(ج) \quad 29.4 = 34.3t - 4.9t^2, \quad t^2 - 7t + 6 = 0, \quad (t-1)(t-6) = 0, \quad t = 1, 6$$

في نهاية الثانية الأولى من بدء الحركة يكون الحجر على إرتفاع  $29.4$  m وهو صاعد لأن  $v > 0$  وأما في نهاية الثانية

السادسة فإن الحجر يكون على الإرتفاع ذاته ولكن هابطاً لأن  $v < 0$ .

٦ - يدور جسم من السكون في عكس اتجاه عقارب الساعة وفق القانون  $\theta = t^3/50$  حيث تقاس  $\theta$  (rad) و  $t$

(sec) حسب الإزاحة الزاوية  $\theta$  والسرعة الزاوية  $\omega$  والتسارع الزاوي  $\alpha$  في نهاية الثانية العاشرة.

$$\theta = t^3/50 - t = 10 \text{ rad}, \quad \omega = d\theta/dt = 3t^2/50 - 1 = 5 \text{ rad/sec}, \quad \alpha = d\omega/dt = 6t/50 = 6/5 \text{ rad/sec}^2$$

### مسائل إضافية

- ٧ - يتحرك جسم في خط مستقيم وفق القانون  $s = t^3 - 6t^2 + 9t$  حيث تقاس المسافة بالأمتار والزمن بالثواني .  
حدد موضع الجسم بالنسبة لنقطة البداية ( $t = 0$ ) عند  $O$  وأوجد اتجاه الحركة وسرعته وبيّن فيما إذا كانت السرعة  
التيالية متزايدة أو متناقصة عندما (أ)  $t = 1/2$  (ب)  $t = 3/2$  (ج)  $t = 5/2$  (د)  $t = 4$  .  
ج : (أ)  $25/8$  m إلى اليمين من  $O$  والحركة نحو اليمين بسرعة  $v = 15/4$  m/s متناقصة .  
(ب)  $27/8$  m إلى اليمين من  $O$  ، والحركة نحو اليسار بسرعة  $v = -9/4$  m/s متزايدة .  
(ج)  $5/8$  m إلى اليمين من  $O$  ، والحركة نحو اليسار بسرعة  $v = -9/4$  m/s متناقصة .  
(د)  $4$  m إلى اليمين من  $O$  والحركة نحو اليمين بسرعة  $v = 9$  m/s متزايدة .
- ٨ - تعطى المسافة التي تفصل قطاراً عن نقطة ثابتة على مساره المستقيم في اللحظة  $t$  بالقانون  $s = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2$  متى كانت  
حركة القطار نحو الوداء ؟ ج .  $3 < t < 8$  .
- ٩ - ادرس ، كافي المسألة (٢) كلا من الحركات المستقيمة التالية :  
(أ)  $s = t^3 - 9t^2 + 24t$  (ب)  $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 3$  (ج)  $s = 2t^3 - 12t^2 + 18t - 5$  (د)  $s = 3t^4 - 28t^3 + 90t^2 - 108t$  .  
ج . (أ) تقف الحركة عند  $t = 2$  و  $t = 4$  مع تغيير في اتجاه الحركة .  
(ب) تقف الحركة عند  $t = 1$  بدون تغيير في اتجاه الحركة .  
(ج) تقف الحركة عند  $t = 1$  و  $t = 3$  مع تغيير في اتجاه الحركة .  
(د) تقف الحركة عند  $t = 1$  مع تغيير في اتجاه الحركة ، وتقف عند  $t = 3$  دون تغيير في اتجاه الحركة .
- ١٠ - يصعد جسم من الأرض رأسياً لأعلى وفق القانون  $s = 4.9t^2 - 19.6t$  بين أن الجسم يفقد نصف سرعته خلال  $14.7$  m  
الأول من صعوده .
- ١١ - قذفت كرة رأسياً لأعلى من طرف سقف بناء بحيث تسقط في الشارع تحت السقف بمسافة  $34.3$  m .  
فإذا تحركت الكرة بحيث بعد زمن قدرة  $t$  كانت مسافتها  $s$  (مقدرة بالأمتار) بدء من السقف تعطى بالعلاقة  
 $s = 4.5t^2 - 20.4t$  فأوجد (أ) موضع الكرة وسرعته واتجاه السرعة عندما  $t = 2$  .  
(ب) سرعتها عندما تصطدم بالشارع .  
ج . (أ)  $73.5$  m فوق الشارع والسرعة  $9.8$  m/s لأعلى .  
(ب)  $39.2$  m/s .
- ١٢ - تدور عجلة زاوية  $\theta$  rad في  $t$  sec بحيث يكون  $\theta = 12t^2 - 128t$  أوجد السرعة الزاوية والتسارع الزاوي في  
نهاية  $3$  sec .  
ج .  $\omega = 56$  rad/s ،  $\alpha = -24$  rad/s<sup>2</sup> .
- ١٣ - ادرس المسألتين ٢ ، ٩ لتستنتج أن وقوف الحركة مع تغير الاتجاه يتم عند قيم  $t$  التي تجعل  $s = f(t)$  يبلغ قيمة  
مطلية أو صفري في حين يتم وقوف الحركة دون تغير الاتجاه عند نقط الانطلاق .

## الفصل الحادي عشر

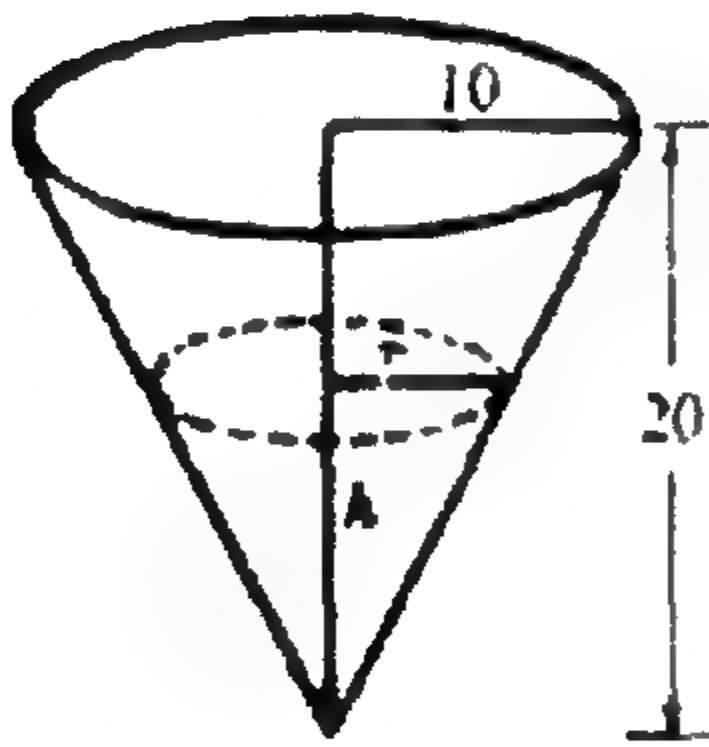
### المعدلات المتعلقة ببعضها

المعدلات المتعلقة ببعضها : إذا كان المتغير  $x$  دالة للزمن  $t$  فنحن نعطى معدل المتغير الزمني لـ  $x$  بـ  $dx/dt$  .  
وإذا كان متغيران أو أكثر ، جميعها دوال لـ  $t$  ، متعلقة ببعضها بواسطة معادلة فإنه يمكن الحصول على العلاقة بين معدلات تغيرهما باشتقاق المعادلة بالنسبة لـ  $t$  .

### مسائل محلولة

١ - يتسرب غاز من بالون كروي بمعدل  $900 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  فبأية سرعة تتقلص مساحة السطح عندما يكون نصف القطر  $360 \text{ cm}$  ؟  
ليكن نصف قطر الكرة في اللحظة  $t$  هو  $r$  والحجم  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  ومساحة السطح  $S = 4\pi r^2$  عندئذ :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2}{r} \left( \frac{dV}{dt} \right) = \frac{2}{360} (-900) = -5 \text{ cm s}^{-1} \quad \text{و} \quad \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}, \quad \frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}, \quad \frac{dS/dt}{dV/dt} = \frac{2}{r}.$$



شكل ١١ - ١

٢ - ينسكب ماء من قمع مخروطي بمعدل  $5 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  . فإذا كان نصف قطر قاعدة القمع مساوياً  $10 \text{ cm}$  وارتفاعه  $20 \text{ cm}$  ، فأوجد معدل انخفاض مستوى الماء عندما يكون هذا المستوى على بعد  $5 \text{ cm}$  من قاعدة القمع .

ليكن  $r$  نصف قطر سطح الماء في اللحظة  $t$  و  $h$  ارتفاعه وليكن  $V$  حجم الماء في المخروط .

ومن تشابه المثلثات نجد أن  $r/10 = h/20$  أو  $r = \frac{1}{2}h$  .

$$dV/dt = \frac{1}{3}\pi h^2 dh/dt, \quad \text{و} \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$$

وعندما يكون  $dh/dt = -5$  و  $h = 20 - 5 = 15$

$$\text{فإن } dh/dt = -4/45\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}.$$

٣ - يتساقط رمل من منحدر مشكلاً كومة مخروطية ارتفاعها يساوي دائماً  $4/3$  نصف قطر قاعدتها :

(أ) فبأي سرعة يتزايد الحجم عندما يكون نصف قطر القاعدة يساوي  $1 \text{ m}$  . إذا كان نصف القطر هذا يتزايد بمعدل  $1/8 \text{ cm s}^{-1}$  ؟

(ب) وبأي سرعة يتزايد نصف القطر عندما يكون مساوياً مترين والحجم يتزايد بمعدل  $10^4 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  ؟

ليكن  $r$  نصف قطر القاعدة و  $h$  ارتفاع الكومة في اللحظة  $t$  .

$$\text{بما أن } h = \frac{4}{3}r, \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{9}\pi r^3, \quad \text{ومن } \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

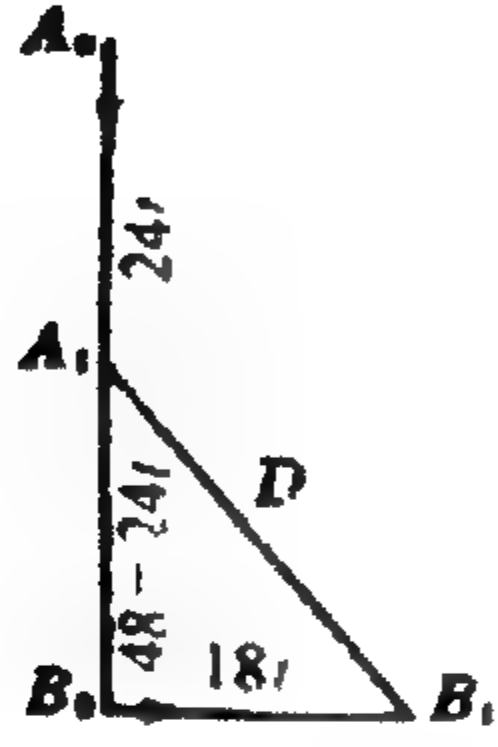
$$(1) \text{ فعندما } r = 100 \text{ و } \frac{dr}{dt} = \frac{1}{8} \text{ يكون } \frac{dV}{dt} = \frac{5000\pi}{3} \text{ cms}^{-1}$$

$$(2) \text{ وعندما } r = 200 \text{ و } \frac{dr}{dt} = 10000 \text{ يكون } \frac{dV}{dt} = \frac{8}{16\pi} \text{ cms}^{-1}$$

٤ - قبحر باخرة  $A$  نحو الجنوب بمعدل  $24 \text{ km hr}^{-1}$  فى حين قبحر باخرة أخرى  $B$  تقع على بعد  $48 \text{ km}$  جنوب  $A$  نحو الشرق بمعدل  $18 \text{ km hr}^{-1}$ .

(1) بلى معدل تقاربهم أو تباعدان بعد مضى ساعة واحدة ؟ (ب) بعد مضى ساعتين (ج) متى تكفان عن الاقتراب من بعضهما وما هي المسافة التى تفصلهما عندئذ ؟

ليكن  $A_0$  و  $B_0$  موضعى البدء للباخرتين ،  $A_1$  و  $B_1$  موضعيهما بعد  $t \text{ hr}$  وليكن  $D$  المسافة بينهما عندئذ .



شكل ١١ - ٢

$$\frac{dD}{dt} = \frac{900t - 1152}{D} \text{ و } D^2 = (48 - 24t)^2 + (18t)^2$$

(1) عندما  $t = 1$  تكون  $D = 30$  و  $dD/dt = -8.4$  والباخرتان تتقاربان بمعدل  $8.4 \text{ km hr}^{-1}$ .

(ب) وعندما  $t = 2$  تكون  $D = 36$  و  $dt/dD = 18$  والباخرتان تباعدان بمعدل  $18 \text{ kmhr}^{-1}$ .

(ج) وتكف الباخرتان عن الاقتراب من بعضهما عندما يكون  $dD/dt = 0$  أى عندما  $t = 1152/900 = 1.28 \text{ hr}$  وعندما تكون المسافة بينهما  $D = 28.8 \text{ km}$ .

٥ - يتمدد طولاً ضلعين متقابلين من مستطيل بمعدل  $2 \text{ cms}^{-1}$  بينما يتقلص طولاً الضلعين الآخرين بحيث يبقى الشكل مستطيلاً بمساحة ثابتة  $A$  تساوى  $50 \text{ cm}^2$  ما هو معدل تغير المحيط  $P$  عندما يكون طول كل من الضلعين المتددتين (1)  $5 \text{ cm}$  (ب)  $10 \text{ cm}$  ، (ج) ما هما بعدا المستطيل عندما يكف المحيط عن التناقص ؟

ليكن  $x$  طول كل من الضلعين المتددتين فى اللحظة  $t$  و  $y$  طول كل من الضلعين المتقلصين فى اللحظة نفسها .

$$\text{عندئذ يكون } P = 2(x + y) \text{ و } \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) \text{ و } A = xy = 50 \text{ و } x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} = 0$$

(أ) فعندما  $x = 5$  و  $y = 10$  ،  $dx/dt = 2$  يكون :

$$5 \frac{dy}{dt} + 10(2) = 0 \text{ أو } \frac{dy}{dt} = -4 \text{ و } \frac{dP}{dt} = 2(2 - 4) = -4 \text{ cms}^{-1} \text{ ( المحيط متناقص ) .}$$

(ب) وعندما  $x = 10$  ،  $y = 5$  ،  $dx/dt = 2$  يكون :

$$10 \frac{dy}{dt} + 5(2) = 0 \text{ أو } \frac{dy}{dt} = -1 \text{ و } \frac{dP}{dt} = 2(2 - 1) = 2 \text{ cms}^{-1} \text{ ( المحيط متزايد ) .}$$

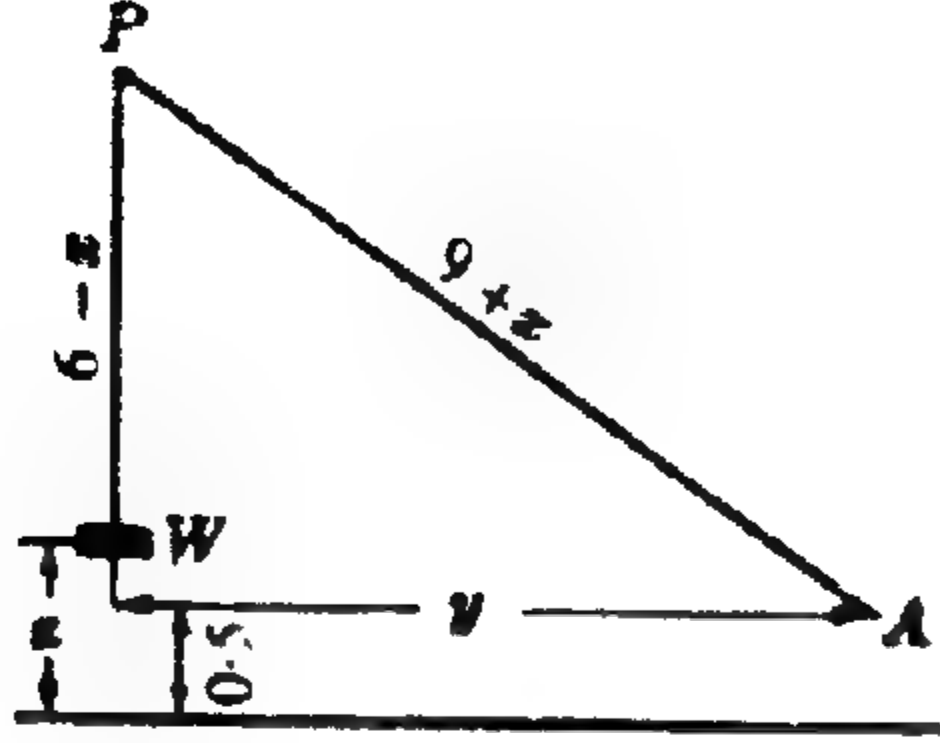
(ج) يكف المحيط عن التناقص عندما يكون  $dP/dt = 0$  أى عندما  $-2 = -\frac{dy}{dx}$  : عندئذ

$$x(-2) + y(2) = 0 \text{ والسطيل هو مربع طول ضلعه } x = y = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

٦ - نصف قطر كرة فى اللحظة  $t \text{ sec}$  يلقى  $r \text{ cm}$  . أوجد نصف القطر عندما يكون معدل ازدياد مساحة سطح الكرة ومعدل ازدياد نصف قطرها متساويين عددياً .

$$\text{مساحة سطح الكرة : } S = 4\pi r^2 \text{ . إذن } \frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

وعندما يكون  $\frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt}$  فإن  $\frac{dr}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$  ومنه نجد أن نصف القطر  $r$  يساوي  $\frac{1}{8\pi}$  cm .



شكل ١١ - ٣

٧- ربط وزن  $W$  بطرف جبل طوله 15 m ويمر على بكرة  $P$  تعلو 6 m عن سطح الأرض . ربط الطرف الآخر للجبل بشاحنة عند النقطة  $A$  تعلو 0.5 m عن سطح الأرض كما هو مبين بالشكل ١١ - ٣ . فإذا تحركت الشاحنة بمعدل  $3 \text{ ms}^{-1}$  فبأية سرعة يرتفع الوزن عندما يكون هذا الوزن على ارتفاع 2 m فوق سطح الأرض .

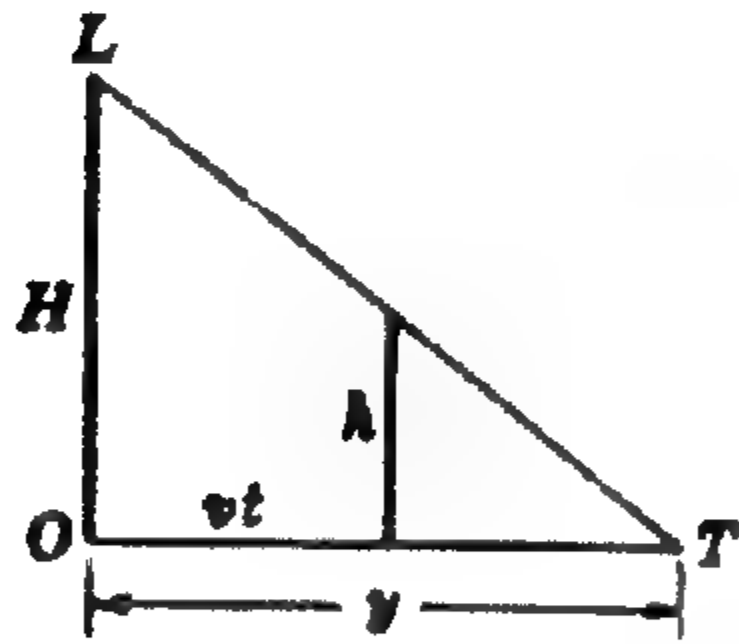
لنمر بـ  $x$  لإرتفاع الوزن عن الأرض والحد الأفقي بين النقطة  $A$  حيث يرتبط الجبل بالشاحنة والخط الرأسى المار بالبكرة في اللحظة  $t$  بـ  $y$  .

والمطلوب هو إيجاد  $dx/dt$  عندما  $x=2$  و  $\frac{dy}{dt} = 3$  .

$$\frac{dy}{dt} = \frac{9+x}{y} \cdot \frac{dx}{dt} \quad , \quad y^2 = (9+x)^2 - (0.5)^2$$

ولكن بما أن  $y^2 = (9+x)^2 - (0.5)^2$  فإن  $x=2$  يكون  $y = 5.5\sqrt{3}$  . وبالتالى  $\frac{dy}{dt} = 3$  . ومنه نجد  $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{5.5\sqrt{3}}$  .

٨- يعلق مصباح كهربائى  $L$  على ارتفاع  $H$  m فوق الشارع . وضع شيء طوله  $h$  m عند الموضع  $O$  تحت المصباح الضوئى مباشرة . فإذا تحرك هذا الشيء فى خط مستقيم على طول الشارع بمعدل  $v \text{ ms}^{-1}$  فادرس السرعة  $V$  لرأس ظل هذا الشيء على الشارع بعد  $t \text{ sec}$  .



شكل ١١ - ٤

بعد  $t \text{ sec}$  يكون الجسم قد تحرك مسافة قدرها  $vt$  . لتفرض  $y$  المسافة التى تفصل رأس الشكل عن  $O$  .

$$V = \frac{dy}{dt} = \frac{Hv}{H-h} = \frac{1}{1-h/H} v \quad \text{و} \quad y = \frac{Hvt}{H-h} \quad \text{أو} \quad \frac{y-vt}{y} = \frac{h}{H}$$

إذن سرعة رأس ظل الشيء متناسبة مع سرعة الشيء نفسه ويعتمد ثابت التناسب على النسبة  $h/H$  . وعندما  $h \rightarrow 0$  نجد  $V \rightarrow v$  بينما تزداد  $V$  بسرعة أكبر كلما  $h \rightarrow H$  .

### مسائل إضافية

٩- حوض على شكل متوازى مستطيلات طوله 2 m وعرضه 0.5 m وعمقه 1 m فإذا كان الماء ينساب فيه بمعدل  $900 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  فبأية سرعة يرتفع سطح الماء عندما يكون عمق الماء 25 cm ؟ ج :  $0.09 \text{ cm s}^{-1}$  .

١٠- ينصب ماء فى خزان على شكل اسطوانة رأسية نصف قطرها 2 m بمعدل  $3600 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  فبأية سرعة يرتفع سطح الماء ؟ ج :  $9/100 \pi \text{ cm s}^{-1}$  .

١١- يمشى رجل طوله 1.5 m بمعدل  $1.2 \text{ ms}^{-1}$  مبتدئاً بشكل مباشر عن ضوء الشارع الذى يعلو 6 m عن أرض الشارع (أ) بلى معدل يتغير رأس ظل الرجل ؟ (ب) بلى معدل يتغير طول الظل ؟

ج : (أ)  $1.6 \text{ ms}^{-1}$  (ب)  $0.4 \text{ ms}^{-1}$  .



١٢- يرتفع بالون رأسياً فوق نقطة  $A$  واقعة على الأرض بمعدل  $5 \text{ ms}^{-1}$ . فإذا كانت  $B$  نقطة أخرى على الأرض في مستوى  $A$  وتبعد عنها  $20 \text{ m}$  فبأي معدل تتغير المسافة بين البالون والنقطة  $B$  عندما يكون البالون على بعد  $15 \text{ m}$  عن  $A$ .  
ج :  $3 \text{ ms}^{-1}$ .

١٣- يستند سلم طوله  $5 \text{ m}$  على جدار منزل. أوجد (أ) معدل حركة رأس السلم لأسفل إذا كان أسفل السلم على بعد  $3 \text{ m}$  من الجدار، ويتبد منه بمعدل  $0.5 \text{ ms}^{-1}$ . (ب) معدل تناقص ميل السلم.  
الحواب : (أ)  $3/5 \text{ ms}^{-1}$  (ب)  $25/12$  في الثانية.

١٤- ينساب ماء من خزان مخروطي نصف قطره  $1 \text{ m}$  وعمقه  $3 \text{ m}$  بمعدل  $1800 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  فبأي سرعة يهبط سطح الماء عندما يكون عمق الماء مترين. وبأي سرعة يتناقص نصف قطر السطح؟  
ج :  $81/200\pi \text{ cms}^{-1}$  .  $9/200\pi \text{ cms}^{-1}$ .

١٥- ينخفض ظهر مركب عن مستوى الرصيف  $5 \text{ m}$ . فإذا سحب هذا المركب بواسطة حبل مربوط بظهره ومار بحلقة على الرصيف. فبأي سرعة يسحب الحبل عندما يكون المركب على بعد  $12 \text{ m}$  من الرصيف ويقترب منه بمعدل  $0.25 \text{ ms}^{-1}$ .  
(يحمل ارتخاء الحبل).  
ج :  $3/13 \text{ ms}^{-1}$ .

١٦- ترتفع طائرة ورقية يمسك بها حسي  $50 \text{ m}$ . فإذا تحركت الطائرة أفقياً مبتعدة عن العصى بمعدل  $6 \text{ ms}^{-1}$ . فبأي سرعة يزداد طول الحيط عندما تكون الطائرة على بعد  $80 \text{ m}$  عن العصى.  
ج :  $7.5 \text{ ms}^{-1}$ .

١٧- ينطلق قطار في الساعة 11 قبل الظهر متجهاً نحو الشرق بمعدل  $75 \text{ km hr}^{-1}$  في حين ينطلق قطار آخر ظهراً من نفس الموضع متجهاً نحو الجنوب بمعدل  $100 \text{ km hr}^{-1}$ . فبأي سرعة يبتعدان عن بعضهما في الساعة 3 بعد الظهر؟  
ج :  $87.5 \sqrt{2} \text{ km hr}^{-1}$ .

١٨- يوجد مصباح كهربائي على رأس عمود ارتفاعه  $28 \text{ m}$ . فإذا أسقطت كرة من الطول نفسه ومن نقطة تشد  $7 \text{ m}$  عن الضوء وإذا كانت الكرة تسقط وفق القانون  $S = 4.9 t^2$  فبأي سرعة يتحرك ظل الكرة على الأرض بعد مضي ثانية واحدة؟  
ج :  $80 \text{ ms}^{-1}$ .

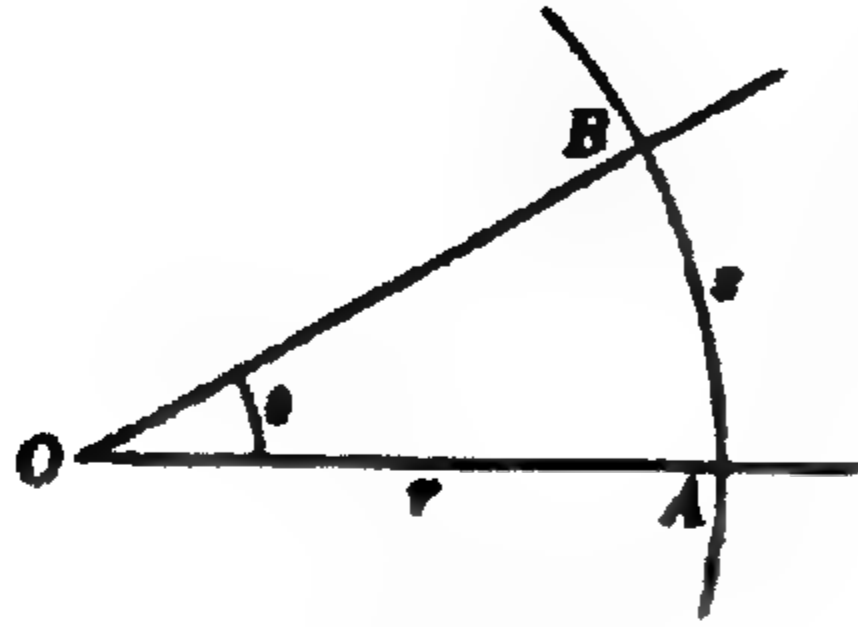
١٩- تتحرك باخرة  $A$  تقع على الشرق من نقطة  $O$  ويفصلها عنها  $21 \text{ km}$  بمعدل  $28 \text{ km hr}^{-1}$  نحو الغرب في حين تتحرك باخرة أخرى  $B$  تقع على الجنوب من  $O$  ويفصلها عنها  $84 \text{ km}$  بمعدل  $21 \text{ km hr}^{-1}$  نحو الشمال.  
(أ) هل تتقارب الباخرتان أم تبتعدان بعد مضي ساعة واحدة وبأي معدل؟  
(ب) يمد السعال ، بعد مضي ثلاث ساعات؟  
(ج) متى تكونان أقرب ما يكون من بعضهما؟  
ج : (أ) تتقاربان  $161 \sqrt{82} \text{ km hr}^{-1}$ . (ب) تتباعدان  $4.2 \sqrt{10} \text{ km hr}^{-1}$ . (ج) 1 ساعة و 55 دقيقة.

٢٠- يصب ماء بمعدل  $4500 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  في حوض يتسرب الماء منه وهو على شكل مخروط عمقه  $4 \text{ m}$  ونصف قطره العلوي  $2 \text{ m}$  لوحظ أنه عندما يكون عمق الماء  $3 \text{ m}$  يكون معدل ارتفاع سطح الماء  $0.1 \text{ cms}^{-1}$  فبأي سرعة يتسرب الماء من الحوض؟  
ج :  $(4500 - 562.5\pi) \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ .

٢١- يرشح محلول من مصفاة مخروطية عمقها  $60 \text{ cm}$  وقطر قاعها  $40 \text{ cm}$  ، إلى وعاء اسطواني قطره  $30 \text{ cm}$ . بأي معدل يرتفع مستوى المحلول في الإسطوانة عندما يكون المحلول في المصفاة على ارتفاع  $30 \text{ cm}$  ومعدل هبوط مستواه  $2.5 \text{ cm/min}$ .  
ج :  $10/9 \text{ cm/min}$ .

## الفصل الثاني عشر

### اشتقاق الحوال المثلثية



شكل ١٢ - ١

**المقياس الدائري :** لنرمز بـ  $s$  لطول القوس  $AB$  المقابل للزاوية المركزية  $AOB$  لدائرة نصف قطرها  $r$  ، ولنرمز بـ  $S$  لمساحة القطاع  $AOB$  ( إذا كانت  $s$  تساوى  $1/360$  من محيط الدائرة فإن  $AOB = 1^\circ$  وإذا كان  $s = r$  فإن الزاوية  $AOB$  تساوى قطرى أى  $AOB = 1 \text{ rad}$  ) .

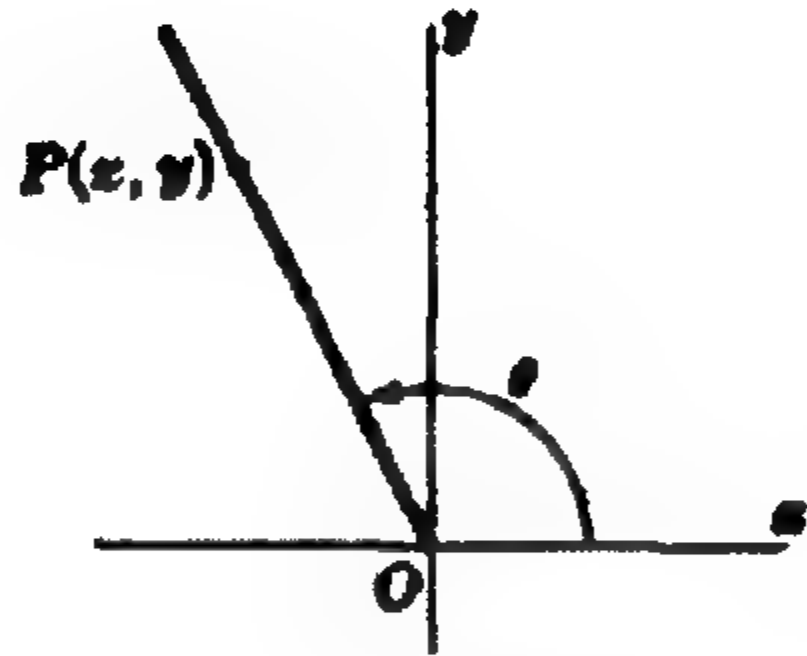
لنفرض الآن أن قياس  $AOB$  يساوى  $\alpha$  درجة عندئذ :

$$S = \frac{\pi}{360} \alpha r^2 \text{ و } s = \frac{\pi}{180} \alpha r \quad (I)$$

ولنفرض بعد ذلك أن قياس  $AOB$  يساوى  $\theta \text{ rad}$  عندئذ :

$$S = \frac{1}{2} \theta r^2 \text{ و } s = \theta r \quad (II)$$

وبمقارنة (i) مع (ii) يتضح لنا فائدة استعمال المقياس القطرى .



شكل ١٢ - ٢

**الحوال المثلثية :** ليكن  $\theta$  عدداً حقيقياً . ارسم الزاوية التي قياسها يساوى  $\theta \text{ rad}$  بحيث يقع رأسها في نقطة الأصل من مجموعة محاور إحداثية قائمة وبحيث ينطبق الضلع الأول (الإبتدائي) للزاوية على المحور  $x$  الموجب . لتكن  $P(x, y)$  على الضلع الثانى (النهائى) للزاوية وعلى بعد يساوى وحدة المسافة عن  $O$  عندئذ يكون  $\sin \theta = y$  و  $\cos \theta = x$  إن حيز التعريف لكل من  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  هو فنة الأعداد الحقيقية أما مدى  $\sin \theta$  فهو  $-1 \leq y \leq 1$  ومدى  $\cos \theta$  هو  $-1 \leq x \leq 1$  .

$$\text{ويتبع أن : } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ و } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

مدى كل من  $\tan \theta$  و  $\sec \theta$  هو فنة الأعداد الحقيقية في حين يكون حيز التعريف ( $\cos \theta \neq 0$ ) هو  $\theta \neq \pm \frac{2n-1}{2} \pi$  و ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) وترك لتلوى كعمرين ، أن يتفرق العالين  $\cot \theta$  و  $\csc \theta$  سبرهن في المسألة ١ أن :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

( أما إذا قدرنا للزاوية بالدرجات فإن النهاية تكون  $\pi/180$  . ومن أجل هذا السبب يفضل في حساب التفاضل والتكامل استعمال المقياس القطرى دائماً ) .

**قواعد الاشتقاق :** لتكن  $u$  دالة قابلة للاشتقاق في  $x$  عندئذ :

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx} \quad ١٧$$

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx} \quad ١٤$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx} \quad ١٨$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx} \quad ١٥$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx} \quad ١٩$$

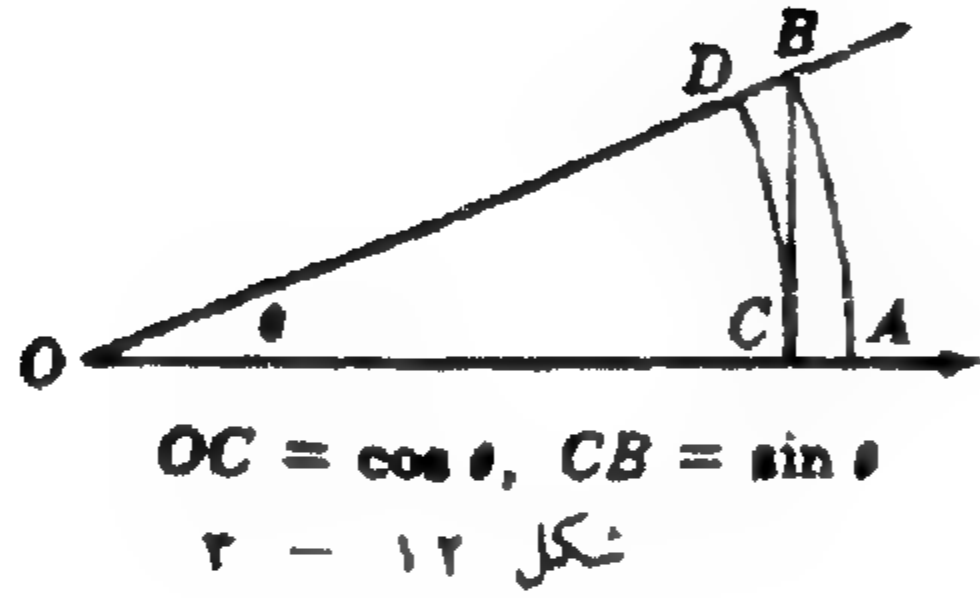
$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx} \quad ١٦$$

أنظر المسائل ٢ - ٢٣

### مسائل محلولة

$$١ - \text{أثبت أن } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$$\text{بما أن } \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \frac{\sin \theta}{\theta} \text{ فإننا نكتفي ببرهان } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta}$$



في الشكل ١٢ - ٢ الزاوية  $\theta = \angle AOB$  زاوية مركزية موجبة وصغيرة من دائرة نصف قطرها  $OA = 1$ . نرسم  $C$  لموقع العمود النازل من  $B$  على  $OA$  ونرمز بـ  $D$  لتقاطع  $OB$  مع القوس الذي نصف قطره  $OC$ . نلاحظ أن :

$$\text{المقطع } AOB = \text{المثلث } COB = \text{المقطع } COD$$

$$\text{وبالتالي فإن } \frac{1}{2} \cos^2 \theta \leq \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \leq \frac{1}{2} \theta$$

$$\text{وبالقسمة على } \frac{1}{2} \theta \cos \theta > 0 \text{ نجد أن :}$$

$$\cos \theta \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\text{فإذا جملنا } \theta \rightarrow \theta^+ \text{ نلاحظ أن } \cos \theta \rightarrow 1 \text{ و } \frac{1}{\cos \theta} \rightarrow 1 \text{ وأن } 1 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1 \text{ وبالتالي فإن}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$$٢ - \text{استنتج أن } \frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}, \text{ بفرض } u \text{ دالة قابلة للاشتقاق في } x.$$

$$y = \sin u \quad \text{ليكن}$$

$$y + \Delta y = \sin(u + \Delta u)$$

عندئذ :

$$\Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin u = 2 \cos(u + \frac{1}{2} \Delta u) \sin \frac{1}{2} \Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \cos(u + \frac{1}{2} \Delta u) \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta u}{\frac{1}{2} \Delta u}$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \cos(u + \frac{1}{2} \Delta u) \cdot \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta u}{\frac{1}{2} \Delta u} = \cos u$$

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \frac{d}{du}(\sin u) \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx} : \text{ وباستخدام قاعدة السلسلة نجد أن :}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = \frac{d}{dx}[\sin(\frac{1}{2}\pi - u)] = \frac{d}{du}[\sin(\frac{1}{2}\pi - u)] \frac{du}{dx} = -\cos(\frac{1}{2}\pi - u) \frac{du}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx} \quad - 7$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right) = \frac{\cos u \cdot \cos u \frac{du}{dx} - \sin u \left(-\sin u \frac{du}{dx}\right)}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u} \frac{du}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx} \quad - 8$$

أوجد المشتق الأول في المسائل ٩ - ١٢ .

$$y = \sin 3x + \cos 2x, \quad y' = \cos 3x \frac{d}{dx}(3x) - \sin 2x \frac{d}{dx}(2x) = 3 \cos 3x - 2 \sin 2x \quad - 9$$

$$y = \tan x^2, \quad y' = \sec^2 x^2 \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \sec^2 x^2 \quad - 10$$

$$y = \tan^2 x = (\tan x)^2, \quad y' = 2 \tan x \frac{d}{dx}(\tan x) = 2 \tan x \sec^2 x \quad - 11$$

$$y = \cot(1 - 2x^2), \quad y' = -\csc^2(1 - 2x^2) \frac{d}{dx}(1 - 2x^2) = 4x \csc^2(1 - 2x^2) \quad - 12$$

$$y = \sec^2 \sqrt{x} = \sec^2 x^{1/2} \quad - 13$$

$$y' = 2 \sec^2 x^{1/2} \frac{d}{dx}(\sec x^{1/2}) = 2 \sec^2 x^{1/2} \cdot \sec x^{1/2} \tan x^{1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{3}{2\sqrt{x}} \sec^3 \sqrt{x} \tan \sqrt{x}$$

$$\rho = \sqrt{\csc 2\theta} = (\csc 2\theta)^{1/2} \quad - 14$$

$$\rho' = \frac{1}{2}(\csc 2\theta)^{-1/2} \frac{d}{d\theta}(\csc 2\theta) = -\frac{1}{2}(\csc 2\theta)^{-1/2} \cdot \csc 2\theta \cot 2\theta \cdot 2 = -\sqrt{\csc 2\theta} \cdot \cot 2\theta$$

$$f(x) = x^2 \sin x, \quad f'(x) = x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(x^2) = x^2 \cos x + 2x \sin x \quad - 15$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad f'(x) = \frac{x \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} \quad - 16$$

أوجد المشتقة المثلثية المشار إليها في المسائل ١٣ - ١٦

$$y = x \sin x; \quad y'''. \quad y' = x \cos x + \sin x \quad - 17$$

$$y'' = x(-\sin x) + \cos x + \cos x = -x \sin x + 2 \cos x$$

$$y''' = -x \cos x - \sin x - 2 \sin x = -x \cos x - 3 \sin x$$

$$y = \tan^2(3x - 2); \quad y''. \quad - 18$$

$$y' = 2 \tan(3x - 2) \sec^2(3x - 2) \cdot 3 = 6 \tan(3x - 2) \sec^2(3x - 2)$$

$$y'' = 6[\tan(3x - 2) \cdot 2 \sec(3x - 2) \cdot \sec(3x - 2) \tan(3x - 2) \cdot 3 + \sec^2(3x - 2) \sec^2(3x - 2) \cdot 3] \\ = 36 \tan^2(3x - 2) \sec^2(3x - 2) + 18 \sec^4(3x - 2)$$

$$y = \sin(x + y); \quad y'. \quad y' = \cos(x + y) \cdot (1 + y') \quad \text{and} \quad y' = \frac{\cos(x + y)}{1 - \cos(x + y)} \quad - 19$$

$$\sin y + \cos x = 1; \quad y'. \quad - 20$$

$$\cos y \cdot y' - \sin x = 0 \quad \text{and} \quad y' = (\sin x)/(\cos y)$$

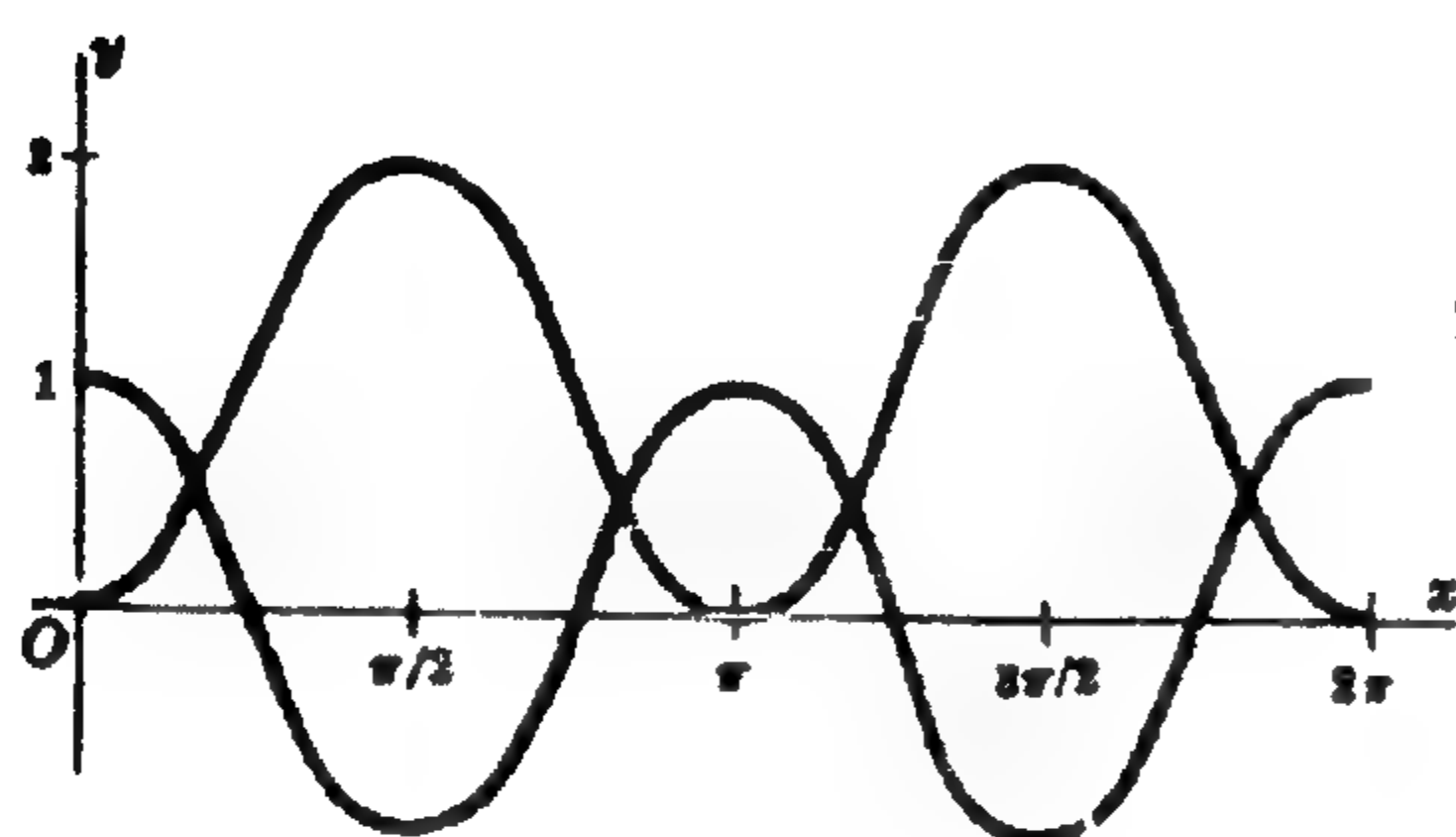
$$y'' = \frac{\cos y \cos x - \sin x (-\sin y) \cdot y'}{\cos^2 y} = \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y \cdot y'}{\cos^2 y} \\ = \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y (\sin x)/(\cos y)}{\cos^2 y} = \frac{\cos x \cos^2 y + \sin^2 x \sin y}{\cos^3 y}$$

١٧- أوجد  $f'(\pi/3)$ ,  $f''(\pi/3)$ ,  $f'''(\pi/3)$  بمرض أن  $f(x) = \sin x \cos 3x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \sin x \sin 3x + \cos 3x \cos x \\ &= (\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x) - 2 \sin x \sin 3x \\ &= \cos 4x - 2 \sin x \sin 3x \end{aligned} \quad f'(\pi/3) = -\frac{1}{2} - 2(\sqrt{3}/2)(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4 \sin 4x - 2(3 \sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x) \\ &= -4 \sin 4x - 2(\sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x) - 4 \sin x \cos 3x \\ &= -6 \sin 4x - 4f(x). \end{aligned} \quad f''(\pi/3) = -6(-\sqrt{3}/2) - 4(\sqrt{3}/2)(-1) = 5\sqrt{3}$$

$$f'''(x) = -24 \cos 4x - 4f'(x). \quad f'''(\pi/3) = -24(-\frac{1}{2}) - 4(-\frac{1}{2}) = 14$$



شكل ١٠ - ٤

١٨- أوجد زاوية التقاطع الحادة للمنحنيين (١)  $y = 2 \sin^2 x$

(٢)  $y = \cos 2x$  في الفترة  $0 < x < 2\pi$ .

(١) نحل المعادلة  $2 \sin^2 x = \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

فنحصل على الإحداثيات السينية لنقط التقاطع  $\pi/6$  و  $5\pi/6$

و  $7\pi/6$  و  $11\pi/6$ .

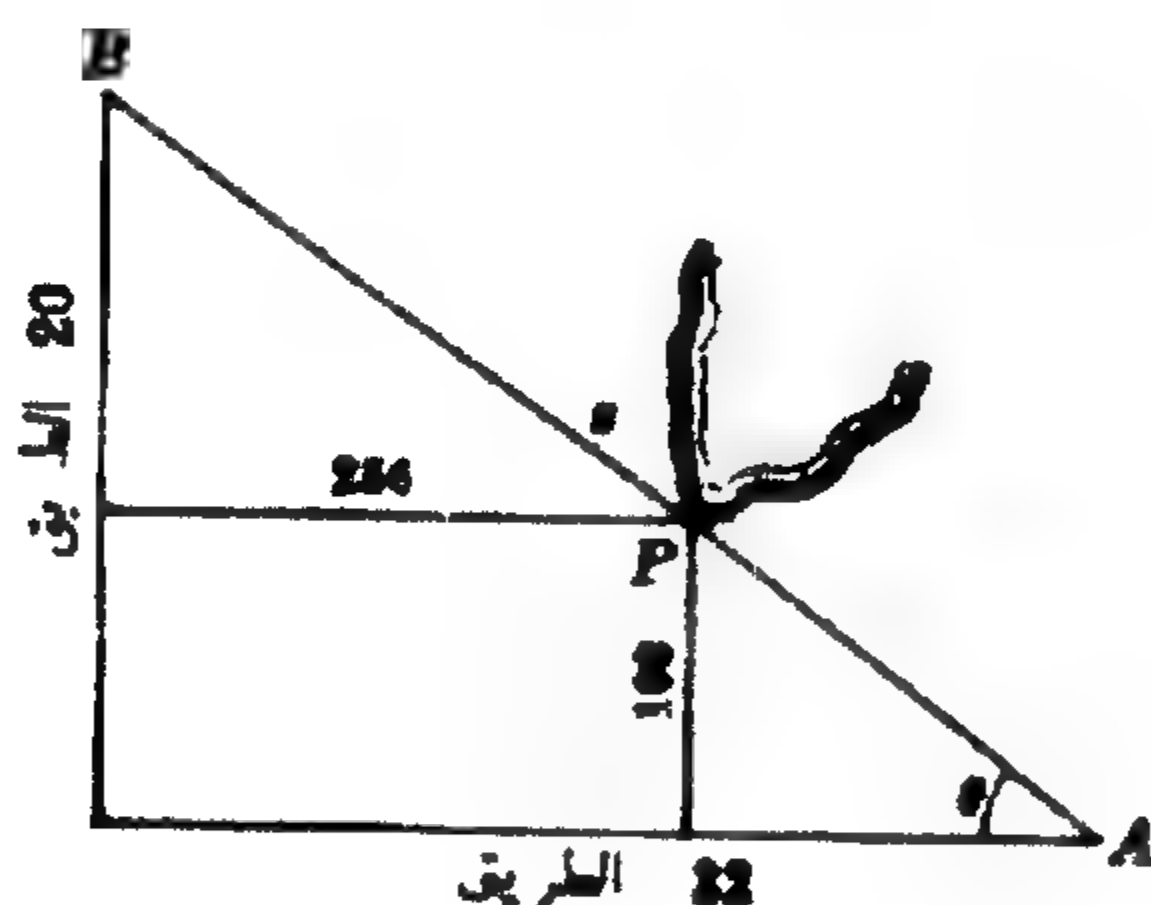
(ب) للمنحنى (١)  $y' = 4 \sin x \cos x$

و للمنحنى (٢)  $y' = -2 \sin x$

ويكون عند النقطة  $\pi/6$   $m_1 = \sqrt{3}$  و  $m_2 = -\sqrt{3}$

(ج)  $\tan \phi = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - 3} = -\sqrt{3}$  وزاوية التقاطع الحادة تساوي  $60^\circ$  كذلك تكون زاوية

التقاطع الحادة عند كل من النقط المتبقية تساوية  $60^\circ$ .



شكل ١٢ - ١٠

١٩- ضلعان متجاوران لقطعة أرض مستطيلة يمتدان على الطريقتين العموديتين

20 و 32. يوجد في قطعة الأرض بحيرة صغيرة يمتد أحد أطرافها

عن الطريق 20 مسافة 256 m وعن الطريق 32 مسافة 256 m

أوجد أقصر الطرق المستقيمة طولا التي يقطع الأرض من أحد الطريقتين

العموديتين إلى الآخر بحيث يمر بذلك الطرف المشار إليه من البحيرة.

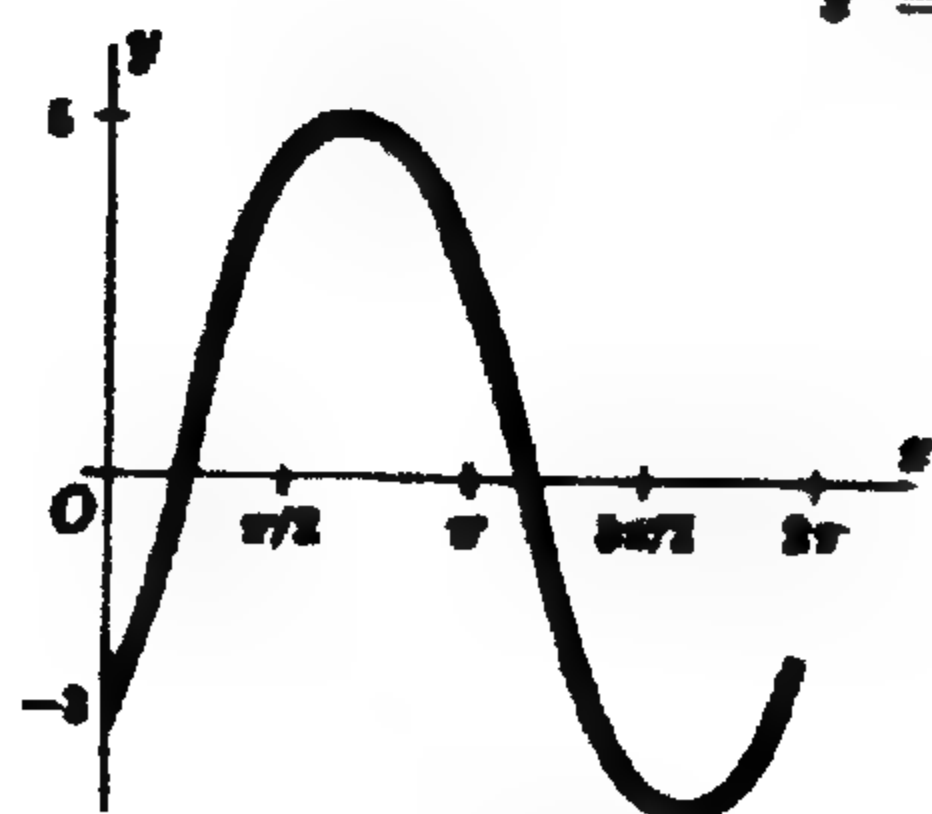
ليكن  $s$  طول الطريق المطلوب و  $\theta$  الزاوية التي يصنعها مع الطريق

العام 32.

$$\begin{aligned} s &= AP + PB = 108 \csc \theta + 256 \sec \theta \\ \frac{ds}{d\theta} &= -108 \csc \theta \cot \theta + 256 \sec \theta \tan \theta \\ &= \frac{-108 \cos^2 \theta + 256 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \end{aligned} \quad \text{ومنه}$$

ومنه  $-108 \cos^2 \theta + 256 \sin^2 \theta = 0$  و  $\tan^2 \theta = 27/64$  و القيمة الحرجة هي  $\theta = \arctan 3/4$

وبالتالي فإن  $s = 108 \csc \theta + 256 \sec \theta = 108(5/3) + 256(5/4) = 500 \text{ m}$



شكل ١٢ - ١٠

٢٠- ادرس المنحنى  $y = f(x) = 4 \sin x - 3 \cos x$  في الفترة  $[0, 2\pi]$

عندما  $x = 0$  تكون  $y = f(0) = 4(0) - 3(1) = -3$

وحيث أن  $f(x) = 0$  فإننا نضع  $f(x) = 4 \sin x - 3 \cos x$

نجد أن  $x = 3/4$  وأن المنحنى يقطع المحور  $x$  في  $x = 0.64 \text{ rad}$

و  $x = \pi + 0.64 = 3.78 \text{ rad}$  وإن  $f'(x) = 4 \cos x + 3 \sin x$

فإننا نضعه  $f'(x) = 0$  نجد  $\tan x = -4/3$

والقيم الحرجة هي  $x = 2\pi - 0.93 = 5.35$  و  $x = \pi - 0.93 = 2.21$



وأن  $f''(x) = -4 \sin x + 3 \cos x$  إذاً وضماً  $f''(x) = 0$  نجد  $\tan x = 3/4$

والنقط المرشحة لتكون نقط انعطاف هي  $x = 64$  و  $x = \pi + 64 = 3.78$ .

وأن  $f'''(x) = -4 \cos x - 3 \sin x$ .

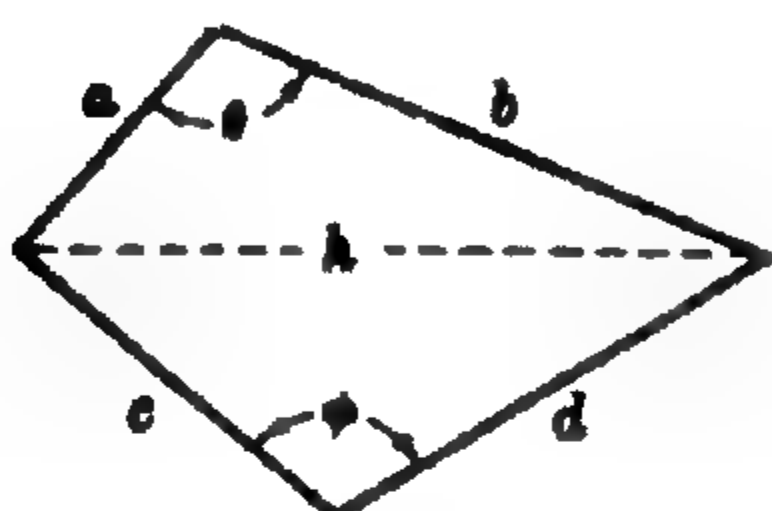
(أ) عندما  $x = 2.21$  يكون  $\sin x = 4/5$  و  $\cos x = -3/5$  ،  $f''(x) = 0$  و  $x = 2.21$  فهناك

قيمة معطى نسبية  $= 5$  . وعندما  $x = 5.35$  نجد قيمة صغرى نسبية  $= -5$  .

(ب) إن  $f''(64) \neq 0$  و  $f''(3.78) \neq 0$  ونقطتي الانعطاف هما :  $(64, 0)$  و  $(3.78, 0)$  .

(ج) إن المنحنى مقعر لأعلى من  $x = 0$  إلى  $x = 64$  و مقعر لأسفل من  $x = 64$  إلى  $x = 3.78$  و منفر لأعلى من

$x = 3.78$  إلى  $2\pi$



شكل ١٢ - ٧

٢١ - ترتبط أربعة قضبان ، أطوالها  $a, b, c, d$  مع بعضها لتكون شكلاً رباعياً .

بين أن المساحة  $A$  تكون أكبر ما يمكن عندما تكون الزاويتان المتقابلتان متكاملتين .

لنرمز  $\theta$  للزاوية بين القضيبتين اللتين طوليهما  $a, b$  و  $\phi$  للزاوية المقابلة .

وله من  $h$  لطول القطر المقابل لزاويتي .

والمطلوب البحث عن القيمة المعطى لـ :

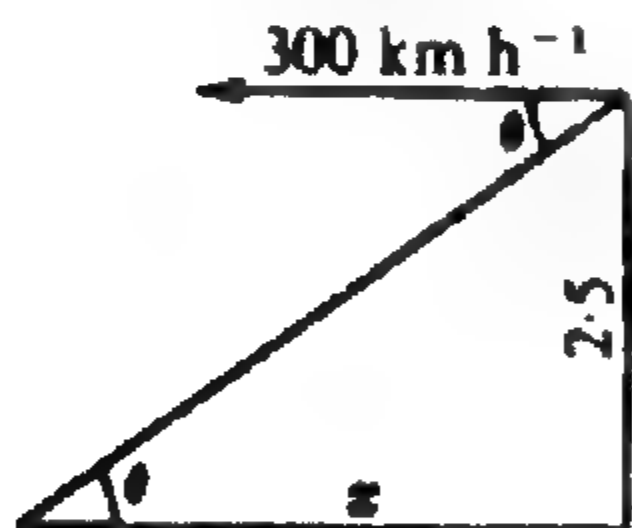
$$(١) \quad A = \frac{1}{2}ab \sin \theta + \frac{1}{2}cd \sin \phi \quad \text{المقيدة بالشرط}$$

$$(٢) \quad h^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2 + d^2 - 2cd \cos \phi \quad \text{لاشتقاق بالنسبة لـ } x \text{ نجد :}$$

$$(١) \quad \frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}ab \cos \theta + \frac{1}{2}cd \cos \phi \frac{d\phi}{d\theta} = 0 \quad \text{و} \quad ab \sin \theta = cd \sin \phi \frac{d\phi}{d\theta} \quad (٢)$$

ويحل (٢) بالنسبة لـ  $d\phi/d\theta$  والتمويض في (١) نحصل على :

$$\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta = \sin(\phi + \theta) = 0 \quad \text{أو} \quad ab \cos \theta + cd \cos \phi \frac{ab \sin \theta}{cd \sin \phi} = 0$$



شكل ١٢ - ٨

ومن نجد  $\phi + \theta$  تساوية للصفر أو  $\pi$  ولكن الحالة الأولى مرفوضة كما يتبين بسهولة .

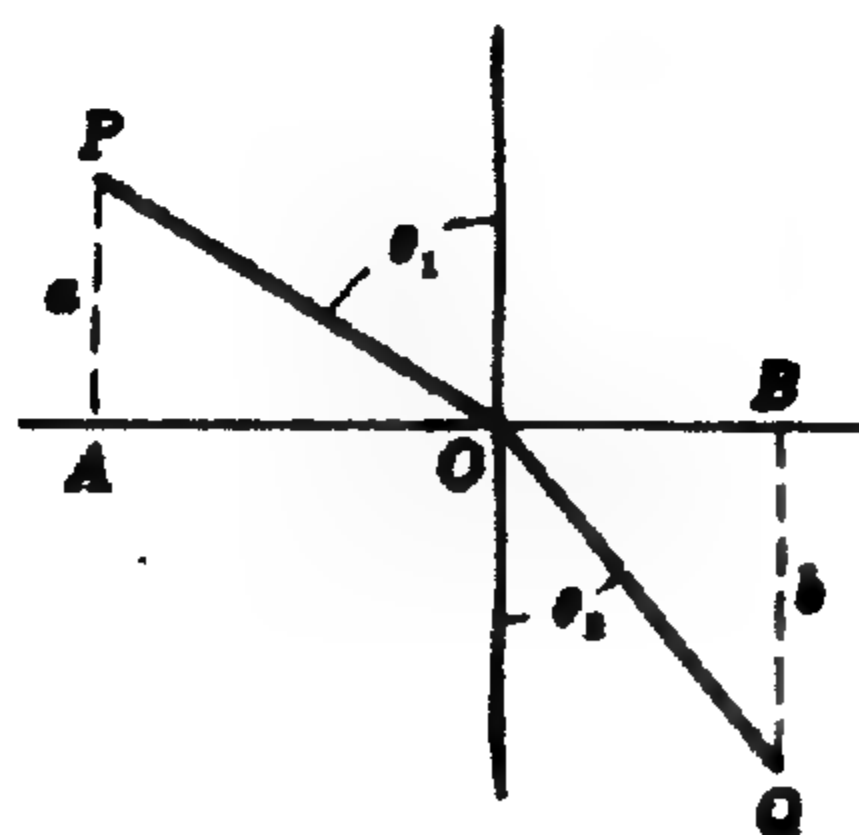
٢٢ - قاذف لقنابل مسدد مباشرة نحو هدف على الأرض . فإذا كانت القذيفة تطير على علو

2.5 km فوق الأرض بمعدل 300 km/hr فبأية سرعة ينبغي أن ندير جهاز التسييد عندما

تكون الزاوية بين مسار القذيفة وخط التسييد تساوى  $30^\circ$  ؟

$$x = 2.5 \cot \theta \quad \text{و} \quad \frac{dx}{dt} = -300 \text{ km h}^{-1}, \theta = 30^\circ,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 80 \text{ rad/hr} = \frac{3}{2\pi} \text{ deg/sec.} \quad \text{أو} \quad -300 = -2.5(4) \frac{d\theta}{dt} \quad \text{أو} \quad \frac{dx}{dt} = -2.5 \csc^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$



شكل ١٢ - ٩

٢٢ - يسير شراع ضوئى في الهواء بسرعة  $v_1$  من نقطة  $P$  على علو  $a$  وحدة فوق سطح

جسم مائى إلى نقطة  $O$  على السطح ومن ثم يتابع سيره بسرعة  $v_2$  إلى نقطة  $Q$

تقطع على مسافة  $b$  وحدة أسفل السطح . فإذا كانت الزاويتان اللتان يصنعهما

$OP$  و  $OQ$  مع العمود على السطح هما  $\theta_1, \theta_2$  فبين أن المسار من  $P$  إلى  $Q$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{أسرع ما يمكن عندما تتحقق العلاقة}$$

لنرمز بـ  $t$  الفترة الزمنية اللازمة من  $P$  إلى  $Q$  وبـ  $c$  مسافة من  $A$  إلى  $B$

عندئذ يكون :

$$c = a \tan \theta_1 + b \tan \theta_2 \quad \text{و} \quad t = \frac{a \sec \theta_1}{v_1} + \frac{b \sec \theta_2}{v_2}$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ  $\theta_1$  نجد :

$$0 = a \sec^2 \theta_1 + b \sec^2 \theta_2 \cdot \frac{d\theta_1}{d\theta_2} \quad , \quad \frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a \sec \theta_1 \tan \theta_1}{v_1} + \frac{b \tan \theta_2 \sec \theta_2}{v_2} \cdot \frac{d\theta_1}{d\theta_2}$$

ومن المعادلة الأخيرة نحصل على  $\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = -\frac{a \sec^2 \theta_1}{b \sec^2 \theta_2}$  ولكي تكون  $t$  أقصر ما يمكن يجب أن يكون :

$$\frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a \sec \theta_1 \tan \theta_1}{v_1} + \frac{b \sec \theta_2 \tan \theta_2}{v_2} \left( -\frac{a \sec^2 \theta_1}{b \sec^2 \theta_2} \right) = 0$$

ومنه تنتج العلاقة المطلوبة .

### مسائل إضافية

٢٤ - احسب لقيم التالية (أ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$  ، (ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$  ،

(ج)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin^2 3x}$  ، (د)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$  ،

الجواب : (أ) 2 (ب)  $a/b$  (ج)  $8/9$  (د) 0 .

٢٥ - استنتج صيغة الاشتقاق (١٧) باستخدام (أ)  $\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$  ، (ب)  $\cot u = \frac{1}{\tan u}$

استنتج أيضاً صيغ الاشتقاق ١٨ و ١٩ .

في المسائل ٢٦ - ٤٥ أوجد المشتقة  $dy/dx$  أو المشتقة  $dp/d\theta$  .

$6 \cos 2x$ : ج	$y = 3 \sin 2x$ - ٢٦
$-2 \sin \frac{1}{2}x$ : ج	$y = 4 \cos \frac{1}{2}x$ - ٢٧
$20 \sec^3 5x$ : ج	$y = 4 \tan 5x$ - ٢٨
$-2 \csc^3 8x$ : ج	$y = \frac{1}{4} \cot 8x$ - ٢٩
$3 \sec \frac{1}{2}x \tan \frac{1}{2}x$ : ج	$y = 9 \sec \frac{1}{2}x$ - ٣٠
$y = -\csc 4x \cot 4x$ : ج	$y = \frac{1}{2} \csc 4x$ - ٣١
$x \sin x + 2x + 4$ : ج	$y = \sin x - x \cos x + x^2 + 4x + 3$ - ٣٢
$(\cos \theta)/(2\sqrt{\sin \theta})$ : ج	$\rho = \sqrt{\sin \theta}$ - ٣٣
$(-2 \cos 2/x)/x^3$ : ج	$y = \sin 2/x$ - ٣٤
$2x \sin (1 - x^2)$ : ج	$y = \cos (1 - x^2)$ - ٣٥
$y = 2(1 - x) \sin (1 - x)^2$ : ج	$y = \cos (1 - x)^2$ - ٣٦
$3 \sin (6x - 4)$ : ج	$y = \sin^2 (3x - 2)$ - ٣٧
$-\frac{1}{2} (\cos (6x - 9) - \cos (2x - 3))$ : ج	$y = \sin^2 (2x - 3)$ - ٣٨
$\sin 2x$ : ج	$y = \frac{1}{2} \tan x \sin 2x$ - ٣٩
$\frac{-3 \sec 2\theta \tan 2\theta}{(\sec 2\theta - 1)^{3/2}}$ : ج	$\rho = \frac{1}{(\sec 2\theta - 1)^{3/2}}$ - ٤٠
$2 \frac{\sec^2 2\theta - 4 \csc 4\theta}{(1 - \cot 2\theta)^2}$ : ج	$\rho = \frac{\tan 2\theta}{1 - \cot 2\theta}$ - ٤١
$x^2 \cos x$ : ج	$y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$ - ٤٢
$\frac{2 \sin 2x}{\cos y}$ : ج	$\sin y = \cos 2x$ - ٤٣
$\frac{2 \sec^2 2x}{3 \sin 3y}$ : ج	$\cos 3y = \tan 2x$ - ٤٤
$\frac{\cos y - \cos (x + y)}{x \sin y + \cos (x + y)}$ : ج	$x \cos y = \sin (x + y)$ - ٤٥

٤٦ - بفرض أن  $x = A \sin kt + B \cos kt$  حيث  $A, B, k$  ثوابت بين أن  $\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$  و  $\frac{d^{2n}x}{dt^{2n}} = (-1)^n k^{2n}x$ .

٤٧ - بين أن : (أ)  $y'' + 4y = 0$  إذا كان  $y = 3 \sin(2x + 3)$

(ب)  $y''' + y'' + y' + y = 0$  إذا كان  $y = \sin x + 2 \cos x$ .

٤٨ - ادرس وارسم في الفترة  $0 \leq x < 2\pi$  :

(أ)  $y = \frac{1}{2} \sin 2x$  (ب)  $y = x - 2 \sin x$  (ج)  $y = 4 \cos^2 x - 8 \cos x$  (د)

(ب)  $y = \cos^3 x - \cos x$  (د)  $y = \sin x (1 + \cos x)$

الجواب :

(أ) قيمة عظمى عند  $x = \pi/4$  و  $5\pi/4$  وقيمة صغرى عند  $x = 3\pi/4, 7\pi/4$  ونقط انعطاف عند  $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$

(ب) قيمة عظمى عند  $x = 0, \pi$  وقيمة صغرى عند  $x = \pi/3, 5\pi/3$

ونقط انعطاف عند  $x = 32^\circ 32', 126^\circ 28', 233^\circ 37', 327^\circ 28'$

(ج) قيمة عظمى عند  $x = 5\pi/3$  وقيمة صغرى عند  $x = \pi/3$  ونقط انعطاف عند  $x = 0, \pi$

(د) قيمة عظمى عند  $x = \pi/3$  وقيمة صغرى عند  $x = 5\pi/3$  ونقط انعطاف عند  $x = 0, \pi, 104^\circ 29', 255^\circ 31'$

(هـ) قيمة عظمى عند  $x = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$  وقيمة صغرى عند  $x = \pi/3, \pi, 5\pi/3$

ونقط انعطاف عند  $x = \pi/2, 3\pi/2, \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$

٤٩ - إذا كانت زاوية ارتفاع الشمس  $45^\circ$  وإذا تناقصت هذه الزاوية بمعدل  $1/4 \text{ rad/hr}$  فبأية سرعة يزداد طول

الظل الملق على سطح الأرض لعمود طوله  $16 \text{ m}$ .

ج :  $8 \text{ m/hr}$ .

٥٠ - تملو طائرة ورقية  $60 \text{ m}$  عن الأرض وتحرك أفقياً بمعدل  $5 \text{ m/sec}$  فبأية نسبة يتناقص ميل الحيط عن الأفق

بفرض أن طول الحيط الخارجى  $120 \text{ m}$ .

الجواب :  $1/48 \text{ rad/sec}$ .

٥١ - منارة دائرية موضوعة على بعد  $1200 \text{ m}$  من شاطئ مستقيم . فلما كانت هذه المنارة تدور بمعدل  $4\pi \text{ rad/min}$

فبأية سرعة يمسح الشعاع الضوئى الشاطئ (أ) عند أقرب نقطة منه ؟ (ب) عند النقطة التى تبعد  $1600 \text{ m}$  من النقطة الأقرب ؟

ج : (أ)  $80\pi \text{ m/s}$

(ب)  $2000\pi/9 \text{ m/s}$ .

٥٢ - طولاً ضلعي مثلث  $6 \text{ m}$  و  $8 \text{ m}$  على الترتيب (أ) بأية سرعة يزداد طول الضلع الثالث عندما تكون الزاوية

بين الضلعين المقروضين  $60^\circ$  وتزداد بمعدل  $2^\circ$  كل ثانية ؟ (ب) بأية سرعة تزداد المساحة ؟

ج : (أ)  $2\pi/5\sqrt{39}$

(ب)  $2\pi/15 \text{ m}^2/s$ .

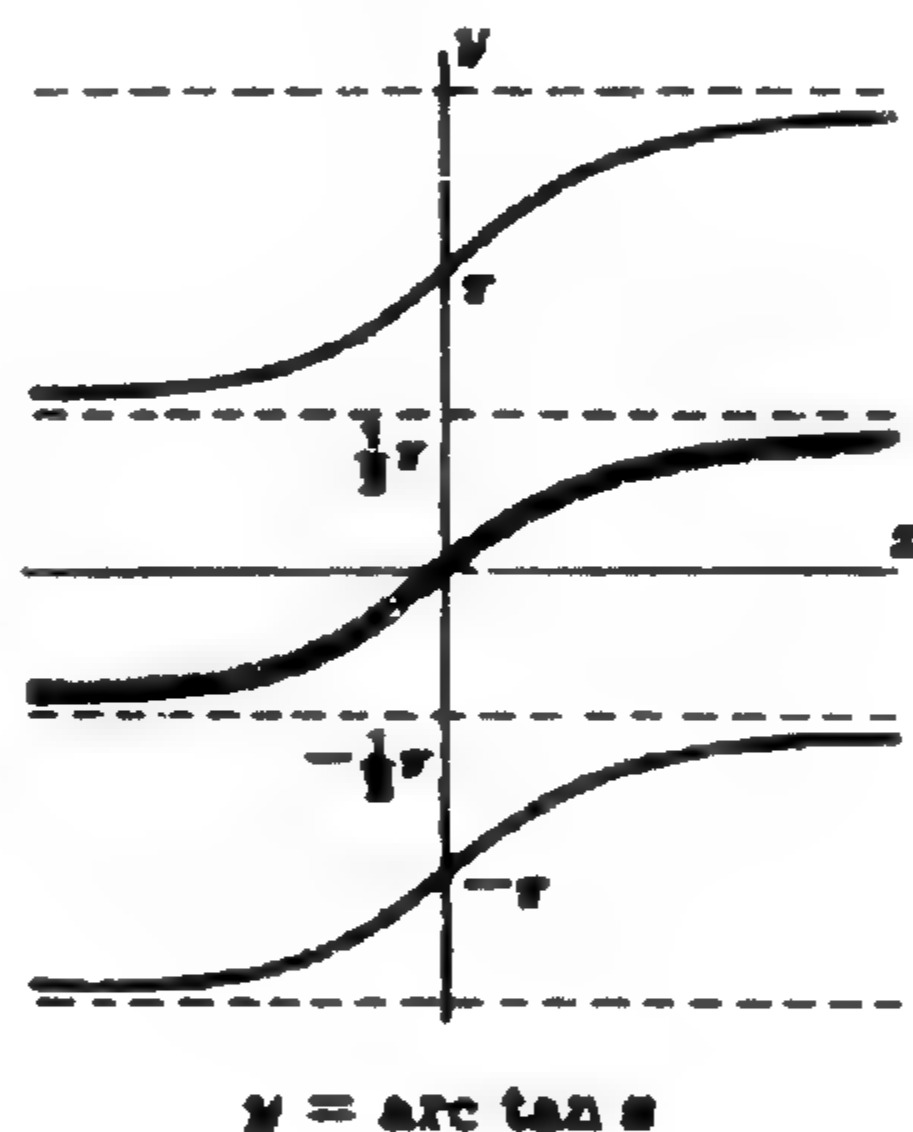
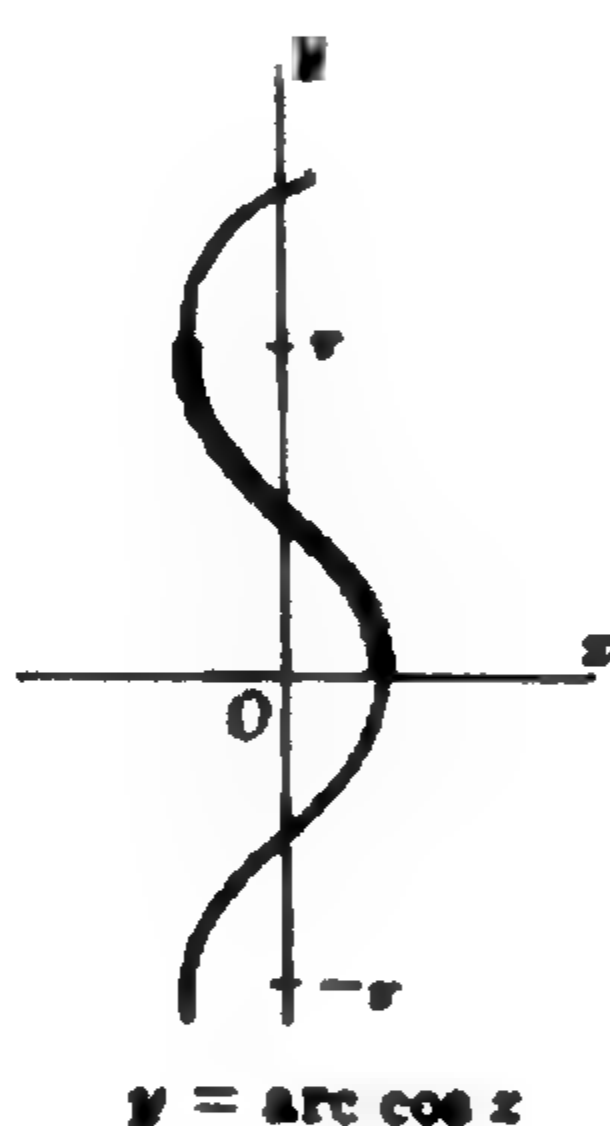
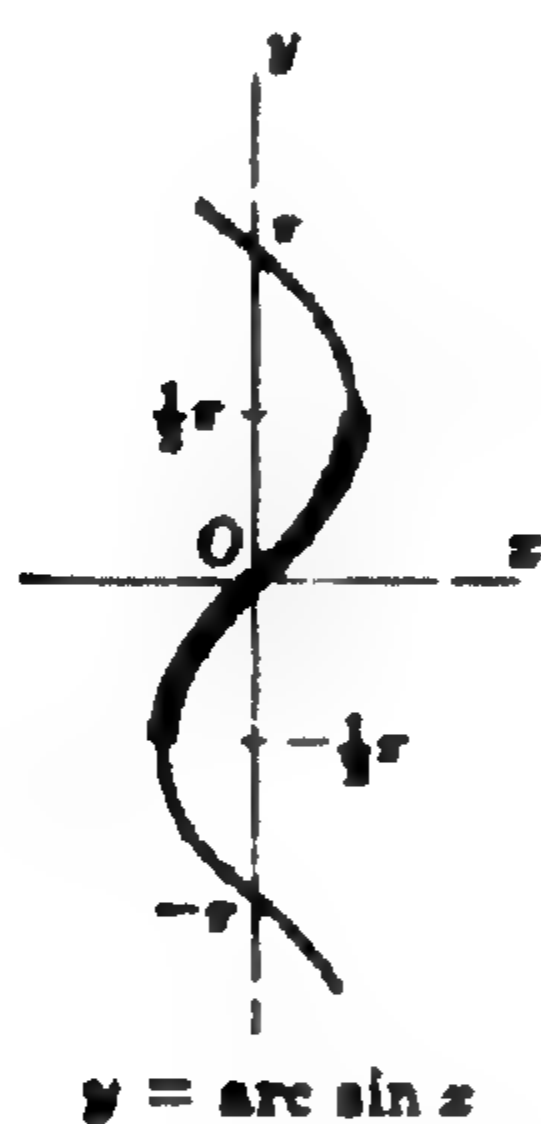
# الفصل الثالث عشر

## اشتقاق الدوال المثلثية العكسية

### الدوال المثلثية العكسية :

إذا كانت  $x = \sin y$  فإن الدالة العكسية تكتب بالشكل  $y = \arcsin x$ . حيث التعريف لـ  $\arcsin x$  هو  $-1 \leq x \leq 1$  وعلى  $\sin y$  أو  $\arcsin x$  هو فئة الأعداد الحقيقية وهو حيث التعريف لـ  $\sin y$ . ويمكن بشكل مثال الحصول على تعريف آخر وعلى مدى آخر من الدوال المثلثية العكسية الأخرى.

إن الدوال المثلثية العكسية متعددة القيم. ومن المتفق عليه أن يقسم المنحنى إلى أقواس وحيدة القيم. نعرف فيما يلي قوس من هذا النوع (يسمى الفرع الرئيسي) لكل دالة. ولقد ميزنا في المنحنيات المرافقة الفرع الرئيسي بخط أسود مريض.



شكل ١٢ - ١

#### الفرع الرئيسي

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 &\leq y \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} &< y < \frac{\pi}{2} \\ 0 &< y < \pi \\ -\pi &\leq y < -\frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y < \frac{\pi}{2} \\ -\pi &< y \leq -\frac{\pi}{2}, \quad 0 < y \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

#### الدالة

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x \\ y &= \arccos x \\ y &= \arctan x \\ y &= \operatorname{arccot} x \\ y &= \operatorname{arcsec} x \\ y &= \operatorname{arccsc} x \end{aligned}$$

**قواعد الاشتقاق :** لتكن  $u$  دالة قابلة للاشتقاق في  $x$  معتمد يكون :

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arccot} u) = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad ٢٢ \quad \frac{d}{dx} (\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad ٢٠$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \quad ٢٤ \quad \frac{d}{dx}(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad ٢٥$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \quad ٢٦ \quad \frac{d}{dx}(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad ٢٧$$

### مسائل محلولة

$$\frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \quad (ب) \quad \frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad (١) - \text{النتيجة}$$

(١) ليكن  $y = \arcsin u$  حيث  $u = \sin y$  دالة قابلة للاشتقاق في  $x$  عندئذ يكون  $u = \sin y$  ومنه

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dy}(\sin y) \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-u^2} \frac{dy}{dx}$$

لقد اخترنا الإشارة الموجبة لأن  $\cos y \geq 0$  في الفترة  $-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$ ، وهكذا نجد  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$ .

(ب) ليكن  $y = \arcsin u$  حيث  $u = \sec y$  دالة قابلة للاشتقاق في  $x$  عندئذ يكون  $u = \sec y$  ومنه

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\sec y) \frac{dy}{dx} = \sec y \tan y \frac{dy}{dx} = u\sqrt{u^2-1} \frac{dy}{dx}$$

لقد اخترنا الإشارة الموجبة لأن  $\tan y \geq 0$  في الفترتين  $0 \leq y < \frac{1}{2}\pi$ ،  $-\pi \leq y < -\frac{1}{2}\pi$ ، وهكذا نجد

$$\frac{d}{dx}(\arcsin u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

أوجد المشتقة الأولى في كل من المسائل ٢-٩ :

$$y = \arcsin(2x-3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} \frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}} \quad - ٢$$

$$y = \arccos x^3 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^6}} \frac{d}{dx}(x^3) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^6}} \quad - ٣$$

$$y = \arctan 3x^2 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(3x^2)^2} \frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{6x}{1+9x^4} \quad - ٤$$

$$f(x) = \operatorname{arccot} \frac{1+x}{1-x} \quad - ٥$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \quad - ٦$$

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}(-2x) + (a^2-x^2)^{1/2} + a^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}} \cdot \frac{1}{a} = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

$$y = x \operatorname{arccsc} \frac{1}{x} + \sqrt{1-x^2} \quad - ٧$$

$$y' = x \left[ \frac{-1}{\frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \right] + \operatorname{arccsc} \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}(x) + \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = \operatorname{arccsc} \frac{1}{x}$$



$$y = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{b}{a} \tan x\right) \quad - ٨$$

$$y' = \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a} \tan x\right)^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{a} \tan x\right) = \frac{1}{ab} \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2 \tan^2 x} \cdot \frac{b}{a} \sec^2 x$$

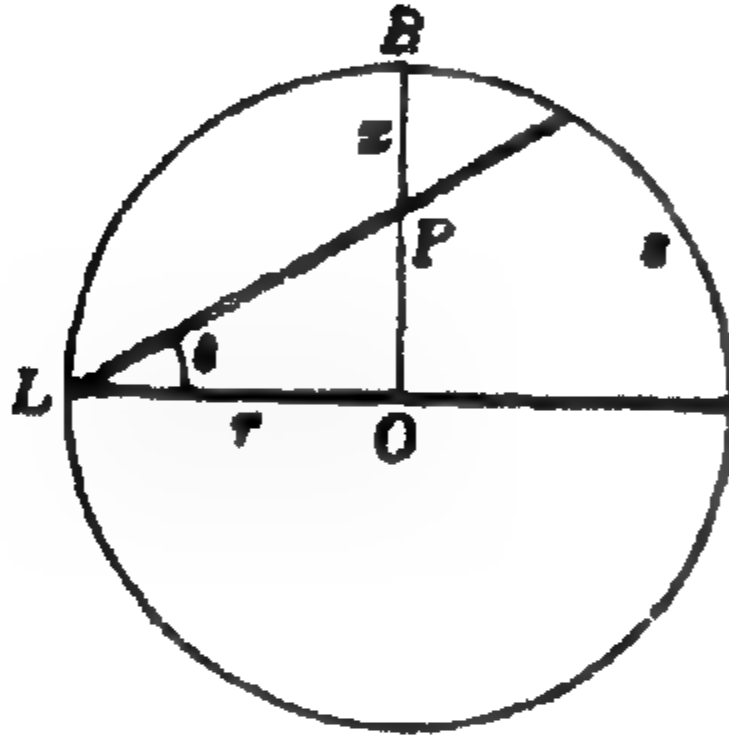
$$= \frac{\sec^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} = \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$y^2 \sin x + y = \arctan x$$

$$2yy' \sin x + y^2 \cos x + y' = \frac{1}{1+x^2} \quad - ٩$$

$$y'(2y \sin x + 1) = \frac{1}{1+x^2} - y^2 \cos x \quad \therefore y' = \frac{1 - (1+x^2)y^2 \cos x}{(1+x^2)(2y \sin x + 1)}$$

١٠ - في النقطة  $L$  من ميدان سباق دائري يوجد منبع ضوئي . لنفرض أن سيارا انطلق من  $B$  واكضا يعمل  $3 \text{ ms}^{-1}$  متجها نحو المركز  $O$  . فبأي معدل يتحرك ظلها على محيط الميدان وذلك عندما يكون السبي في منتصف المسافة من  $B$  إلى  $O$  ؟



شكل ١٢ - ٢

لتكن  $P$  التي تبعد عن  $B$  بمقدار  $x \text{ m}$  ، موضع السبي في اللحظة  $t$  ولنرمز بـ  $\theta$  لنصف قطر الميدان وبـ  $\theta$  لزاوية  $OLP$  وبـ  $s$  القوس الدائري الذي تحدده  $\theta$  عندئذ

$$\theta = \arctan OP/LO = \arctan (r-x)/r. \quad \text{و} \quad s = r(20)$$

$$\frac{ds}{dt} = 2r \frac{d\theta}{dt} = 2r \cdot \frac{1}{1 + [(r-x)/r]^2} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{-2r^2}{x^2 - 2rx + 2r^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

وعندما تكون  $x = \frac{1}{2}r$  و  $dx/dt = 3$  نجد  $ds/dt = -4.8 \text{ ms}^{-1}$  .  
والظل يتحرك على جدار الميدان بمعدل  $4.8 \text{ ms}^{-1}$  .

١١ - يرتفع الطرف الأسفل لصورة عن الأرض  $4 \text{ m}$  ويطلو عن عيني مشاهد  $2 \text{ m}$  فإذا قلنا أنه يمكن الحصول على أفضل مشهد عندما تكون الزاوية التي يرى المشاهد من خلالها الصورة أكبر ما يمكن ، فلو وجد على أي بعد من الجدار ينبغي أن يقف المشاهد ؟



لنرمز بـ  $\theta$  للزاوية التي يرى المشاهد من خلالها الصورة وبـ  $x$  لبعده عن الجدار . من الشكل ١٢ - ٣ نجد  $\tan \phi = 2/x$  و  $\tan(\theta + \phi) = 6/x$  .

$$\tan \theta = \tan((\theta + \phi) - \phi) = \frac{\tan(\theta + \phi) - \tan \phi}{1 + \tan(\theta + \phi) \tan \phi} = \frac{6/x - 2/x}{1 + (6/x)(2/x)} = \frac{4x}{x^2 + 12}$$

ومن  $\theta = \arctan \frac{4x}{x^2 + 12}$  وبالتالي  $\frac{d\theta}{dx} = \frac{4(-x^2 + 12)}{x^4 + 40x^2 + 144}$  واتقبة الحرجة شكل ١٢ - ٣

من  $x = 2\sqrt{3} = 3.5$  يمكننا نجد أن على المشاهد أن يقف على بعد  $3.5 \text{ m}$  من الجدار .

## مسائل اضافية

١٧ - اشتج صيغة الاشتقاق ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٥

أوجد  $dy/dx$  في كل من المسائل ١٢ - ٢٠

$$١٧ - y = \arcsin 3x \quad : ج \quad y = x^3 \arccos 2/x - ١٧ \quad \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} \quad : ج \quad y = x^2 \arccos \frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \quad : ج$$

$$١٨ - y = \arccos \frac{1}{x} \quad : ج \quad y = \arcsin \frac{x}{a} - ١٨ \quad - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad : ج \quad y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin \frac{x}{a} \quad : ج \quad \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$$

$$١٩ - y = \arctan 3/x \quad : ج \quad y = (x-a)\sqrt{2ax-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x-a}{a} - ١٩ \quad - \frac{3}{x^2+9} \quad : ج \quad y = (x-a)\sqrt{2ax-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x-a}{a} - ١٩$$

$$٢٠ - y = \arcsin (x-1) \quad : ج \quad y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + \frac{1}{2} \arccos \frac{x}{2} - ٢٠ \quad \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \quad : ج \quad y = \frac{8}{x^2\sqrt{x^2-4}} \quad : ج$$

٢١ - يراد وضع منبع ضوء فوق المركز مباشرة لقطعة أرض دائرية الشكل نصف قطرها 10 m على أن يكون ارتفاع المنبع عن المركز بحيث تكون تلة الإضاءة على حواف القطعة أكبر ما يمكن . أوجد هذا الارتفاع بفرض أن شدة الإضاءة عند أى نقطة من الحواف تتناسب طرديا مع جيب تمام زاوية السقوط ( الزاوية بين شعاع الضوء والعمود ) وعكسيا مع مربع البعد عن المنبع .

إرشاد : لنفرض  $x$  الارتفاع المطلوب ، ولنرمز بـ  $y$  لبعد المنبع عن نقطة من الحواف وبـ  $\theta$  لزاوية

$$\text{السقوط عندئذ يكون} \quad I = k \frac{\cos \theta}{y^2} = \frac{kx}{(x^2+100)^{3/2}} \quad : ج \quad 5\sqrt{2} \text{ m}$$

٢٢ - تبدأ باخترتان في الإبحار من نقطة A في آن واحد ، غير أن واحدة منها تبحر نحو الجنوب بمعدل  $24 \text{ km hr}^{-1}$  في حين تبحر الثانية نحو الشرق بمعدل  $40 \text{ km hr}^{-1}$  لمدة ساعة واحدة ثم تتور نحو الشمال . أوجد سرعة دوران المستقيم الذي يصل بين الباخرتين وذلك بعد مضي 3 hr . ج :  $70/193 \text{ rad/hr}$

## الفصل الرابع عشر

### المتكافئ التحوال الأسية واللوغاريتمية

يعرف العدد  $e$  كما يلي :

$$e = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{1/k}$$

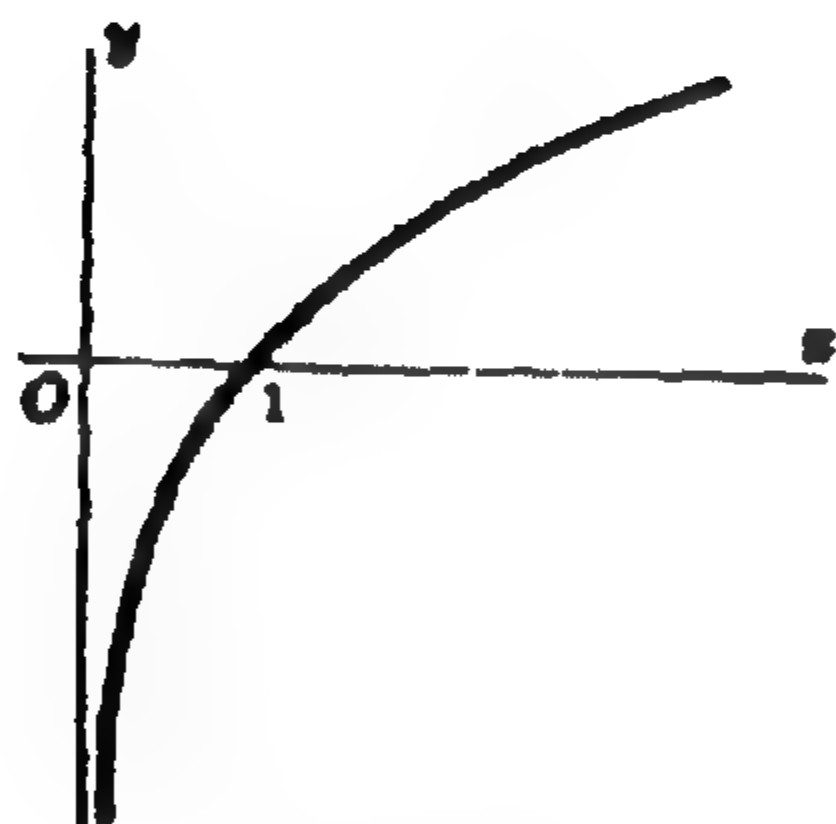
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = 2.718\ 28\dots$$

انظر المثال ١

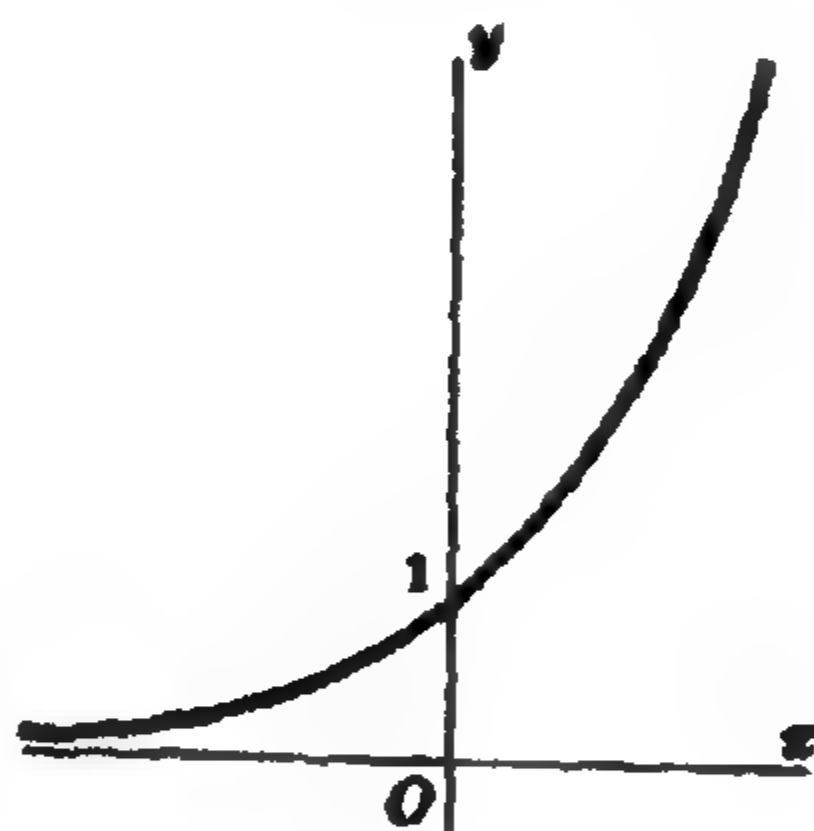
**ملاحظة :** إذا كان  $a > 0$  ,  $a \neq 1$  وإذا كان  $a^y = x$  فإن  $y = \log_a x$ .

$$y = \log_e x = \ln x \quad y = \log_{10} x = \log x$$

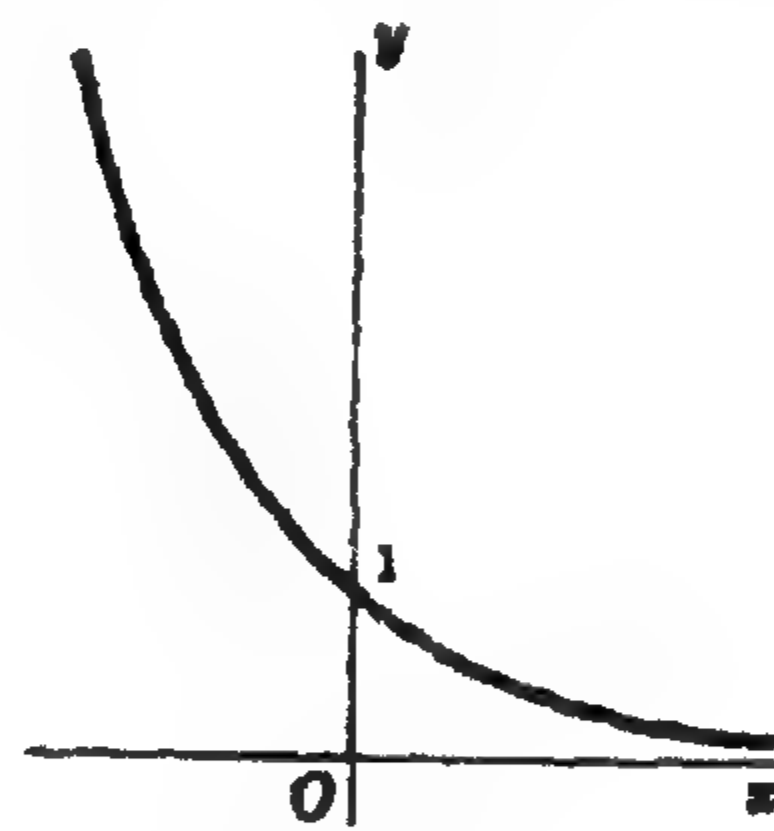
إن حيز التعريف  $x \geq 0$  وأما المتغير فهو فئة الأعداد الحقيقية .



$$y = \ln x$$



$$y = e^x$$



$$y = e^{-x}$$

شكل ١٤ - ١

**قواعد الاشتقاق :** إذا كانت  $u$  دالة قابلة للاشتقاق في  $x$  فإن :

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}, \quad (a > 0) \quad - \quad ٢٨$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u} \log_a a \frac{du}{dx}, \quad (a > 0, a \neq 1) \quad - \quad ٢٦$$

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx} \quad - \quad ٢٩$$

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad - \quad ٢٧$$

انظر المثال ٢ - ١٧

**الاشتقاق اللوغاريتمى :** إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق  $y = f(x)$  مكونة من حاصل ضرب عدة عوامل فإنه يمكن تبسيط طريقة اشتقاقها ، وذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للدالة قبل الاشتقاق ، أى اننا ، بعبارة مكافئة ، نتمثل للصيغة :

$$\frac{d}{dx}(y) = y \frac{d}{dx}(\ln y) \quad - ٢٠$$

انظر المسائل ١٨ - ١٩

### مسائل محلولة

$$١ - \text{نحقق من كون } 2 < \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

باستخدام نظرية ذات الحدين ، عندما  $n$  عدد صحيح موجب نجد :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 \\ &\quad + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{3!} \\ &\quad + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!} \end{aligned} \quad (١)$$

ومنه يتضح أنه لجميع قيم  $n \neq 1$  فإن  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$  كذلك إذا استبدلنا في (١) كل فرق من  $\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right), \dots$  العدد ١ الذى يكبره ، فإننا نجد :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad \left( \text{لأن } \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ &< 3 \quad \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 \right) \\ &2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3. \end{aligned}$$

وبالتالى فإن

فإذا جعلنا الآن  $n \rightarrow \infty$  على القيم الصحيحة الموجبة فإنه يكون :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!} \rightarrow \frac{1}{k!} \quad , \quad 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1, \quad 1 - \frac{2}{n} \rightarrow 1, \quad \dots,$$

ويقترب كل هذه النتيجة :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots = 2.718 \ 28 \dots$$

$$٧ - \text{استنتج } \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{d}{dx} (\log_e u) = \frac{1}{u} \log_e e \cdot \frac{du}{dx}$$

لتكن  $y = \log_a u$  حيث  $u$  دالة قابلة للاشتقاق في  $x$  عندنا يكون :

$$y + \Delta y = \log_a (u + \Delta u)$$

$$\Delta y = \log_a (u + \Delta u) - \log_a u = \log_a \frac{u + \Delta u}{u} = \log_a \left( 1 + \frac{\Delta u}{u} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta u}{u} \right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{u}{\Delta u} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta u}{u} \right) = \frac{1}{u} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta u}{u} \right)^{u/\Delta u}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta u}{u} \right)^{u/\Delta u} = \frac{1}{u} \log_a \left\{ \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\Delta u}{u} \right)^{u/\Delta u} \right\} = \frac{1}{u} \log_a e$$

$$\frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{d}{du} (\log_a u) \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx} \quad : \text{يمكننا نجد ، باستخدام قاعدة السلسلة :}$$

$$\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad \text{فإذا كان } u = e \text{ يكون } \log_e e = \log_e e = 1 \text{ وبالتالي}$$

$$y = \log_a (3x^2 - 5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2 - 5} \log_a e \cdot \frac{d}{dx} (3x^2 - 5) = \frac{6x}{3x^2 - 5} \log_a e \quad - ٧$$

$$y = \ln (x+3)^2 = 2 \ln (x+3) \quad \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{x+3} \cdot \frac{d}{dx} (x+3) = \frac{2}{x+3} \quad - ٨$$

$$y = \ln^2 (x+3) \quad - ٩$$

$$y' = 2 \ln (x+3) \cdot \frac{d}{dx} [\ln (x+3)] = 2 \ln (x+3) \cdot \frac{1}{x+3} \cdot \frac{d}{dx} (x+3) = \frac{2 \ln (x+3)}{x+3}$$

$$y = \ln (x^2 + 2)(x^2 + 3) = \ln (x^2 + 2) + \ln (x^2 + 3) \quad - ١٠$$

$$y' = \frac{1}{x^2 + 2} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 2) + \frac{1}{x^2 + 3} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 3) = \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{2x}{x^2 + 3}$$

$$f(x) = \ln \frac{x^4}{(3x-4)^2} = \ln x^4 - \ln (3x-4)^2 = 4 \ln x - 2 \ln (3x-4) \quad - ١١$$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x) - 2 \cdot \frac{1}{3x-4} \frac{d}{dx} (3x-4) = \frac{4}{x} - \frac{6}{3x-4}$$

$$y = \ln \sin 3x \quad y' = \frac{1}{\sin 3x} \cdot \frac{d}{dx} (\sin 3x) = \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \cot 3x \quad - ١٢$$

$$y = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) \quad - ١٣$$

$$y' = \frac{1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(2x)}{x + (1+x^2)^{1/2}} = \frac{1 + x(1+x^2)^{-1/2}}{x + (1+x^2)^{1/2}} \cdot \frac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} (a^u) = a^u \frac{du}{dx} \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a \frac{dx}{dx} \quad - ١٤$$

لكن  $y = a^x$  حيث  $a$  دالة قابلة للاشتقاق في  $x$  . عندنا يكون  $\ln y = x \ln a$

$$\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a \frac{dx}{dx} \quad \text{ل} \quad \frac{d}{dx} (\ln y) = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln a \frac{dx}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = y \ln a \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x \frac{dx}{dx} \quad \text{فإذا كان } a = e \text{ يكون } \ln a = \ln e = 1 \text{ وبالتالي نجد}$$

$$y = e^{-4x} \quad y' = e^{-4x} \frac{d}{dx} (-4x) = -4e^{-4x} \quad - ١٥$$

$$y = e^{x^2} \quad y' = e^{x^2} \cdot \frac{d}{dx} (x^2) = 2xe^{x^2} \quad - ١٦$$



$$y = a^{3x^2} \quad y' = a^{3x^2} \ln a \cdot \frac{d}{dx}(3x^2) = 6xa^{3x^2} \ln a \quad - ١٣$$

$$y = x^3 3^x \quad y' = x^3 \cdot \frac{d}{dx}(3^x) + 3^x \cdot \frac{d}{dx}(x^3) = x^3 3^x \ln 3 + 3^x 2x = x 3^x (x \ln 3 + 2) \quad - ١٤$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} & y' &= \frac{(e^{ax} + e^{-ax}) \frac{d}{dx}(e^{ax} - e^{-ax}) - (e^{ax} - e^{-ax}) \frac{d}{dx}(e^{ax} + e^{-ax})}{(e^{ax} + e^{-ax})^2} \quad - ١٥ \\ & & &= \frac{(e^{ax} + e^{-ax})[a(e^{ax} + e^{-ax})] - (e^{ax} - e^{-ax})[a(e^{ax} - e^{-ax})]}{(e^{ax} + e^{-ax})^2} \\ & & &= a \frac{(e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}) - (e^{2ax} - 2 + e^{-2ax})}{(e^{ax} + e^{-ax})^2} = \frac{4a}{(e^{ax} + e^{-ax})^2} \end{aligned}$$

$$- ١٦ \quad y = e^{-x} \ln x \quad \text{بفرض أن } y' =$$

$$\begin{aligned} y' &= e^{-x} \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x} \ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y \\ y'' &= \frac{x \frac{d}{dx}(e^{-x}) - e^{-x} \frac{d}{dx}(x)}{x^2} - y' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x} \ln x = -e^{-x} \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x \right) \end{aligned}$$

$$- ١٧ \quad y = e^{-2x} \sin 3x \quad \text{بفرض أن } y' =$$

$$\begin{aligned} y' &= e^{-2x} \frac{d}{dx}(\sin 3x) + \sin 3x \frac{d}{dx}(e^{-2x}) = 3e^{-2x} \cos 3x - 2e^{-2x} \sin 3x = 3e^{-2x} \cos 3x - 2y \\ y'' &= 3e^{-2x} \frac{d}{dx}(\cos 3x) + 3 \cos 3x \frac{d}{dx}(e^{-2x}) - 2y' \\ &= -9e^{-2x} \sin 3x - 6e^{-2x} \cos 3x - 2(3e^{-2x} \cos 3x - 2e^{-2x} \sin 3x) \\ &= -e^{-2x} (12 \cos 3x + 5 \sin 3x) \end{aligned}$$

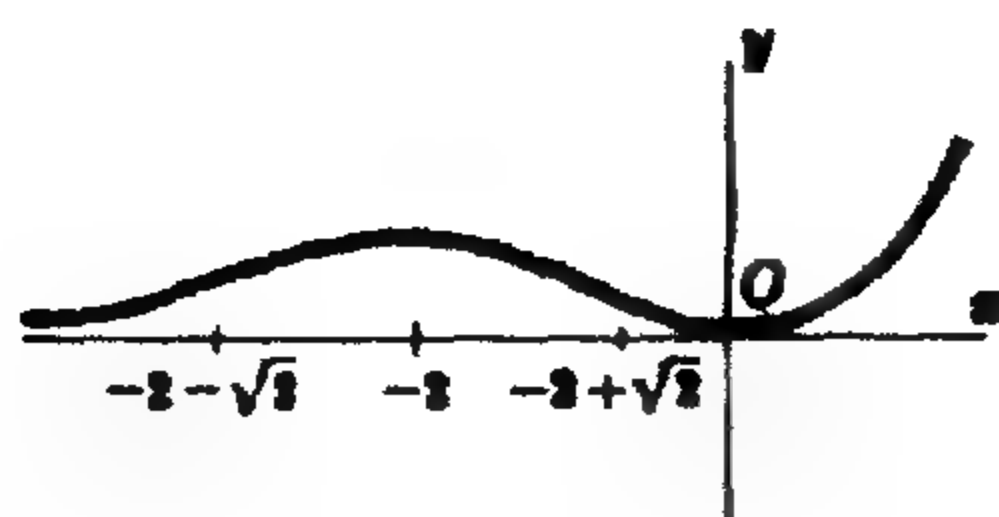
استخدم الاشتقاق اللوغاريتمى للحصول على المشتقة الأولى

$$y = (x^2 + 2)^3 (1 - x^2)^4 \quad \ln y = \ln (x^2 + 2)^3 (1 - x^2)^4 = 3 \ln (x^2 + 2) + 4 \ln (1 - x^2) \quad - ١٨$$

$$\begin{aligned} y' &= y \frac{d}{dx} [3 \ln (x^2 + 2) + 4 \ln (1 - x^2)] = (x^2 + 2)^3 (1 - x^2)^4 \left[ \frac{6x}{x^2 + 2} - \frac{12x}{1 - x^2} \right] \\ &= 6x(x^2 + 2)^3 (1 - x^2)^3 (1 - 4x - 3x^2) \end{aligned}$$

$$y = \frac{x(1 - x^2)^3}{(1 + x^2)^{3/2}} \quad \ln y = \ln x + 2 \ln (1 - x^2) - \frac{3}{2} \ln (1 + x^2) \quad - ١٩$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x(1 - x^2)^3}{(1 + x^2)^{3/2}} \left[ \frac{1}{x} - \frac{4x}{1 - x^2} - \frac{3}{1 + x^2} \right] = \frac{(1 - x^2)^3}{(1 + x^2)^{3/2}} - \frac{4x^2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^{3/2}} - \frac{x^2(1 - x^2)^3}{(1 + x^2)^{5/2}} \\ &= \frac{(1 - 5x^2 - 4x^4)(1 - x^2)}{(1 + x^2)^{5/2}} \end{aligned}$$



شكل ١١ - ٢

٢٠ - حدد (١) مواضع نقاط القيم العظمى والصغرى النبية (ب) مواضع نقاط

$$\text{الانطفاف للنحنى } y = f(x) = x^2 e^x$$

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x e^x (2 + x)$$

$$f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2 e^x = e^x (2 + 4x + x^2)$$

$$f'''(x) = 6e^x + 6xe^x + x^2 e^x = e^x (6 + 6x + x^2)$$

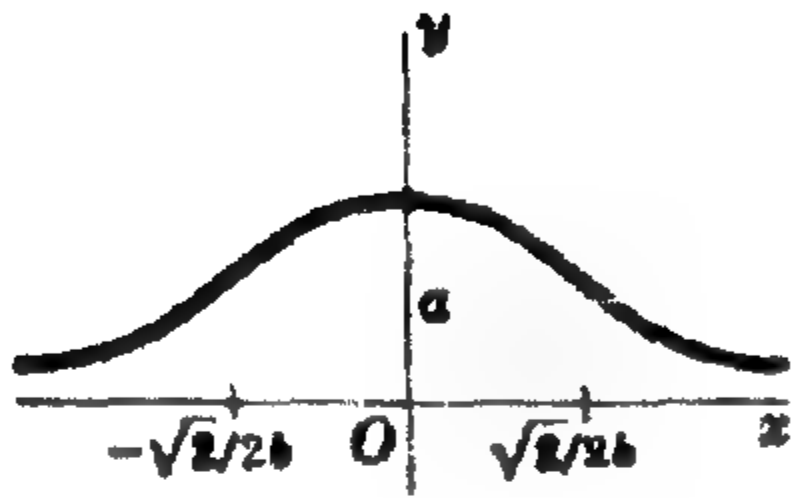
(١) بحل المعادلة  $f'(x) = 0$  نجد القيمتين الحرجتين  $x = -2, x = 0$  وبما إن  $f''(0) > 0$  فالنقطة  $(0,0)$  هي نقطة قيمة صغرى نسبية.

وبما أن  $f''(-2) < 0$  فالنقطة  $(-2, 4/e^2)$  هي نقطة قيمة عظمى نسبية.

(ب) بحل المعادلة  $f''(x) = 0$  نجد أن نقط الانعطاف المتوقعة عند  $x = -2 \pm \sqrt{2}$  وبما أن  $f'''(-2 + \sqrt{2}) \neq 0$  و  $f'''(-2 - \sqrt{2}) \neq 0$  فالنقطتان  $x = -2 \pm \sqrt{2}$  نقطتا انعطاف.

٢١- ادرس منحنى الاحتمال  $y = ae^{-b^2x^2}$  و  $a > 0$ .

(١) إن المنحنى يرتفع يقع فوق المحور  $x$  لأن  $b^2x^2 > 0$  لجميع قيم  $x$ .  
وعندما  $x \rightarrow \pm \infty$  فإن  $y \rightarrow 0$  وهذا يعني أن المحور  $x$  هو خط مقارب أفقي.



شكل ١٤ - ٣

(ب) إن  $y' = -2ab^3xe^{-b^2x^2}$  و  $y'' = 2ab^3(2b^2x^2 - 1)e^{-b^2x^2}$ .  
وعندما  $y' = 0$  يكون  $x = 0$  وعندما  $x = 0$  يكون  $y'' < 0$  وبالتالي فإن النقطة  $(0, a)$  هي نقطة قيمة عظمى للمنحنى.

(ج) عندما  $y'' = 0$  يكون  $2b^2x^2 - 1 = 0$  ومنه تكون  $x = \pm \sqrt{2}/2b$  نقطتا انعطاف محتملتين:

$-\frac{\sqrt{2}}{2b}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2b}$
$y'' > 0$ التقعر لأعلى	$y'' < 0$ التقعر لأسفل	$y'' > 0$ التقعر لأعلى

والنقطتان  $(\pm \sqrt{2}/2b, ae^{-1/2})$  هما نقطتا انعطاف.

٢٢- يتغير ثابت التوازن  $K$  لتفاعل كيميائي متوازن مع درجة الحرارة المطلقة  $T$  وفق القانون  $K = K_0 e^{-q/(RT - T_0)}$  حيث  $T_0$  و  $q$  و  $K_0$  ثوابت. أوجد النسبة المئوية لمعدل تغير  $K$  لكل درجة تغيرها  $T$ .

تعلي النسبة المئوية لمعدل تغير  $K$  لكل درجة تغيرها  $T$  بـ  $\frac{1}{K} \frac{dK}{dT} = \frac{d(\ln K)}{dT}$ .

$$\frac{d(\ln K)}{dT} = -\frac{q}{RT^2} = -\frac{50q}{T^2} \% \quad \text{و} \quad \ln K = \ln K_0 - \frac{1}{2}q \frac{T - T_0}{T_0 T} \quad \text{إذن}$$

٢٣- ادرس منحنى الاهتزاز المحد  $y = f(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \sin 2\pi t$ .



شكل ١٤ - ٤

(١) عندما  $t = 0, y = 0$  فالمنحنى يقطع المحور  $y$  في النقطة 0

وعندما  $\sin 2\pi t = 0$  والمنحنى يقطع المحور  $t$

في النقط  $t = \dots, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

(ب) عندما  $\sin 2\pi t = 1$  و  $t = \dots, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots$  وبالتالي

$y = e^{-\frac{1}{2}t}$  وعندما  $t = \dots, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots$  يكون

$y = -e^{-\frac{1}{2}t}$  وبالتالي  $\sin 2\pi t = -1$ .

فالمنحنى المفروض يتز بين المنحنين  $y = e^{-\frac{1}{4}t}$  و  $y = -e^{-\frac{1}{4}t}$  بماذا لهذا عند النقط المذكورة .

$$\begin{aligned} y' &= f'(t) = e^{-\frac{1}{4}t} (2\pi \cos 2\pi t - \frac{1}{2} \sin 2\pi t) \\ y'' &= f''(t) = e^{-\frac{1}{4}t} \{ (\frac{1}{2} - 4\pi^2) \sin 2\pi t - 2\pi \cos 2\pi t \} \end{aligned} \quad (ج)$$

وعندما  $t = \xi = .237$  كان  $\tan \pi t = 4\pi$  أي  $2\pi \cos 2\pi t - \frac{1}{2} \sin 2\pi t = 0$  ،  $y' = 0$  أصغر زاوية موجبة محققة لهذه العلاقة فإن النقط المرحلة تكون  $t = \dots, \xi - \frac{1}{2}, \xi - 1, \xi - \frac{3}{2}, \xi, \xi + \frac{1}{2}, \xi + 1, \dots$

وحيث أن إشارتي  $f''(\xi \pm \frac{1}{2}n)$  و  $f''(\xi \pm \frac{n+1}{2})$  متعاكستان عندما  $n = 0, 1, 2, \dots$  وإشارتي  $f''(\xi \pm \frac{n+2}{2})$  و  $f''(\xi \pm \frac{1}{2}n)$  متاثلتان فإن القيم المرحلة تعطى على المنحنى نقطاً عظمى وصغرى بالتناوب .  
وهذه النقط تقع قريبة من نقط الالتصاق مع المنحنين  $y = e^{-\frac{1}{4}t}$  و  $y = -e^{-\frac{1}{4}t}$  .

$$\tan 2\pi t = \frac{2\pi}{\frac{1}{2} - 4\pi^2} = \frac{8\pi}{1 - 16\pi^2} \quad (د) \text{ عندما}$$

وإذا كانت  $t = \eta = .475$  أصغر زاوية موجبة محققة لهذه العلاقة فإن نقط الانقلاب الممكنة هي  $t = \dots, \eta - 1, \eta - \frac{1}{2}, \eta, \eta + \frac{1}{2}, \eta + 1, \dots$  إن هذه النقط ، والتي تقع على يسار نقط تقاطع المنحنى مع المحور ، قريبة منها ، هي فعلاً نقط انعطاف .

٢٤- تمثل المعادلة  $s = ce^{-kt} \sin(kt + \theta)$  ، حيث  $k, b, c$  ثوابت ، حركة اهتزازية مخمدة ( مبطأة ) بين  
أن  $a = -2bv - (k^2 + b^2)s$  .

$$\begin{aligned} v &= ds/dt = ce^{-kt} [-b \sin(kt + \theta) + k \cos(kt + \theta)] \\ a &= dv/dt = ce^{-kt} [(b^2 - k^2) \sin(kt + \theta) - 2bk \cos(kt + \theta)] \\ &= ce^{-kt} [-2b\{-b \sin(kt + \theta) + k \cos(kt + \theta)\} - (k^2 + b^2) \sin(kt + \theta)] \\ &= -2bv - (k^2 + b^2)s \end{aligned}$$

### مسائل إضافية

أوجد  $\frac{dy}{dx}$  في المسائل ٢٥ - ٣٥ :

$y = \ln(\ln \tan x) - ٣١$	ج : $4/(4x - 5)$	$y = \ln(4x - 5) - ٣٥$
$y = (\ln x^2)/x^2 - ٣٢$	ج : $\pi/(x^2 - 3)$	$y = \ln \sqrt{8 - x^2} - ٣٦$
$y = \frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) - ٣٣$	ج : $5/x$	$y = \ln 3x^2 - ٣٧$
$y = \pi(\sin \ln x - \cos \ln x) - ٣٤$	ج : $(6x + 3)/(x^2 + x - 1)$	$y = \ln(x^2 + x - 1)^2 - ٣٨$
$y = x \ln(4 + x^2) + 4 \arctan \frac{1}{2}x - 2x - ٣٥$	ج : $\ln x$	$y = \pi \ln x - x - ٣٩$
	ج : $\sec x$	$y = \ln(\sec x + \tan x) - ٣٥$

٣٦- أوجد معادلة مماس المنحنى  $y = \ln x$  عند أى نقطة من نقطة  $(x_0, y_0)$ .

استخدم نقطة تقاطع المماس مع المحور  $y$  كى تحصل على إنشاء بسيط للمستقيم المماس.

٣٧- ناقش  $y = x^2 \ln x$  وارسمه. ج : قيمة صغرى عند  $x = 1/\sqrt{e}$  ونقطة انطاف عند  $x = 1/e^{3/2}$ .

٣٨- بين أن زاوية تقاطع المنحنى  $y = \ln(x-2)$  مع المنحنى  $y = x^2 - 4x + 3$  عند النقطة  $(3, 0)$  هى  $\phi = \arctan 1/3$ .

أوجد  $dy/dx$  فى المسائل ٣٩-٤٦.

$$-e^{-x}(\cos x + \sin x) \quad \text{ج} \quad y = e^{-x} \cos x \quad - 43$$

$$5e^{3x} \quad \text{ج} \quad y = e^{3x} \quad - 44$$

$$e^x/\sqrt{1-e^{2x}} \quad \text{ج} \quad y = \arcsin e^x \quad - 45$$

$$3x^2 e^{3x} \quad \text{ج} \quad y = e^{3x} \quad - 46$$

$$6e^{3x} \tan e^{3x} \sec^2 e^{3x} \quad \text{ج} \quad y = \tan^3 e^{3x} \quad - 47$$

$$3e^{3x+2x} \cos 3x \quad \text{ج} \quad y = e^{5x+2x} \cos 3x \quad - 48$$

$$e^{(x+e^x)} \quad \text{ج} \quad y = e^{e^x} \quad - 49$$

$$-2x \cdot 3^{-x} \ln 3 \quad \text{ج} \quad y = 3^{-x} \quad - 50$$

٤٧- إذا كانت  $y = x^2 e^x$  بين أن  $y''' = (x^2 + 6x + 6)e^x$ .

٤٨- إذا كانت  $y = e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)$  بين أن  $y'' + 4y' + 8y = 0$ .

٤٩- ناقش وارسم (أ)  $y = x^2 e^{-x}$  (ب)  $y = x^2 e^{-x^2}$ .

ج : (أ) قيمة عظمى عند  $x = 2$  وقيمة صغرى عند  $x = 0$  ونقطتا انطاف عند  $x = 2 \pm \sqrt{2}$ .

(ب) قيمة عظمى عند  $x = \pm 1$  وقيمة صغرى عند  $x = 0$  ونقط انطاف عند  $x = 1.51$  و  $x = \pm 0.47$ .

٥٠- ابحث عن المستطيل ذى المساحة العظمى الذى يقع أحد أضلاعه على المحور تحت المنحنى  $y = e^{-x^2}$ .

إرشاد :  $A = 2xy = 2xe^{-x^2}$  حيث  $P(x, y)$  رأس المستطيل على المنحنى.

ج :  $A = \sqrt{2/e}$ .

٥١- بين أن المنحنيين  $y = e^{ax} \cos ax$  و  $y = e^{ax} \sin ax$  متعامدان عند النقط التى لها  $x = 2n\pi/a$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) وأن المنحنيين  $y = e^{-ax}/a^2$  و  $y = e^{ax} \cos ax$  متعامدان عند النقط نفسها.

٥٢- للمنحنى  $y = x e^x$  بين (أ) أن النقطة  $(-1, -1/e)$  هى نقطة قيمة صغرى نسبية (ب) وأن النقطة  $(-2, -2/e^2)$  هى نقطة انطاف (ج) وأن المنحنى مقعر لأسفل على يسار نقطة الانطاف ومقعر لأعلى على يمينها.

استخدم الاشتقاق اللوغاريتمى لإيجاد  $\frac{dy}{dx}$  فى المسائل ٥٣-٥٦.

$$x^2 e^{3x} \cos 3x \{2/x + 2 - 3 \tan 3x\} \quad \text{ج} \quad y = x^2 e^{3x} \cos 3x \quad - 53$$

$$x^2(1 + \ln x) \quad \text{ج} \quad y = x^x \quad - 54$$

$$e^{-x^2} x^{x-2} (1/x - 2x \ln x) \quad \text{ج} \quad y = x^{x-2} \quad - 55$$

$$2x^{(n+1)} \ln x \quad \text{ج} \quad y = x^{2n} \quad - 56$$

٥٧- بين أن (أ)  $\frac{d^n}{dx^n}(xe^x) = (x+n)e^x$ , (ب)  $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} \ln x) = \frac{(n-1)!}{x}$ .

## الفصل الخامس عشر

### اشتقاق الدوال الزائدية

تعريف الدوال الزائدية : إذا كان  $u$  عددا حقيقيا ، باستثناء ما أشير إليه ، فإن :

$$\begin{aligned}\sinh u &= \frac{e^u - e^{-u}}{2} & \coth u &= \frac{1}{\tanh u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}, \quad (u \neq 0) \\ \cosh u &= \frac{e^u + e^{-u}}{2} & \operatorname{sech} u &= \frac{1}{\cosh u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}} \\ \tanh u &= \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} & \operatorname{csch} u &= \frac{1}{\sinh u} = \frac{2}{e^u - e^{-u}}, \quad (u \neq 0)\end{aligned}$$

صيغ الاشتقاق . إذا كانت  $u$  دالة قابلة للاشتقاق في  $x$  فإن .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\coth u) &= -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx} & - ٣٤ & \frac{d}{dx}(\sinh u) &= \cosh u \frac{du}{dx} & - ٣١ \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) &= -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx} & - ٣٥ & \frac{d}{dx}(\cosh u) &= \sinh u \frac{du}{dx} & - ٣٢ \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) &= -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx} & - ٣٦ & \frac{d}{dx}(\tanh u) &= \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx} & - ٣٣\end{aligned}$$

انظر المائل ١ - ١٢

### تعريف الدوال الزائدية العكسية :

$$\begin{aligned}\sinh^{-1} u &= \ln(u + \sqrt{1+u^2}), \quad \text{all } u & \coth^{-1} u &= \frac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}, \quad (u^2 > 1) \\ \cosh^{-1} u &= \ln(u + \sqrt{u^2-1}), \quad (u \geq 1) & \operatorname{sech}^{-1} u &= \ln \frac{1 + \sqrt{1-u^2}}{u}, \quad (0 < u \leq 1) \\ \tanh^{-1} u &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad (u^2 < 1) & \operatorname{csch}^{-1} u &= \ln \left( \frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1+u^2}}{|u|} \right), \quad (u \neq 0)\end{aligned}$$

(القيم الرئيسية لـ  $\cosh^{-1} x$  و  $\operatorname{sech}^{-1} x$  متضمنة هنا فقط)

صيغ الاشتقاق . إذا كانت  $u$  دالة قابلة للاشتقاق في  $x$  فإن :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\coth^{-1} u) &= \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad (u^2 > 1) - ٤٠ & \frac{d}{dx}(\sinh^{-1} u) &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx} & - ٣٧ \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} u) &= \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad (0 < u < 1) - ٤١ & \frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) &= \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad (u > 1) - ٣٨ \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} u) &= \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, \quad (u \neq 0) - ٤٢ & \frac{d}{dx}(\tanh^{-1} u) &= \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad (u^2 < 1) - ٣٩\end{aligned}$$

انظر المائل ١٢ - ١٩



## مسائل محلولة

$$1 - \text{برهن أن } \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = \left( \frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2u} + 2 + e^{-2u}) - \frac{1}{4}(e^{2u} - 2 + e^{-2u}) = 1$$

$$2 - \text{استنتج } \frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}, \text{ حيث } u \text{ دالة قابلة للاشتقاق في } x.$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^u - e^{-u}}{2} \right) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \frac{du}{dx} = \cosh u \frac{du}{dx}$$

أوجد  $dy/dx$  في المسائل ٣ - ١٠

$$\frac{dy}{dx} = \cosh 3x \cdot \frac{d}{dx}(3x) = 3 \cosh 3x \quad y = \sinh 3x \quad 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{1}{2}x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2} \sinh \frac{1}{2}x \quad y = \cosh \frac{1}{2}x \quad 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2(1+x^2) \cdot \frac{d}{dx}(1+x^2) = 2x \operatorname{sech}^2(1+x^2) \quad y = \tanh(1+x^2) \quad 5$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{csch}^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3} \operatorname{csch}^2 \frac{1}{x} \quad y = \coth \frac{1}{x} \quad 6$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x^2) + \operatorname{sech} x^2 \cdot \frac{d}{dx}(x) \\ &= x(-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2) 2x + \operatorname{sech} x^2 \\ &= -2x^2 \operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 + \operatorname{sech} x^2 \end{aligned} \quad y = x \operatorname{sech} x^2 \quad 7$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2 \operatorname{csch}(x^2+1) \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{csch}(x^2+1)] \\ &= 2 \operatorname{csch}(x^2+1)[- \operatorname{csch}(x^2+1) \coth(x^2+1) \cdot 2x] \\ &= -4x \operatorname{csch}^2(x^2+1) \coth(x^2+1) \end{aligned} \quad y = \operatorname{csch}^2(x^2+1) \quad 8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\cosh 2x)2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1) = \sinh^2 x \quad y = \frac{1}{2} \sinh 2x - \frac{1}{2}x \quad 9$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tanh 2x} (2 \operatorname{sech}^2 2x) = \frac{2}{\sinh 2x \cosh 2x} = 4 \operatorname{csch} 4x \quad y = \ln \tanh 2x \quad 10$$

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

١١ - أوجد إحداثيي القيمة الصغرى للسلسلة

$$f(x) = \frac{1}{a} \left( a \sinh \frac{x}{a} \right) = \sinh \frac{x}{a}, \quad f''(x) = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \left( \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} \right)$$

$$\text{عندما } f'(x) = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} = 0, \text{ يكون } x = 0 \text{ ويكون } f''(0) > 0, \text{ والنقطة } (0, a)$$

نقطة قيمة صغرى.

١٢ - ابحث من نقط الانعطاف للدوال التالية

$$y = \sinh x \quad (أ) \quad y = \cosh x \quad (ب) \quad y = \tanh x \quad (ج)$$

$$f'(x) = \cosh x, \quad f''(x) = \sinh x, \quad f'''(x) = \cosh x. \quad (أ)$$

إن  $f''(x) = \sinh x = 0$  عندما  $x = 0$  وحيث أن  $f'''(0) \neq 0$  فإن النقطة  $(0,0)$  هي نقطة الانعطاف

(ب) إن  $f'(x) = \cosh x \neq 0$  مهما كانت  $x$  ولذلك فلا يوجد نقطة انعطاف .

$$f'''(x) = \frac{4 \sinh^3 x - 2}{\cosh^4 x}, \quad f'(x) = \operatorname{sech}^2 x, \quad f''(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x \tanh x = -2 \frac{\sinh x}{\cosh^3 x}, \quad (ج)$$

إن  $f''(x) = 0$  عندما  $x = 0$  وحيث أن  $f'''(0) \neq 0$  فالنقطة  $(0,0)$  هي نقطة انعطاف .

$$13 - \text{استج} \quad (أ) \quad \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \text{لمج قيم } x$$

$$(ب) \quad \operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x} = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad \text{عندما } 0 < x \leq 1.$$

$$(أ) \quad \text{ليكن } \sinh^{-1} x = y, \quad \text{عندئذ } \sinh y = x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \quad \text{أو} \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ  $e^y$  نجد  $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$  لأن  $e^y > 0$  وهكذا يكون  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

$$(ب) \quad \text{ليكن } \operatorname{sech}^{-1} x = y, \quad \text{عندئذ } \operatorname{sech} y = x = \frac{1}{\cosh y}, \quad \cosh y = \frac{1}{x}, \quad y = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sech}^{-1} x.$$

$$\text{كذلك} \quad x = \operatorname{sech} y = \frac{2}{e^y + e^{-y}} \quad \text{أو} \quad e^{2y}x - 2e^y + x = 0.$$

$$\text{وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ } e^y \text{ نجد } e^y = \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad \text{عندما } y \geq 0 \text{ وهكذا نجد } y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x},$$

عندما  $0 < x \leq 1$ .

$$14 - \text{استج} \quad \frac{d}{dx}(\sinh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \frac{du}{dx}.$$

ليكن  $y = \sinh^{-1} u$ , حيث  $u$  دالة قابلة للاشتقاق في  $x$  عندئذ يكون  $\sinh y = u$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \frac{du}{dx}, \quad \cosh y \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

أوجد  $dy/dx$  في المائل ١٥ - ١٨ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(3x)^2 + 1}} \cdot \frac{d}{dx}(3x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}} \quad y = \sinh^{-1} 3x \quad - 15$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \quad y = \cosh^{-1} e^x \quad - 16$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{1}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x} \cdot \frac{d}{dx}(\tan \frac{1}{2}x) \quad y = 2 \tanh^{-1}(\tan \frac{1}{2}x) \quad - 17$$

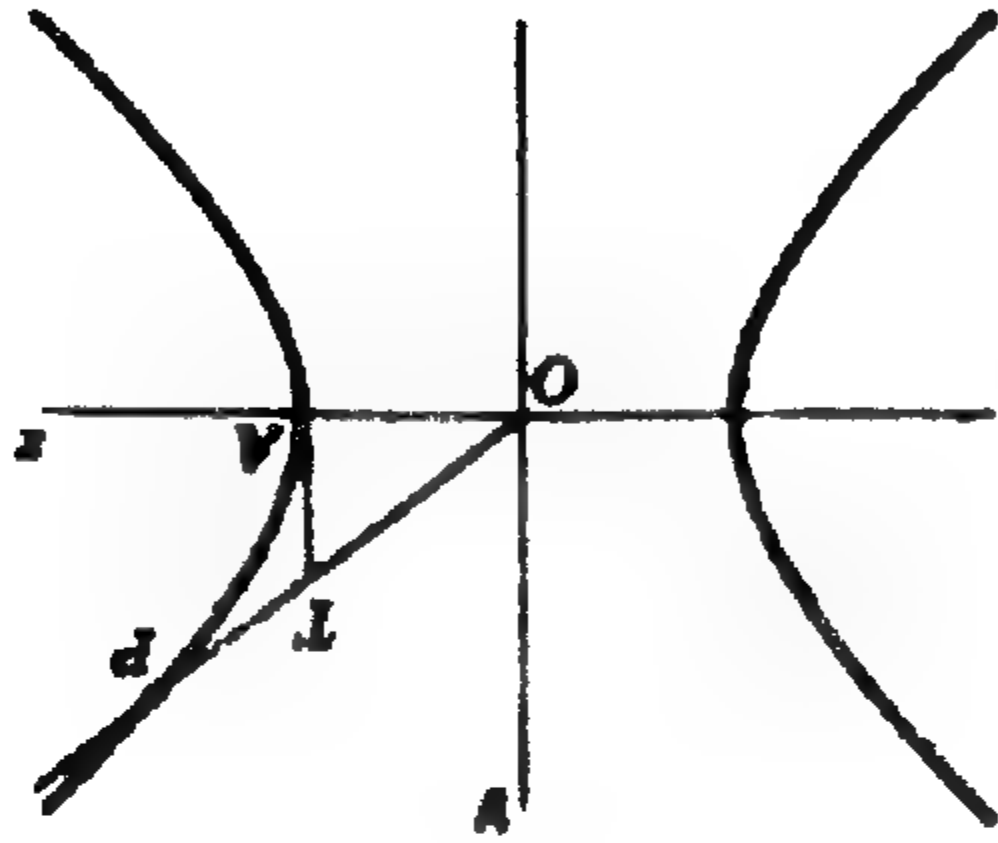
$$= 2 \frac{1}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x} \sec^2 \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sec^2 \frac{1}{2}x}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x} = \sec x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2 - 1} \quad ; \quad y = \coth^{-1} \frac{1}{x} \quad - 18$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}} \cdot \frac{d}{dx} (\cos x) = \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}} = \sec x \quad ; \quad y = \operatorname{sech}^{-1} (\cos x) \quad - 19$$

### مسائل إضافية

٢٠ - (١) ارسم المنحنيين  $y = e^x$ ,  $y = -e^{-x}$  ثم خذ متوسط ترتيبى (الاحداثيتين الثانيين) المنحنيين لقيم مختلفة لـ  $x$  لتحصل على نقاط من المنحنى  $y = \sinh x$ .



(ب) أعد العمل كما في (١) مستخدماً  $y = e^x$  و  $y = -e^{-x}$  لتحصل على المنحنى  $y = \cosh x$ .

٢١ - لقطع الزائد  $x^2 - y^2 = 1$  بين (١) أن النقطة  $P(\cosh u, \sinh u)$  تقع عليه.

(ب) أن المستقيم المماس عند  $A$  يقطع المستقيم  $OP$  في  $T(1, \tanh u)$ .  
أرجع إلى الشكل ١٠ - ١.

شكل ١٠ - ١

٢٢ - برهن أن : (١)  $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(ب)  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(ج)  $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

(د)  $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1$   
 $= 2 \sinh^2 x + 1$

(هـ)  $\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

أوجد  $dy/dx$  في كل من المسائل ٢٢ - ٢٨

$$\frac{1}{2} \cosh \frac{1}{2} x \quad \text{ج} \quad y = \sinh \frac{1}{2} x \quad - 22$$

$$3 \sinh 6x \quad \text{ج} \quad y = \cosh^3 3x \quad - 23$$

$$2 \operatorname{sech}^2 2x \quad \text{ج} \quad y = \tanh 2x \quad - 24$$

$$\tanh x \quad \text{ج} \quad y = \ln \cosh x \quad - 25$$

$$\operatorname{sech} x \quad \text{ج} \quad y = \arctan \sinh x \quad - 26$$

$$2 \operatorname{cosh} 4x \quad \text{ج} \quad y = \ln \sqrt{\tanh 2x} \quad - 27$$

٢٩ - برهن : (١) أنه إذا كان  $y = a \cosh \frac{x}{a}$  فإن  $y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (y')^2}$ .

(ب) وأنه إذا كان  $y = A \cosh bx + B \sinh bx$  حيث  $A, B, b$  ثوابت فإن  $y'' = b^2 y$ .

$$\cosh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}), \quad u \geq 1 \quad (أ) - ٣٠$$

$$\tanh^{-1} u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad |u| < 1. \quad (ب)$$

- ٣١ - (أ) ارسم المنحنى  $y = \sinh^{-1} x$  وذلك بعكس المنحنى  $y = \sinh x$  بالنسبة للمستقيم الذي ميله  $45^\circ$ .  
 (ب) ارسم الفرع الرئيسي لـ  $y = \cosh^{-1} x$  وذلك بعكس النصف الأيمن للمنحنى  $y = \cosh x$  بالنسبة للمستقيم الذي ميله  $45^\circ$ .

٣٢ - استنتج صيغ الاشتقاق ٣٢ - ٣٦ و ٣٨ - ٤٠ و ٤٢

أوجد  $dy/dx$  في كل من المسائل ٣٢ - ٣٦

$$1/\sqrt{x^2 + 4} \quad : ج \quad y = \sinh^{-1} \frac{1}{2}x \quad - ٣٣$$

$$-1/x\sqrt{1-x^2} \quad : ج \quad y = \cosh^{-1}(1/x) \quad - ٣٤$$

$$\sec x \quad : ج \quad y = \tanh^{-1}(\sin x) \quad - ٣٥$$

$$-y/\sqrt{a^2 - y^2} \quad : ج \quad x = a \operatorname{sech}^{-1}(y/a) - \sqrt{a^2 - y^2} \quad - ٣٦$$

# الفصل السادس عشر

## التمثيل البارامتري للمنحنيات

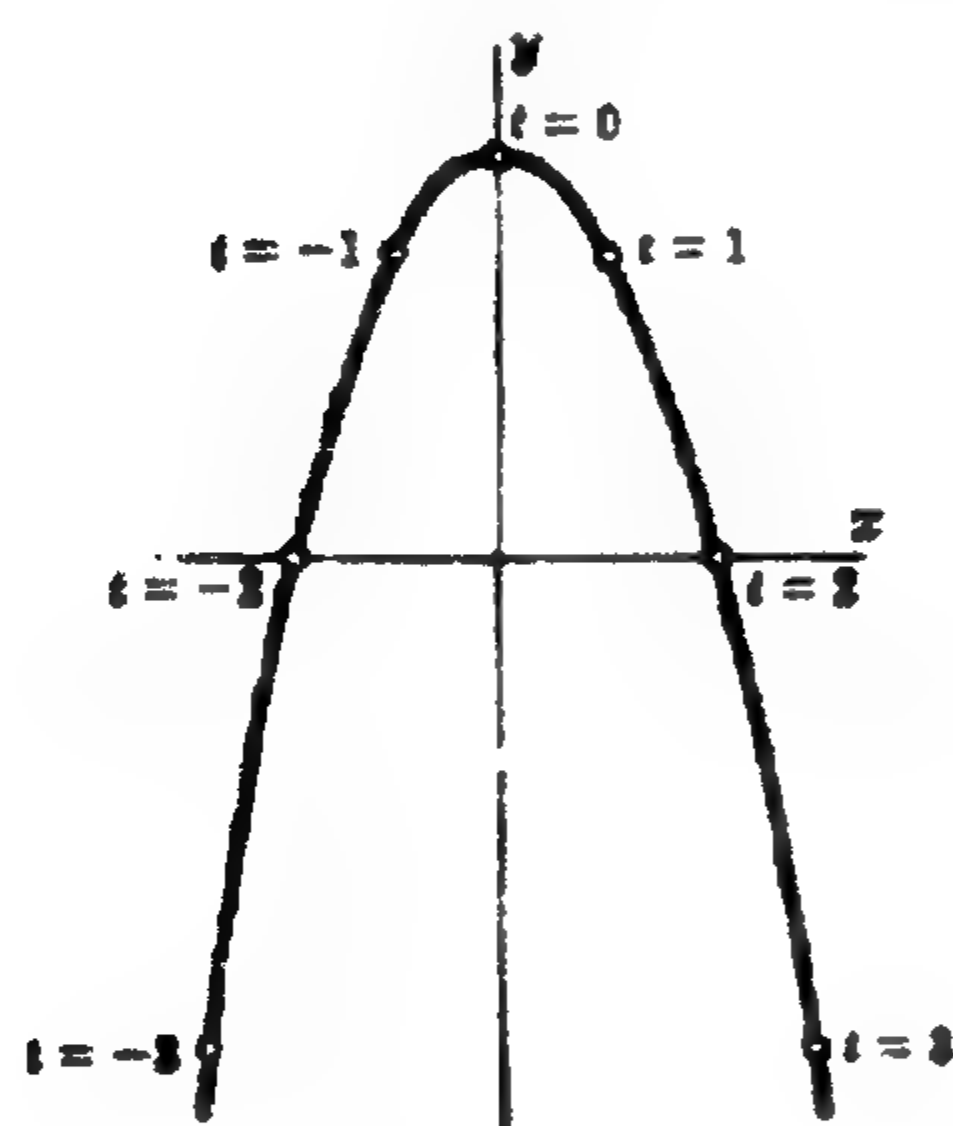
**المعادلات البارامتريّة :** إذا أعطيت الإحداثيات  $(x, y)$  لنقطة  $P$  من منحنى على شكل دالتين  $x = f(u)$ ,  $y = g(u)$  لمُتغير ثالث أو بارامتر  $u$ ، فإننا نسمي المعادلتين  $x = f(u)$ ,  $y = g(u)$  المعادلتين البارامتريتين للمنحنى .

**مثال :**

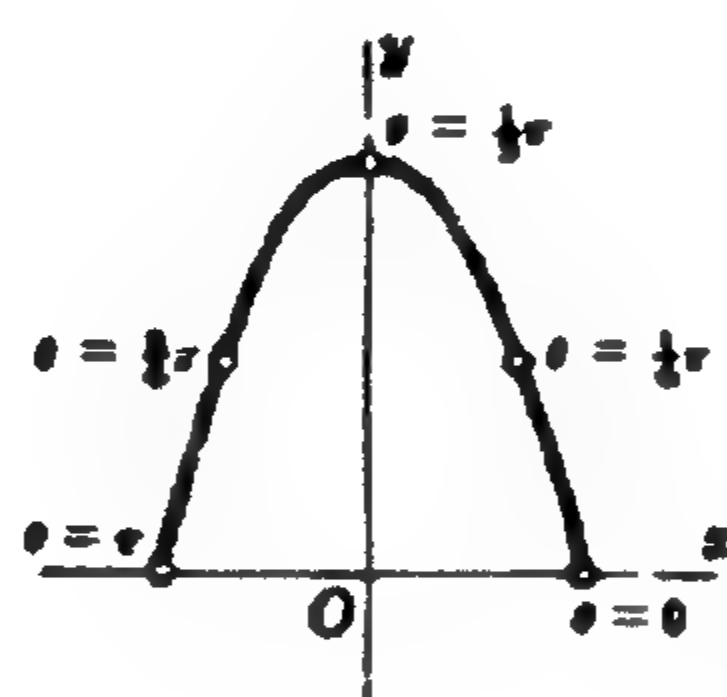
(أ)  $x = \cos \theta$ ,  $y = 4 \sin^2 \theta$  هما معادلتان بارامتريتان بالبارامتر  $\theta$ . القطع المكافئ  $4x^2 + y = 4$  ، لأن

$$4x^2 + y = 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta = 4$$

(ب)  $x = \frac{t}{2}$ ,  $y = 4 - t^2$  هما تمثيل بارامتري آخر ، بالبارامتر  $t$  للمنحنى ذاته .



(ب)



(أ)

شكل ١٦ - ١

نلاحظ أن التمثيل البارامتري الأول يمثل جزءاً من القطع المكافئ فقط ، في حين يمثل التمثيل الثاني المنحنى بأكمله .

**وتعطي المشتقة الأولى :**  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/du}{dx/du}$  .

**وتعطي المشتقة الثانية :**  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{du}{dx}$  .



### مسائل محلولة

١ - أوجد  $\frac{dy}{dx}$  و  $\frac{d^2y}{dx^2}$  بفرض أن  $x = \theta - \sin \theta$ ,  $y = 1 - \cos \theta$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad , \quad \frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos \theta - 1}{(1 - \cos \theta)^2} \cdot \frac{1}{1 - \cos \theta} = -\frac{1}{(1 - \cos \theta)^3}$$

٢ - أوجد  $\frac{dy}{dx}$  و  $\frac{d^2y}{dx^2}$  بفرض أن  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$ .

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{2}{(\cos t - \sin t)^2} \cdot \frac{1}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$$

٣ - أوجد معادلة المماس للمنحنى  $x = \sqrt{t}$ ,  $y = t - 1/\sqrt{t}$  عند النقطة التي عندما  $t = 4$ .

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{2t\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = 2\sqrt{t} + \frac{1}{t}$$

وعند  $t = 4$ :  $x = 2$ ,  $y = 7/2$ , يكون  $m = dy/dx = 17/4$ .

ومعادلة المماس هي  $(y - 7/2) = (17/4)(x - 2)$  أو  $17x - 4y = 20$ .

٤ - بمطى موضع جسم، يتحرك على منحنى، عند النقطة  $t$  بالمعادلتين

البارامتريتين  $x = 2 - 3 \cos t$ ,  $y = 3 + 2 \sin t$  حيث  $x$  و  $y$  مقاسة

بالمتر و  $t$  بالثواني. أوجد المعدل الزمني واتجاه التغير لـ

(أ) (الإحداثي السيني) عندما  $t = \pi/3$ ، (ب) الإحداثي الصادي،

عندما  $t = 5\pi/3$ ، (ج) زاوية ميل المماس عندما  $t = 2\pi/3$ .

$$dx/dt = 3 \sin t, \quad dy/dt = 2 \cos t, \quad \tan \theta = dy/dx = \frac{2}{3} \cot t$$

(أ) عندما  $t = \pi/3$ ,  $dx/dt = 3\sqrt{3}/2$ . والإحداثي السيني متزايد بمعدل

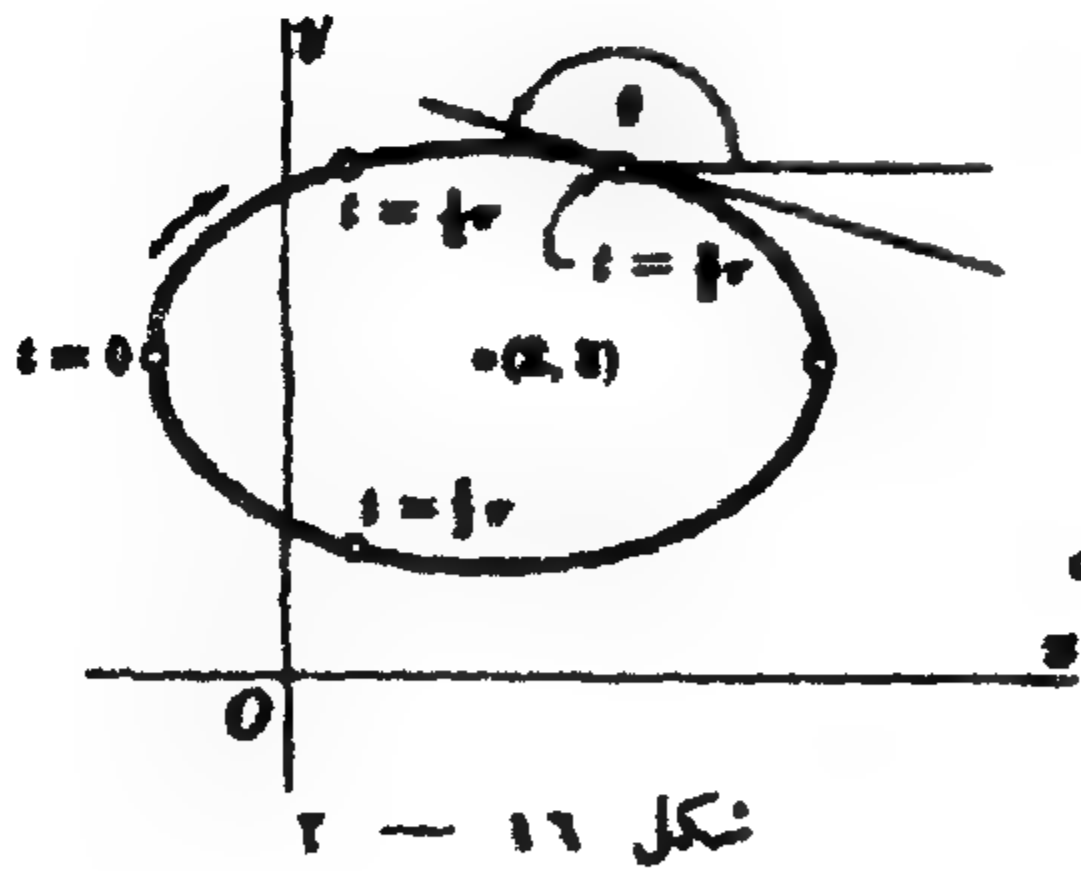
$$3\sqrt{3}/2 \text{ ms}^{-1}.$$

(ب) عندما  $t = 5\pi/3$ ,  $dy/dt = 2(\frac{1}{2}) = 1$ . والإحداثي الصادي متزايد

بمعدل  $1 \text{ m/sec}$ .

(ج) أن  $\theta = \arctan(\frac{2}{3} \cot t)$ ، ومنه  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-6 \csc^2 t}{9 + 4 \cot^2 t}$ . وعندما  $t = 2\pi/3$ ، يكون

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-6(2/\sqrt{3})^2}{9 + 4(-1/\sqrt{3})^2} = -\frac{24}{31} \text{ rad/sec}$$



شكل ١٦ - ٢

## مسائل إضافية

أوجد  $dy/dx$  و  $d^2y/dx^2$  في كل من المسائل ٥ - ٩ .

- ٥ -  $x = 2 + t, y = 1 + t^3$  ج :  $dy/dx = 2t, d^2y/dx^2 = 2$   
 ٦ -  $x = t + 1/t, y = t + 1$  ج :  $dy/dx = t^2/(t^2 - 1), d^2y/dx^2 = -2t^3/(t^2 - 1)^3$   
 ٧ -  $x = 2 \sin t, y = \cos 2t$  ج :  $dy/dx = -2 \sin t, d^2y/dx^2 = -1$   
 ٨ -  $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$  ج :  $dy/dx = -\tan \theta, d^2y/dx^2 = 1/(3 \cos^3 \theta \sin \theta)$   
 ٩ -  $x = a(\cos \phi + \phi \sin \phi), y = a(\sin \phi - \phi \cos \phi)$  ج :  $dy/dx = \tan \phi, d^2y/dx^2 = 1/(a\phi \cos^3 \phi)$

١٠ - أوجد ميل المنحنى  $r = e^{-t} \cos 2t, y = e^{-t} \sin 2t$  عند النقطة  $t = 0$  ج : - 2 .

١١ - أوجد الإحداثيين القائمين لأصل نقطة من المنحنى  $x = 96t, y = 96t - 16t^2$ .  
 إرشاد :  $t$  التي تكون عندما  $y$  على ج : (288, 144) .

١٢ - أوجد معادلة المماس ومعادلة السوى لكل من المنحنيين التاليين (أ)  $x = 3e^t, y = 5e^{-t}$  عند  $t = 0$ ,  
 (ب)  $x = a \cos^4 \theta, y = a \sin^4 \theta$  عند  $\theta = \frac{1}{4}\pi$ .

ج : (أ)  $5x + 3y - 30 = 0, 3x - 5y + 16 = 0$ ; (ب)  $2x + 2y - a = 0, x - y = 0$

١٣ - أوجد معادلة المماس للمنحنى  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  لأي عند نقطة  $P(x, y)$  ع . بين أن الطول المقطوع من المماس بين المماسين الإحداثيين يساوي  $a$  .

ج :  $x \sin t + y \cos t = \frac{1}{2}a \sin 2t$

١٤ - حدد على المنحنى  $r = t^2 - 1, y = t^3 - t$  النقطة التي يكون عندما المماس (أ) أفقياً (ب) رأسياً .  
 بين أن مماس المنحنى متعامدان عند النقطة التي يقطع فيها المنحنى نفسه .

ج : (أ)  $t = \pm\sqrt{3}/3$ ; (ب)  $t = 0$  .

## الفصل السابع عشر

### الإنحناء ( القوس )

#### الاشتقاق طول القوس :

لتكن  $y = f(x)$  دالة مشتقتها الأولى مستمرة . وتكن  $A$  ( انظر الشكل ١٧ - ١ ) نقطة ثابتة على المنحنى ، ولترمز به  $s$  طول القوس المقاس من  $A$  إلى أى نقطة أخرى على المنحنى . لتكن  $P(x, y)$  نقطة اختيارية و  $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$  نقطة مجاورة على المنحنى . ليرمز به  $\Delta s$  طول القوس من  $P$  إلى  $Q$  .

إن معدل تغير القوس  $s (= AP)$  بمقدار الوحدة لكل تغير في  $x$  ومعدل تغير هذا القوس لكل وحدة تغير في  $y$  هما على الترتيب :

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \frac{ds}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta y} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

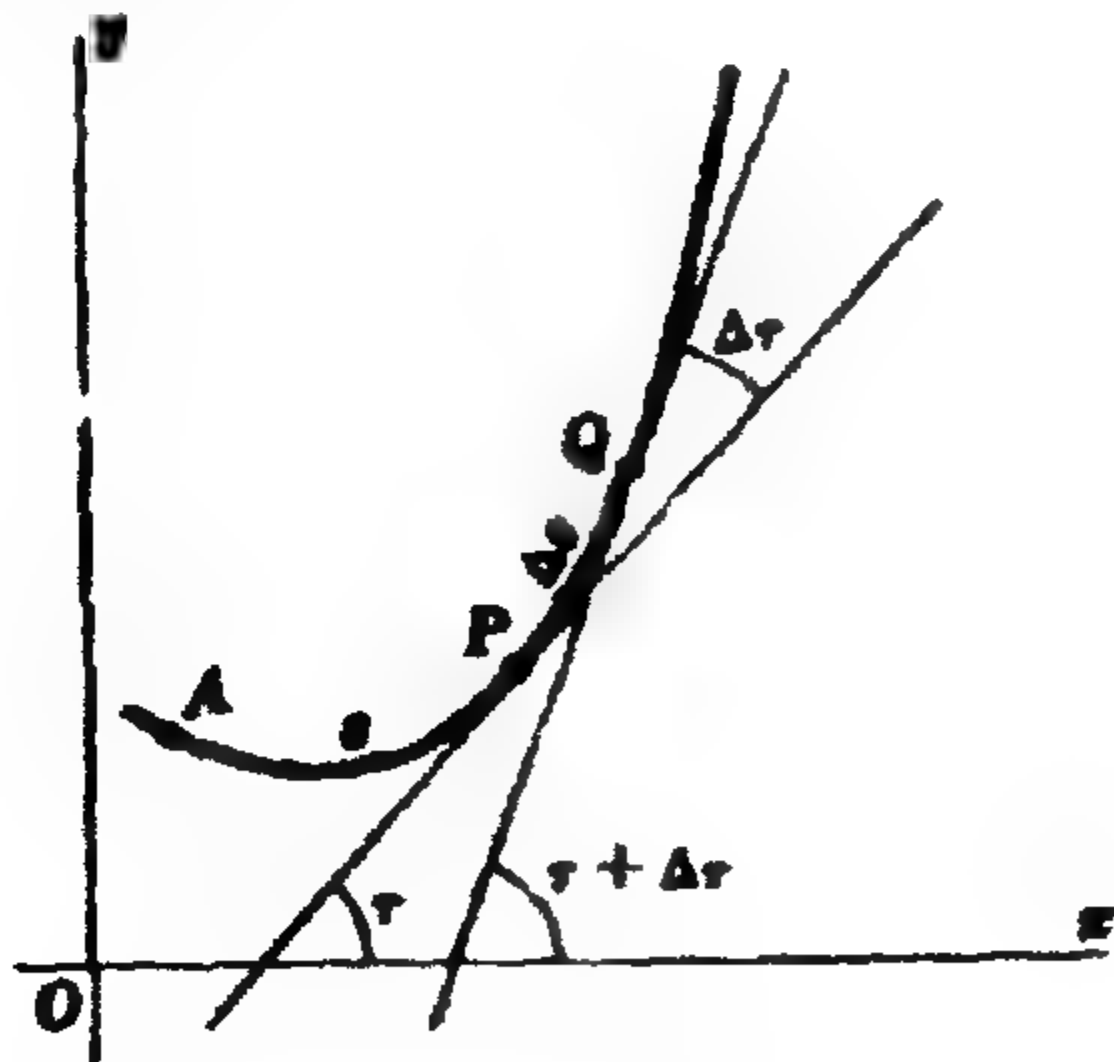
على أن تؤخذ الإشارة الموجبة أو الإشارة السالبة في العلاقة الأولى حسب تردد  $s$  أو تتناقص عندما تزداد  $x$  ، وفي العلاقة الثانية حسب تردد  $s$  أو تتناقص عندما تزداد  $y$  .

وعندما يعطى المنحنى بالمعادلتين البارامتريتين  $x = f(u)$  ،  $y = g(u)$  ، فإن معدل تغير  $s$  بالنسبة لـ  $u$  يعطى

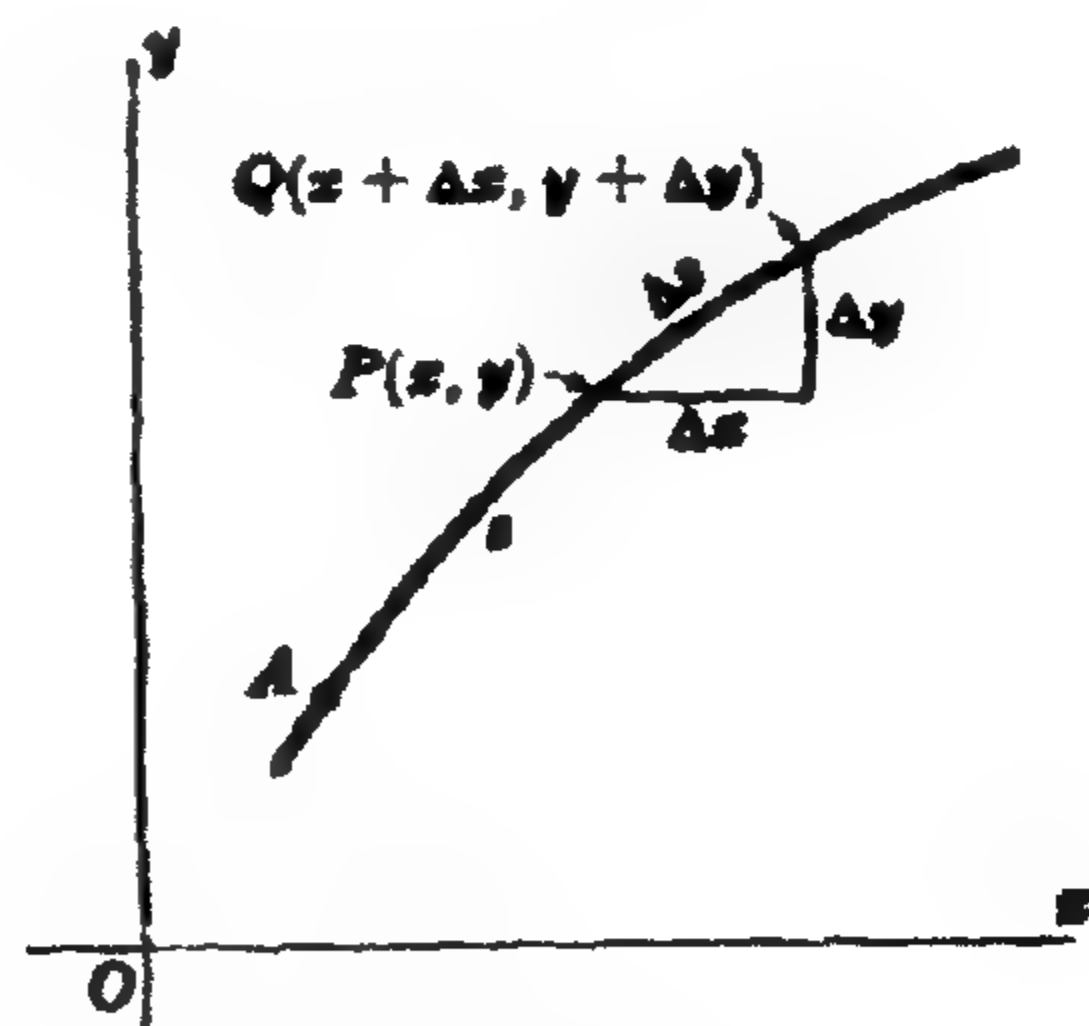
$$\frac{ds}{du} = \pm \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}$$

وهنا تؤخذ الإشارة الموجبة أو السالبة حسب تردد  $s$  أو تتناقص عندما تزداد  $u$  وكى نتعاشى تكرار 'الإشارات التناقضة' سنفرض فيما يأتى أن الاتجاه على كل منحنى قد اختير بحيث تكون مشتقة طول القوس موجبة .

انظر المسائل ١ - ٥



شكل ١٧ - ٢



شكل ١٧ - ١

## الانحناء ( التقوس ) :

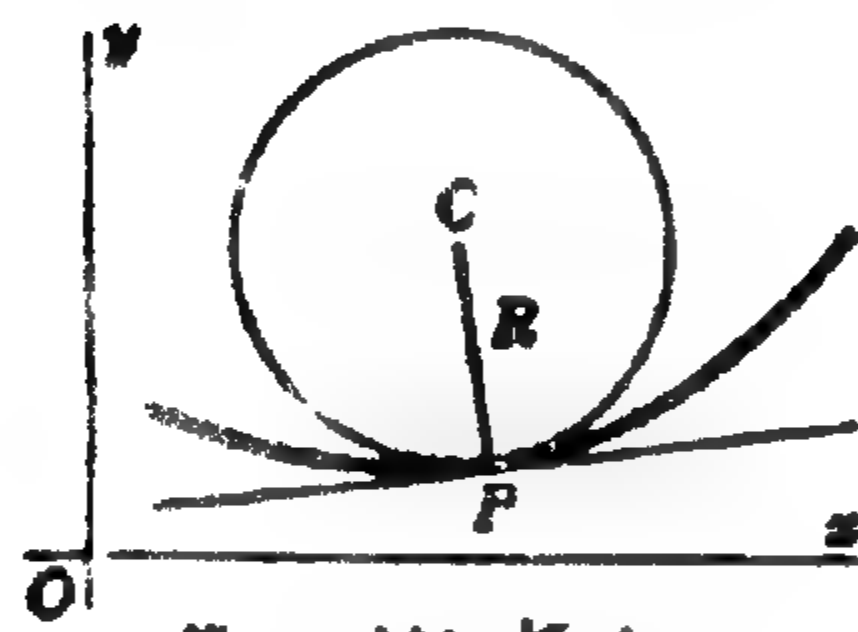
إن الانحناء  $K$  للمنحنى  $y = f(x)$  عند أى نقطة  $P$  منه هو معدل تغير الاتجاه ( أى زاوية الميل  $\tau$  لمس المنحنى عند  $P$  ) لكل وحدة طول القوس  $s$  ( انظر الشكل ١٧ - ٢ ) .

$$K = \frac{d\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} ; \quad K = \frac{-\frac{d^2x}{dy^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{3/2}} \quad \text{إذن :}$$

يتضح من العلاقة الأولى أن  $K$  موجب عندما تكون  $P$  على قوس مقعر لأعلى وسالب عندما تكون  $P$  على قوس مقعر لأسفل .

سيجد القارئ أن  $K$  قد يعرف أحيانا بحيث يكون موجبا ، أى يعرف على أنه القيمة العددية لقيمة المبطاة في العلاقة السابقة . يبنى ، إذا أخذنا بهذا التعريف ، أن نتجاهل إشارة  $K$  في الأجوبة التى نحصل عليها أدناه .

نصف قطر الانحناء  $R$  : عند نقطة  $P$  من المنحنى يعطى بـ  $R = |1/K|$  . يفرض أن  $K \neq 0$  .



شكل ١٧ - ٢

دائرة الانحناء : أو الدائرة الماسقة لمنحنى عند نقطة  $P$  منه هي الدائرة التى نصف قطرها  $R$  والواقعة في جهة تقعر المنحنى والمماس له عند  $P$  .

لرسم دائرة الانحناء : ابدأ بإقامة العمود على المنحنى عند النقطة  $P$  نحو جهة تقعره ثم خذ عليه  $PC = R$  . فتكون النقطة  $C$  مركز الدائرة المطلوبة .

مركز الانحناء : عند النقطة  $(x, y)$  من المنحنى هي المركز  $C$  لدائرة الانحناء عند  $P$  . ويعطى الإحداثيات  $(\alpha, \beta)$  لمركز الانحناء بـ .

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \beta = y + \frac{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\alpha = x + \frac{1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2}{\frac{d^2x}{dy^2}}, \quad \beta = y - \frac{\frac{dx}{dy} \left[ 1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 \right]}{\frac{d^2x}{dy^2}} \quad \text{لـ}$$

مفاتيح القصى : هو المحل المتشعب لمراكز الانحناء للمنحنى المقروص .

انظر المسائل ٦ - ١٢

## مسائل مطولة

$$١ - \text{أوجد : } \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 = 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2$$

ارجع إلى الشكل ١٧ - ١ لنرمز على المنحنى  $y = f(x)$  حيث  $L$  مشتقة مسطرة بـ  $s$  لطول القوس احبارا من نقطة ثابتة  $A$  إلى نقطة متغيرة  $P(x, y)$  ، ولنرمز لـ  $\Delta s$  لطول القوس اعتبارا من النقطة  $P$  إلى نقطة مجاورة  $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$  على المنحنى وبـ  $PQ$  لطول الوتر الذي يصل  $P$  بـ  $Q$  .

$$(PQ)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \text{ وبما أن } \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{PQ} \cdot \frac{PQ}{\Delta x} \text{ فإن}$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2 \left(\frac{PQ}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2 \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}$$

وعندما تقترب  $Q$  من  $P$  على المنحنى فإن  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$  و  $\frac{\Delta s}{PQ} = \frac{\text{القوس}}{\text{الوتر}} \rightarrow 1$  ( لبرهان الجزء الأخير انظر الفصل ٤١ ( المسألة ٢٢ ) . وبالتالي :

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

٢ - أوجد  $\frac{ds}{dx}$  عند النقطة  $P(x, y)$  على القطع المكافئ  $y = 3x^2$ .

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (6x)^2} = \sqrt{1 + 36x^2}$$

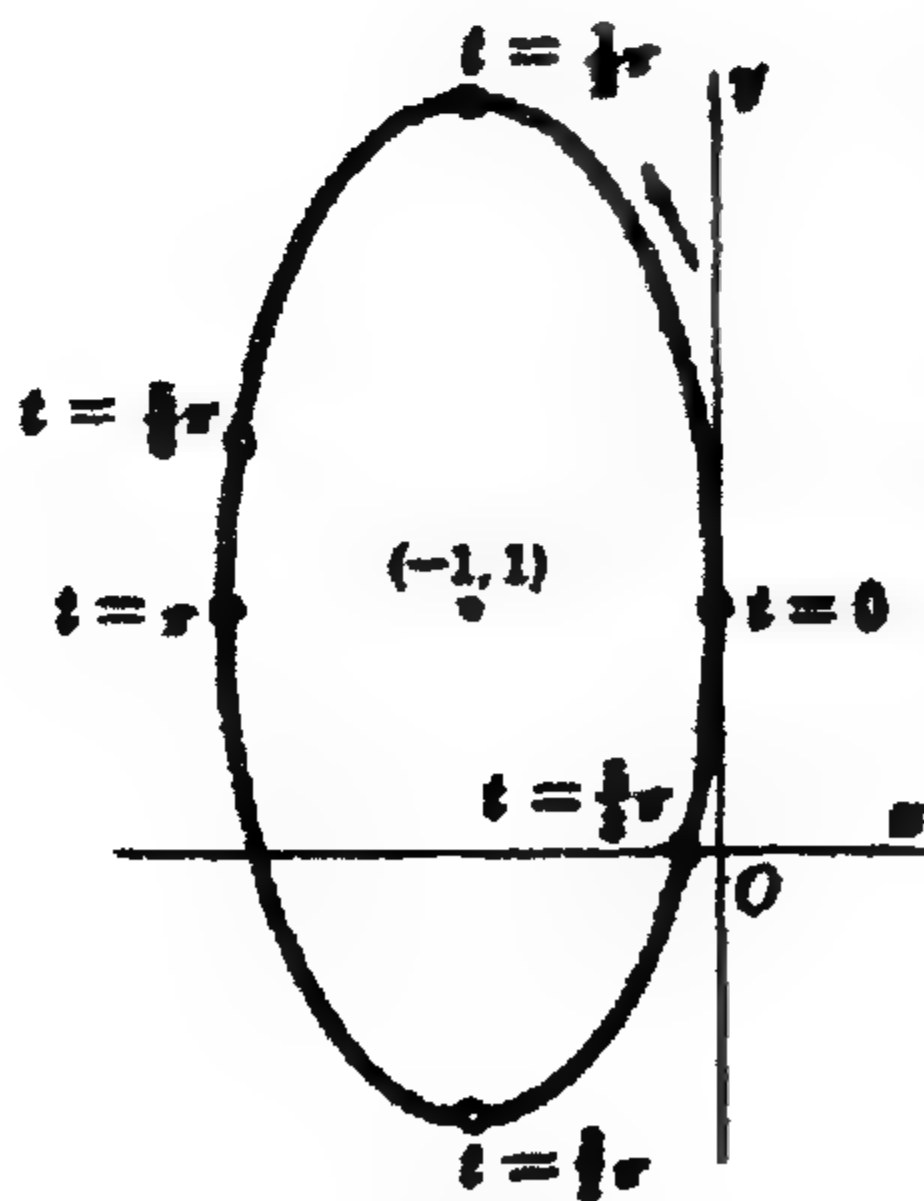
٣ - أوجد  $\frac{ds}{dx}$  و  $\frac{ds}{dy}$  عند النقطة  $P(x, y)$  على القطع الناقص  $x^2 + 4y^2 = 8$ .

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{32 - 3x^2}{32 - 4x^2}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}; \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{16y^2} = \frac{x^2 + 16y^2}{16y^2} = \frac{32 - 3x^2}{32 - 4x^2} \quad (أ)$$

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{2 + 8y^2}{2 - y^2}}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{4y}{x}; \quad 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{16y^2}{x^2} = \frac{x^2 + 16y^2}{x^2} = \frac{2 + 8y^2}{2 - y^2} \quad (ب)$$

٤ - أوجد  $\frac{ds}{d\theta}$  عند النقطة  $P(\theta)$  على المنحنى  $x = \sec \theta, y = \tan \theta$ .

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\sec^2 \theta \tan^2 \theta + \sec^2 \theta} = |\sec \theta| \sqrt{\tan^2 \theta + \sec^2 \theta}$$



شكل ١٧ - ٤

٥ - يعطى الإحداثيان  $(x, y)$  المقاسان بالأمتار بالحجم متحرك  $P$  بـ  $x = \cos t - 1, y = 2 \sin t + 1$  حيث  $t$  هو الزمن المقاس بالثواني . بأي معدل تتحرك  $P$  على المنحنى عندما ( أ )  $t = 5\pi/3$ , ( ب )  $t = 5\pi/6$ , ( ج ) تتحرك بأقصى سرعة ؟

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\sin^2 t + 4 \cos^2 t} = \sqrt{1 + 3 \cos^2 t} \text{ إن}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3\left(\frac{4}{9}\right)} = \sqrt{13}/2 \text{ ms}^{-1} \text{ عندما } t = 5\pi/6 \text{ يكون : ( أ )}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3\left(\frac{1}{9}\right)} = \sqrt{7}/2 \text{ ms}^{-1} \text{ عندما } t = 5\pi/3 \text{ يكون : ( ب )}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-3 \cos t \sin t}{S} \text{ . ليكن } S = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3 \cos^2 t} \text{ . ( ج )}$$

وبحل  $dS/dt = 0$  نجد القيم الحرجة  $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ .

فإذا كان  $t = 0$  أو  $\pi$  يكون المعدل  $ds/dt = \sqrt{1 + 3(1)} = 2 \text{ ms}^{-1}$  أسرع ما يمكن



٦- أ- إذا كان  $t = \pi/2$  أو  $3\pi/2$  يكون المثل :  $\cos t = 0$  ،  $ds/dt = \sqrt{1+3(0)} = 1$  ، أبطأ ما يمكن .

ب- أوجد انحناء القطع المكافئ  $y = 12x$  عند النقطة (١) (٣, ٦) ، (ب)  $(\frac{3}{4}, -3)$  ، (ج)  $(0, 0)$  .

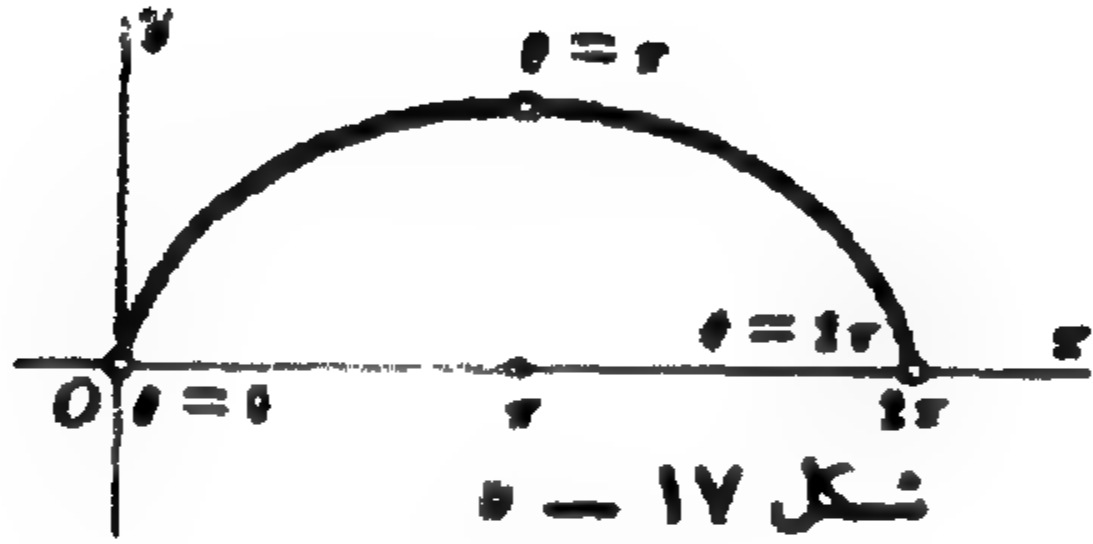
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6}{y^3} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{36}{y^3} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6}{y} \quad , \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{36}{y^2}$$

(١) عند (٣, ٦) : يكون  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{6}$  ،  $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2$  ،  $\frac{dy}{dx} = 1$  ، ومنه  $K = \frac{-1/6}{2^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{24}$  .

(ب) عند  $(\frac{3}{4}, -3)$  : يكون  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3}$  ،  $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5$  ،  $\frac{dy}{dx} = -2$  ، ومنه  $K = \frac{4/3}{5^{3/2}} = \frac{4\sqrt{5}}{75}$  .

(ج) عند (٠, ٠) يكون  $\frac{dy}{dx}$  غير معرف ولكن  $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{6}$  ،  $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1$  ،  $\frac{dx}{dy} = 0$  ، ومنه  $K = -\frac{1}{6}$  .

٧- أوجد انحناء التويرى (السيكلويد)  $x = \theta - \sin \theta$  ،  $y = 1 - \cos \theta$  ، عند أعلى نقطة للقوس .



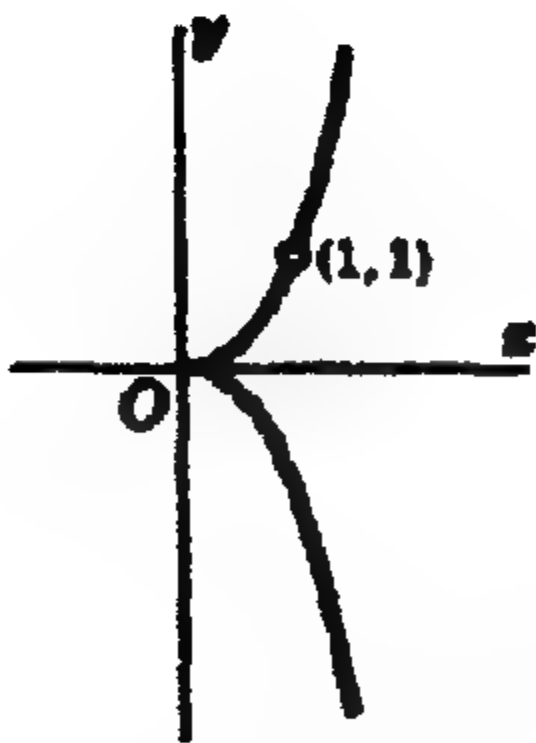
الحصول على أعلى نقطة على الفترة  $0 < x < 2\pi$  . نلاحظ أن  $dy/d\theta = \sin \theta$  والقيمة الحرجة على الفترة المذكورة هي  $x = \pi$  وبما أن  $d^2y/d\theta^2 = \cos \theta < 0$  عند  $\theta = \pi$  ، فالنقطة  $\theta = \pi$  هي نقطة قيمة عظمى نسبية وهي أعلى نقطة من المنحنى على الفترة المذكورة .

الحصول على الانحناء :

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{-1}{(1 - \cos \theta)^2}$$

وعند  $\theta = \pi$  ، يكون  $dy/dx = 0$  ،  $d^2y/dx^2 = -1/4$  ، ومنه  $K = -1/4$  .

٨- أوجد انحناء المنحنى المستوي البيسي (البيروني)  $y^2(2-x) = x^3$  عند النقطة (١, ١) .



نشتق المعادلة المسطحة ضمنياً بالنسبة لـ  $x$  فنجد

$$(١) \quad -y^2 + (2-x)2yy' = 3x^2$$

$$(ب) \quad -2yy' + (2-x)2yy'' + (2-x)2(y')^2 - 2yy' = 6x$$

من (١) عندما  $x = y = 1$  ،  $-1 + 2y' = 3$  ، ومنه  $y' = 2$  .

من (ب) عندما  $x = y = 1$  ،  $-4 + 2y'' + 8 - 4 = 6$  ، ومنه  $y'' = 2$  .

$$\text{إذن} \quad K = 3/(1+4)^{3/2} = 3\sqrt{5}/25$$

٩- أوجد نقطة أقصى انحناء على المنحنى  $y = \ln x$  .

$$K = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

ومن  $\frac{dK}{dx} = \frac{2x^3 - 1}{(1+x^2)^{5/2}}$  ، والقيمة الحرجة هي  $x = 1/\sqrt{2}$  . وبالتالي فإن النقطة المطلوبة هي  $(1/\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \ln 2)$  .

١٠ - عين موضع مركز الانحناء  $C$  للمنحنى  $y = f(x)$  عند إحدى نقاط  $P(x, y)$  التي يكون عندها  $y' \neq 0$ . ( انظر الشكل ١٧ - ٣ ) .

يقع مركز الانحناء  $C(\alpha, \beta)$  ( ١ ) على المستقيم العمودي عند  $P$  و ( ٢ ) على مسافة  $R$  عن  $P$  مقاسة نحو جهة تقعر المنحنى . لذلك فإن :

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2 = \frac{[1 + (y')^2]^3}{(y'')^2} \quad (٢) \quad \text{و} \quad \beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x) \quad (١)$$

ومن ( ١ ) نجد :  $\alpha - x = -y'(\beta - y)$  بالتعويض في ( ٢ ) نجد

$$\beta - y = \pm \frac{1 + (y')^2}{y''} \quad \text{ومن} \quad (\beta - y)^2 [1 + (y')^2] = \frac{[1 + (y')^2]^3}{(y'')^2}$$

ولتحديد الإشارة الصحيحة نلاحظ أن تقعر المنحنى يكون لأعلى عندما  $y'' > 0$  وبما أن  $C$  عندئذ تقع فوق  $P$  فإن  $\beta - y > 0$  والإشارة المناسبة في هذه الحالة هي + ( ونترك للقارئ أن يبرهن أن الإشارة هي كذلك + عندما  $y'' < 0$  ) . وهكذا :

$$\alpha = x - \frac{y'[1 + (y')^2]}{y''} \quad \text{ومن} \quad (١) \quad \text{نجد} \quad \beta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}$$

١١ - أوجد معادلة دائرة الانحناء للمنحنى  $2xy + x + y = 4$  عند النقطة  $(1, 1)$  .

إن :  $2y + 2xy' + 1 + y' = 0$  عند  $(1, 1)$  يكون  $y' = -1$  إذن  $1 + (y')^2 = 2$  .

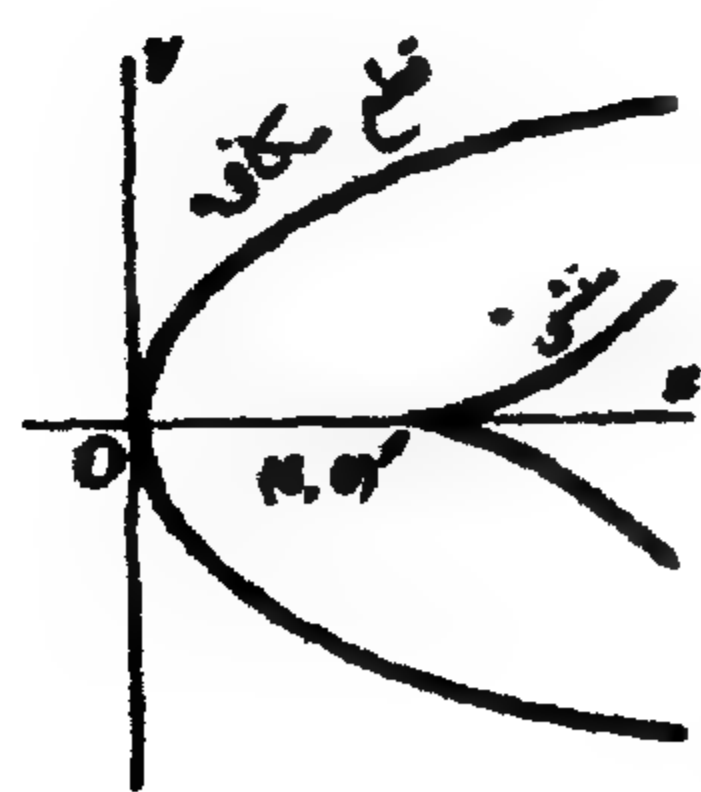
وإن :  $4y' + 2xy'' + y'' = 0$  عند  $(1, 1)$  يكون  $y'' = 4/3$  .

$$\text{ومن} \quad K = \frac{4/3}{2\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad R = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{كذلك} \quad \beta = 1 + \frac{2}{4/3} = \frac{5}{2} \quad \alpha = 1 - \frac{-1(2)}{4/3} = \frac{5}{2}$$

$$\text{والمعادلة المطلوبة هي} \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \quad \text{أو} \quad (x - 5/2)^2 + (y - 5/2)^2 = 9/2$$

١٢ - أوجد معادلة منحنى ( المحل التماسي لمركز الانحناء ) انقطع المكافئ  $y^2 = 12x$

$$\text{عند} \quad P(x, y) \quad \text{يكون} \quad : \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{36}{y^2} = 1 + \frac{3}{x} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6}{y} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{36}{y^3} = -\frac{\sqrt{3}}{2x^{3/2}}$$



شكل ١٧ - ٧

$$\alpha = x - \frac{\sqrt{3/x}(1 + 3/x)}{-\sqrt{3}/2x^{3/2}} = x + \frac{2\sqrt{3}(x+3)}{\sqrt{3}} = 3x + 6$$

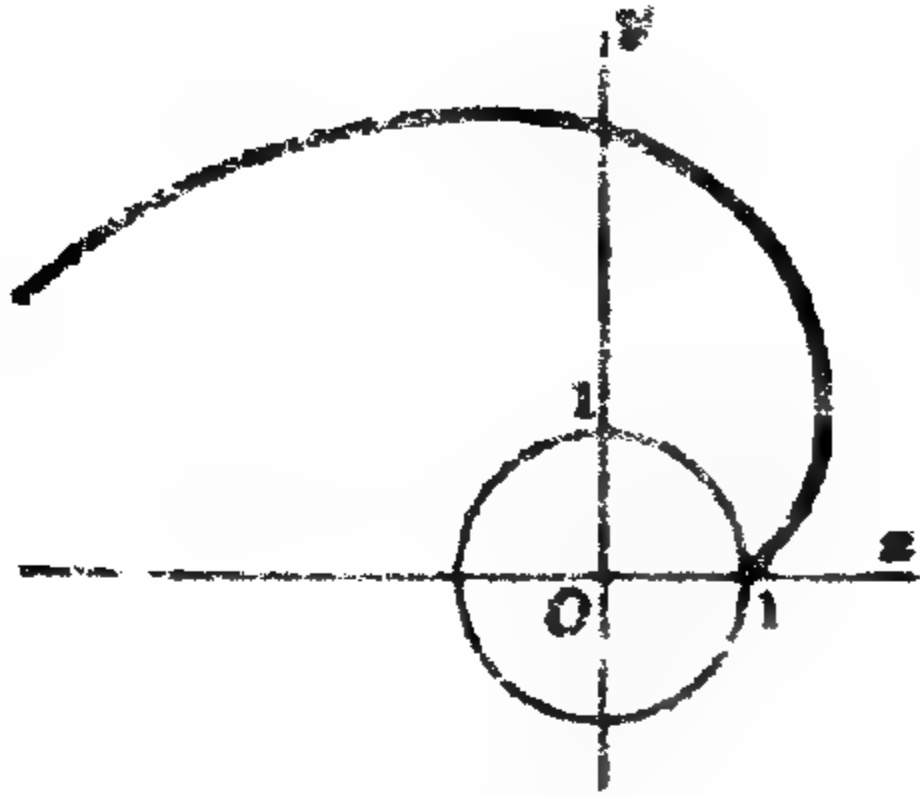
$$\beta = y + \frac{1 + 36/y^2}{-36/y^3} = y - \frac{y^3 + 36y}{36} = -\frac{y^2}{36}$$

ويمكن اعتبار المعادلتين  $\alpha = 3x + 6$ ,  $\beta = -y^2/36$  المعادلتين البارامتريتين للمنحنى

حيث  $x$  و  $y$  المرتبطتان بمعادلة القطع المكافئ البارامتريتين . غير أنه من السهل نسبياً

في هذه المسألة ، حذف البارامتريتين وفي هذه الحالة  $x = (\alpha - 6)/3$ ,  $y = -\sqrt{36\beta}$  .

وبالتعويض في معادلة القطع المكافئ نجد أن :



شكل ١٧ - A

١٧- أوجد معادلة منحنى المنحنى  $x = \cos \theta + \theta \sin \theta$ ,

$$y = \sin \theta - \theta \cos \theta.$$

عند  $P(x, y)$ : يكون  $\frac{dx}{d\theta} = \theta \cos \theta$ ,  $\frac{dy}{d\theta} = \theta \sin \theta$ ,  $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^2 \theta}{\theta \cos \theta} = \frac{\sec^3 \theta}{\theta}$$

$$\alpha = x - \frac{\tan \theta \sec \theta}{(\sec^3 \theta)/\theta} = x - \theta \sin \theta = \cos \theta$$

$$\beta = y + \frac{\sec^2 \theta}{(\sec^3 \theta)/\theta} = y + \theta \cos \theta = \sin \theta$$

والمعادلتان  $\alpha = \cos \theta$ ,  $\beta = \sin \theta$  هما المعادلتان البارامترتان للمنحنى.

## مسائل إضافية

في المسائل ١٤ - ١٩ أوجد المشتقة المشار إليها لطول القوس :

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 = 25 & -14 \text{ ج} \quad ds/dx = 5/\sqrt{25-x^2}, \quad ds/dy = 5/\sqrt{25-y^2} \\ y^2 = x^2 & -15 \text{ ج} \quad ds/dx = \frac{1}{2}\sqrt{4+9x}, \quad ds/dy = \sqrt{4+9y^{3/2}}/3y^{1/2} \\ x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} & -16 \text{ ج} \quad ds/dx = (a/x)^{1/3}, \quad ds/dy = (a/y)^{1/3} \\ 6xy = x^2 + 3 & -17 \text{ ج} \quad ds/dx = (x^2+1)/2x^2 \\ 27ay^2 = 4(x-a)^2 & -18 \text{ ج} \quad ds/dx = \sqrt{(x+2a)/3a} \\ y = a \cosh x/a & -19 \text{ ج} \quad ds/dx = \cosh x/a \end{array}$$

$$-20 \text{ المنحنى } x = f(u), y = g(u), \text{ استنتج } (ds/du)^2 = (dx/du)^2 + (dy/du)^2.$$

في المسائل ٢١ - ٢٤ أوجد  $ds/dt$ .

$$\begin{array}{ll} x = t^2, y = t^3 & -21 \text{ ج} \quad t\sqrt{4+9t^2} \\ x = \cos t, y = \sin t & -22 \text{ ج} \quad 1 \\ x = 2 \cos t, y = 3 \sin t & -23 \text{ ج} \quad \sqrt{4+5 \cos^2 t} \\ x = \cos^3 t, y = \sin^3 t & -24 \text{ ج} \quad \frac{1}{2} \sin 2t \end{array}$$

$$-25 \text{ باستخدام } dy/dx = \tan r, \text{ أوجد } dx/ds = \cos r, \quad dy/ds = \sin r.$$

$$-26 \text{ باستخدام } r = \arctan \left( \frac{dy}{dx} \right) \text{ أوجد } K = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{y''}{\{1+(y')^2\}^{3/2}}.$$

٢٧- أوجد انحناء كل من المنحنيات التالية عند النقطة المذكورة.

$$\begin{array}{ll} y = x^2/2 \text{ at } x=0, x=1, x=-2 & (1) \text{ ج} \quad 0, \sqrt{2}/2, -4\sqrt{17}/2\sqrt{9} \\ x^2 = 4ay \text{ at } x=0, x=2a & (ب) \text{ ج} \quad \frac{1}{2a}, \frac{\sqrt{2}}{8a} \\ y = \sin x \text{ at } x=0, x=\frac{1}{2}\pi & (ج) \text{ ج} \quad 0, -1 \\ y = e^{-x^2} \text{ at } x=0 & (د) \text{ ج} \quad -2 \end{array}$$

٢٨- بين (١) أن انحناء الخط للقطع يساوى صفر (ب) وأن انحناء القاطرة يساوى عددها مقلوب نصف قطرها.

٢٩- أوجد النقطة التي عندها الانحناء نهاية منحنى لـ (١)  $y = e^x$ , (ب)  $y = x^2/2$ .

$$\text{ج} : (1) \quad x = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}, \quad (ب) \quad x = 1/\sqrt{5}$$

٣٠- تتكون خطوط سكك حديدية في مجموعة إحداثية معينة من جزء من الاتجاه السالب لمحور  $x$  حتى نقطة الأصل  $O$  ثم من المنحنى الانتقال  $y = \frac{1}{2}x^2$  حتى  $A(1, \frac{1}{2})$  وبعد ذلك من قوس الدائرة  $144x^2 + 144y^2 - 96x - 264y + 9 = 0$ . أثبت أن (١) المنحنى الانتقال يمر المستقيم والمار الدائري عند نقطتي ارتباطهما (ب) الانحناء المنحنى الانتقال يساوي الصفر عند  $O$  ويساوي مقلوب نصف قطر المقطع الدائري عند  $A$ .

٣١- أوجد نصف قطر الانحناء لـ (١)  $x^2 + xy^2 - 6y^2 = 0$  عند  $(8, 8)$  (ب)  $x = a \operatorname{sech}^{-1} y/a - \sqrt{a^2 - y^2}$  عند  $(x, y)$  (ج)  $x = 2a \tan \theta, y = a \tan^2 \theta$  (د)  $x = a \cos^4 \theta, y = a \sin^4 \theta$ .

ج : (١)  $5\sqrt{5}$ , (ب)  $a\sqrt{a^2 - y^2}/|y|$ , (ج)  $a|\sec^2 \theta|$ , (د)  $2a(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)^{3/2}$ .

٣٢- أوجد مركز الانحناء لـ (١) المسألة ٣١- (ب)  $y = \sin x$  عند نقطة النهاية العظمى.

ج : (١)  $C(-7, 8)$ , (ب)  $C(\frac{1}{2}\pi, 0)$ .

٣٣- أوجد معادلة دائرة الانحناء للقطع المكافئ  $y^2 = 12x$  عند النقطتين  $(0, 0)$  و  $(3, 6)$ .

ج :  $(x - 6)^2 + y^2 = 36, (x - 15)^2 + (y + 6)^2 = 288$ .

٣٤- أوجد معادلة التماس لـ :

(١)  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ , (ب)  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ , (ج)  $x = 2 \cos t + \cos 2t, y = 2 \sin t + \sin 2t$ .

ج : (١)  $(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$  (ب)  $(\alpha + \beta)^{2/3} + (\alpha - \beta)^{2/3} = 2a^{2/3}$ .

(ج)  $\alpha = \frac{1}{3}(2 \cos t - \cos 2t), \beta = \frac{1}{3}(2 \sin t - \sin 2t)$ .

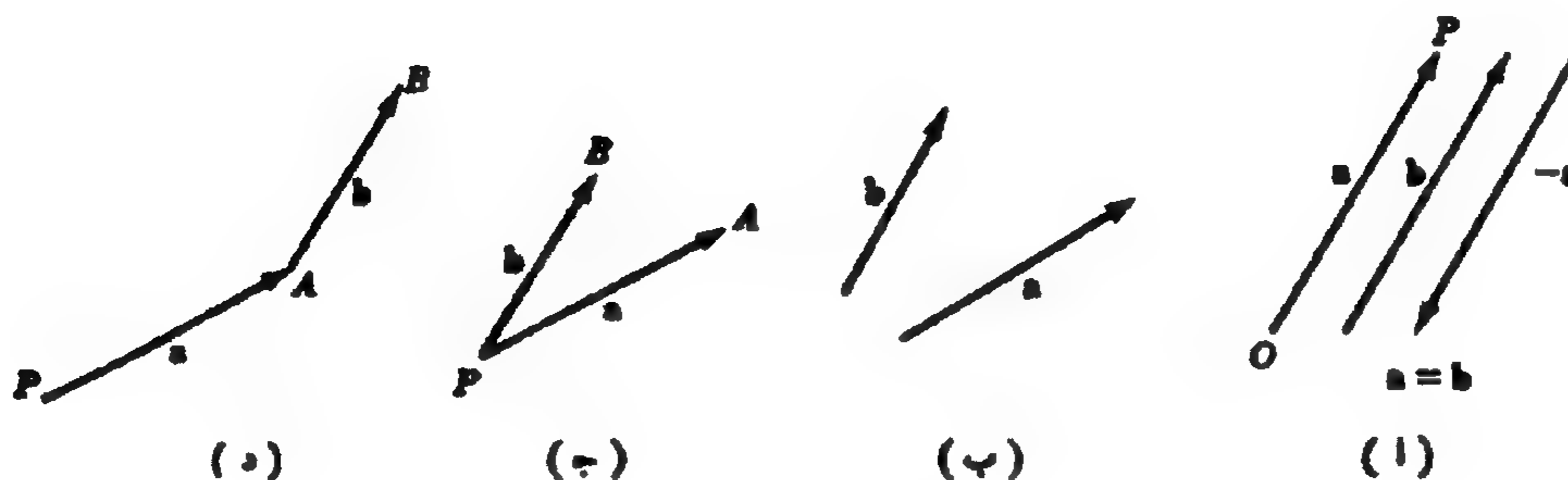
# الفصل الثامن عشر

## المتجهات المستوية

**الكميات العددية والمتجهات :** تسمى الكميات مثل الزمن ودرجة الحرارة والسرعة القياسية والتي لها مقادير فقط ، كميات عددية ، أو قياسية . والكميات العددية إذن هي مجرد أعداد تخضع لقوانين الجبر العادية مثل :

$$5 \text{ sec} + 3 \text{ sec} = 8 \text{ sec}$$

أما الكميات مثل القوة والسرعة والتسارع ( المتجهة ) وكمية الحركة والتي لها مقدار واتجاه معا فإنها تسمى كميات متجهة أو متجهات . وتمثل المتجهات هندسياً بأجزاء مستقيمة موجهة ( سهم ) . واتجاه السهم ( الزاوية التي يصنعها المتجه مع مستقيم ثابت من المستوى ) هو اتجاه المتجه ، ويمثل طول السهم ( بدلالة وحدة قياس نختارها ) قياس المتجه أو طوله . سنرمز للمقادير العددية بأحرف من النوع العادي ...  $a, b, c$  في حين نرمز للمتجهات بأحرف داکنة مثل  $a, b, c$  ، أو مثل  $OP$  [ انظر الشكل ١٨ - ٢ ( ١ ) ] وسنرمز لطول متجه  $a$  أو  $OP$  بـ  $|a|$  أو  $|OP|$  .



شكل ١٨ - ١

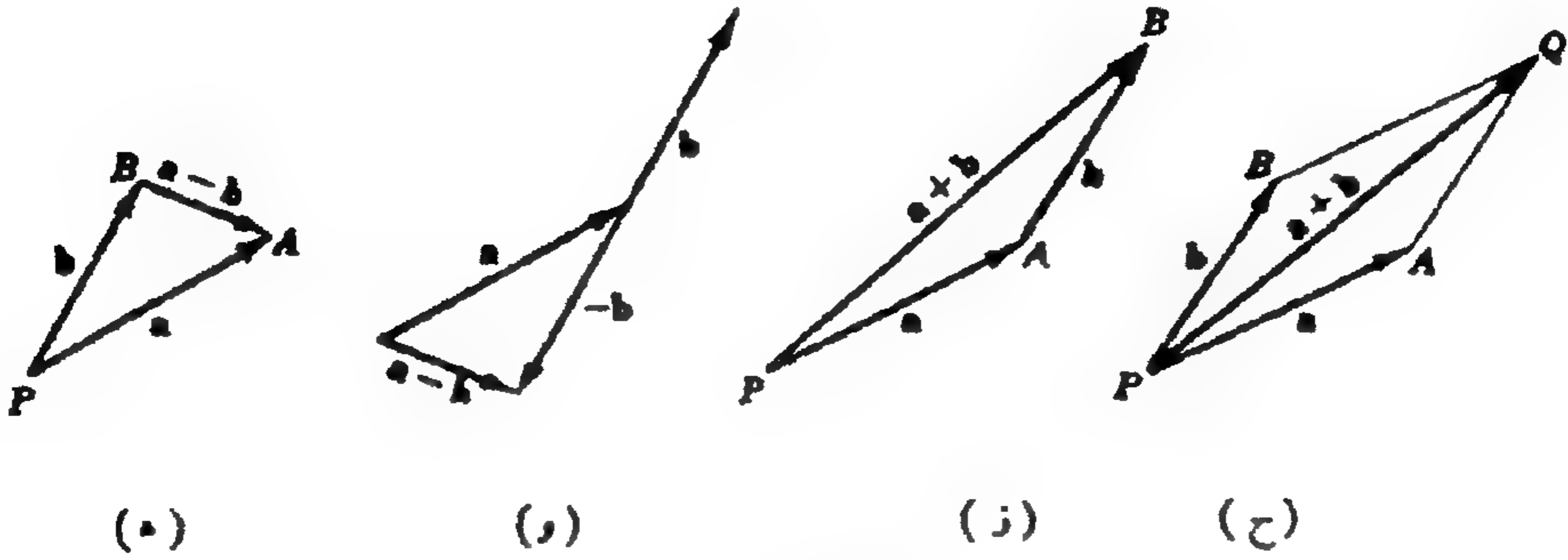
نقول عن متجهين  $a$  و  $b$  إنهما متساويان ،  $a = b$  إذا كان لهما نفس الطول ونفس الاتجاه . ولما المتجه الذي له قياس  $a$  ولكن اتجاهه م عكس اتجاه  $a$  فإننا نسميه المتجه الم عاكس لـ  $a$  ونرمز له بـ  $-a$  . وبوجه عام : إذا كان  $a$  متجهاً و  $k$  مقداره عددياً فإن  $ka$  متجه له اتجاه  $a$  ومقداره يساوي  $k$  مرة طول  $a$  إذا كان  $k$  موجباً ، ولكن اتجاهه عاكس  $a$  وطوله يساوي  $|k|$  مرة طول  $a$  إذا كان  $k$  سالباً .

ليس لمتجه مفروض موضع ثابت في المستوى ، ما لم يذكر عكس ذلك ، ولذلك يمكننا تحريك المتجه بإزاحات متوازية في المستوى . وبشكل خاص إذا كان  $a$  و  $b$  متجهين [ انظر الشكل ١٨ - ١ ( ب ) ] فإنه يمكن وضع طين المتجهين بحيث يكون لهما بداية أو نقطة بدء مشتركة  $P$  [ انظر الشكل ١٨ - ١ ( ج ) ] أو يمكن وضع نقطة بداية المتجه  $a$  على نقطة نهاية المتجه  $b$  [ انظر الشكل ١٨ - ١ ( د ) ] .



**مجموع وفرق متجهين :** إذا كان  $a$  و  $b$  متجهي الشكل ١٨ - ١ (ب) فإنه يمكن الحصول على مجموعهما أو مصلتهما  $a + b$ .

- (١) بوضع المتجهين كما في الشكل ١٨ - ١ (ج) ثم إكمال متوازي الأضلاع  $PAQB$  كما في الشكل ١٨ - ٢ (أ) فيكون المتجه  $PQ$  هو المجموع المطلوب.
- (٢) بوضع المتجهين كما في الشكل ١٨ - ١ (د) وإكمال المثلث  $PAB$  كما في الشكل ١٨ - ٢ (و) وهنا يكون المتجه  $PB$  هو المجموع المطلوب.



شكل ١٨ - ٢

يفتج من الشكل ١٨ - ٢ (و) أنه يمكن إزالة متجهات ثلاثة تشكل مثلثا ، شريطة أن يكون أحدها هو مجموع المتجهين الآخرين أو مأكسا لهذا المجموع.

إذا كان  $a$  و  $b$  متجهي الشكل ١٨ - ١ (ب) فإنه يمكن إيجاد الفرق بينهما  $a - b$  :

(iii) من العلاقة  $a - b = a + (-b)$  كما في الشكل ١٨ - ٢ (ز) .

(iv) بوضع المتجهين كما في الشكل ١٨ - ١ (ج) وإكمال المثلث . ففي الشكل ١٨ - ٢ (ح) نجد أن  $BA = a - b$

وإذا كانت  $a, b, c$  ثلاثة متجهات و  $k$  مقدارا عدديا فإن

$$a + b = b + a \quad \text{١ - قانون الإبدال}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{٢ - قانون التجميع}$$

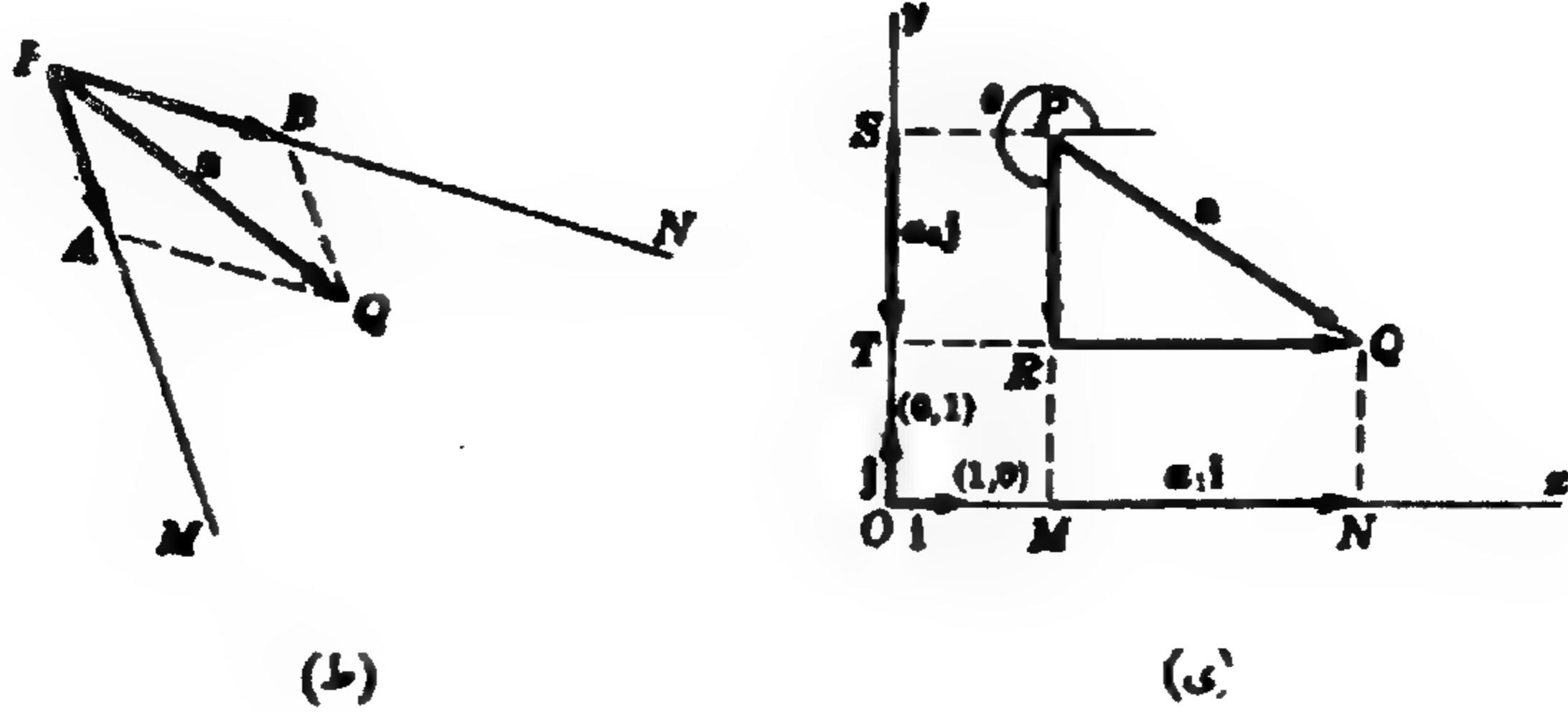
$$k(a + b) = ka + kb \quad \text{٣ - قانون التوزيع}$$

انظر المسائل - ١ :

**مركبات متجهة :** ليكن  $a = PQ$  في الشكل ١٨ - ٢ (ط) متجهان مفروضا وليكن  $PM$  و  $PN$  متجهين (اتجاهين) آخرين مارين بـ  $P$  ولننشئ متوازي الأضلاع  $PAQB$  فيكون

$$a = PA + PB$$

ويقال عن  $a$  إنه حلل في الاتجاهين  $PM$  و  $PN$  ونعبر  $PA$  و  $PB$  المركبتين المتجهتين لـ  $a$  في الاتجاهين  $PM$  و  $PN$ .



شكل ١٨ - ٢

اعتبر بعد ذلك المتجه  $a$  في مجموعة الإحداثيات المتعامدة [شكل ١٨-٢ (ب)] وله وحدات قياس متساوية على المحورين . لنرمز بـ  $i$  للمتجه من  $(0,0)$  إلى  $(1,0)$  وبـ  $j$  للمتجه من  $(0,0)$  إلى  $(0,1)$  . ويكون اتجاه  $i$  هو الاتجاه الموجب للمحور  $x$  واتجاه  $j$  هو الاتجاه الموجب للمحور  $y$  ، وكلا الاتجاهين متساويان وحدة ، أي أن مقدار كلي منهما يساوي وحدة الأطوال .

من نقطتي البداية  $P$  والنهاية  $Q$  للمتجه  $a$  إسقط عمودين على المحور  $x$  يلاقيه في  $M$  و  $N$  على الترتيب ونسقط كذلك عمودين آخرين على المحور  $y$  يلاقياه في  $S$  و  $T$  على الترتيب . والآن نجد أن  $MN = a_1 i$  حيث  $a_1$  موجبا ، وأن  $ST = a_2 j$  حيث  $a_2$  سالبا .

إذن  $MN = RQ = a_1 i$  ،  $ST = PR = a_2 j$  وبالتالي :

$$a = a_1 i + a_2 j \quad (١)$$

نسمو  $a_1 i$  و  $a_2 j$  المركبتين المتجهيتين لـ  $a$  ( ليس من الضروري هنا ذكر الاتجاهين ) ونسمو  $e_1$  و  $e_2$  المركبتين العدديتين أو المركبتين على  $x$  و  $y$  أو بشكل أكثر بساطة ، نسموها مركبتى  $a$  .

نفرض أن اتجاه  $a$  محلى بالزاوية  $\theta$  ،  $0 \leq \theta < 2\pi$  ، المقاسة في الاتجاه الخالف لحركة عقارب الساعة من الاتجاه الموجب لـ  $x$  إلى المتجه متخذة :

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (٢)$$

$$\tan \theta = a_2/a_1 \quad (٣)$$

وحسين الريح لنرى تقع فيه  $\theta$  بـ :

$$a_1 = |a| \cos \theta, a_2 = |a| \sin \theta$$

وإذا كان  $a = a_1 i + a_2 j$  ،  $b = b_1 i + b_2 j$  فنعلم :

$$a + b = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j - ٦ \quad a - b = (a_1 - b_1)i + (a_2 - b_2)j - ٧$$

$$ka = ka_1 i + ka_2 j - ٨$$

انظر للمادة .

**حاصل الضرب العددي أو القياسي :** يعرف حاصل الضرب العددي أو القياسي

لمتجهين  $a$  و  $b$  :

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta \quad (1)$$

حيث  $\theta$  أصغر زاوية بين المتجهين عندما يرسمان من نقطة بداية مشتركة ( انظر الشكل ١٨ - ٤ ) .

ومن المعادلة ( ٤ ) ينتج أن :

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{(قانون الإبدال)}$$

$$|a| = \sqrt{a \cdot a} \quad \text{أو} \quad a \cdot a = |a| |a| = |a|^2$$

$$a \cdot b = 0 \quad (i) \text{ إذا كان } a = 0, \text{ (ii) } b = 0, \text{ (iii) } a \text{ عمودياً على } b$$

$$i \cdot i = j \cdot j = 1; i \cdot j = 0 \quad (11)$$

$$a \cdot b = (a_1 i + a_2 j) \cdot (b_1 i + b_2 j) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (12)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{(قانون التوزيع)} \quad (13)$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d \quad (14)$$

**المسقط العددي والمتجهة :** يمكن تسمية  $a_1$  في المعادلة ( ١ ) المسقط العددي لـ  $a$

على أي متجه يتفق في الاتجاه مع المحور  $x$  الموجب ، بينما يمكن تسمية المتجه  $a_1$  المسقط المتجه لـ  $a$  على أي متجه يتفق في الاتجاه مع المحور  $x$  الموجب .



شكل ١٨ - ٥

ونجد في المسألة ٧ المسقط العددي  $a \cdot \frac{b}{|b|}$  والمسقط المتجه  $\left( a \cdot \frac{b}{|b|} \right) \frac{b}{|b|}$  لمتجه  $a$  على

متجه آخر  $b$  ( لاحظ أنه عندما يكون لـ  $b$  الاتجاه الموجب للمحور  $x$  فإن  $\frac{b}{|b|} = i$  )

ينتج من ذلك أن :

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta \quad (15)$$

أو يساوي حاصل ضرب طول  $a$  في المسقط العددي لـ  $a$  على  $b$  أو يساوي حاصل ضرب طول  $b$  في المسقط

العددي لـ  $a$  على  $b$  . ( أنظر الشكل ١٨ - ٥ ) .

أنظر المسائل ٨ - ٩

**المتجهات المتجهات :** لنفترض أن المنحنى في الشكل ١٨ - ٦

يُعطى بالمعادلتين البارامتريتين .

$$x = f(u), \quad y = g(u)$$

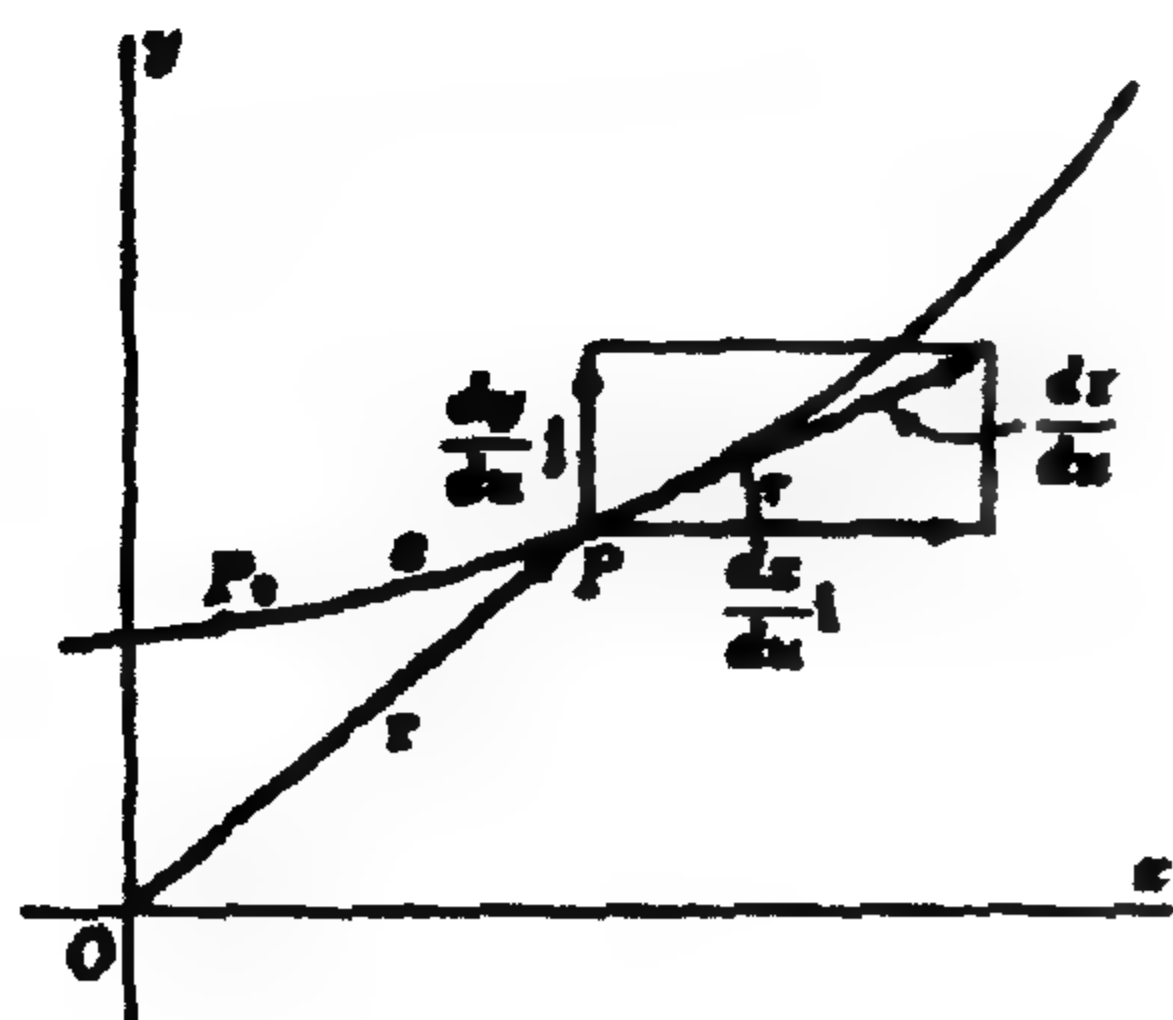
يسمى المتجه

$$r = xi + yj = i f(u) + j g(u)$$

الذي يصل نقطة الأصل بالنقطة  $P(x, y)$  على المنحنى بمتجه الموضع

أو نصف القطر المتجه لـ  $P$  ( سنستعمل من الآن الحرف  $r$  كرمز

للمتجهات الموضع ) .



شكل ١٨ - ٦

وهكذا فإن  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  هو متجه طلق في حين أن المتجه  $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  هو متجه يصل نقطة الأصل بالنقطة  $P(3, 4)$ .

وتعطي مشتقة  $\mathbf{r}$  بالنسبة لـ  $u$  بالمعادلة :

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} \quad (٥)$$

لنرمز بـ  $s$  لطول القوس المقاس من نقطة ثابتة  $P_0$  على المنحنى بحيث تزداد  $s$  مع تزايد  $u$ . فإذا كانت  $\tau$  الزاوية التي يصنعها  $d\mathbf{r}/du$  مع الاتجاه الموجب للمحور  $x$  فإن ميل المنحنى عند  $P$  يساوي  $\tan \tau = \frac{dy/du}{dx/du} = \frac{dy}{dx}$

إذن  $d\mathbf{r}/du$  متجه مقداره :

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| = \sqrt{\left( \frac{dx}{du} \right)^2 + \left( \frac{dy}{du} \right)^2} = \frac{ds}{du}$$

واتجاهه هو اتجاه مماس المنحنى عند  $P$ . ولقد جرت العادة أن نعتبر النقطة  $P$  نقطة بداية لهذا المتجه.

وإذا كان المتغير العددي  $u$  هو طول القوس  $s$  فإن المعادلة (٥) تصبح :

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \quad (٦)$$

واتجاه  $\mathbf{t}$  هنا هو اتجاه  $\tau$  كما سبق بينا مقداره  $\sqrt{(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2} = 1$ .

وبالتالي فإن  $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$  هو متجه وحدة المماس للمنحنى عند  $P$ .

وبما أن  $\mathbf{t}$  متجه وحدة فإن  $\mathbf{t}$  و  $d\mathbf{t}/ds$  متعامدان (أنظر المسألة ١١).

لنرمز بـ  $\mathbf{n}$  لمتجه الوحدة عند  $P$  الذي اتجاهه هو اتجاه  $d\mathbf{t}/ds$ .

فعندما تتحرك  $P$  على المنحنى المبين بالشكل ١٨ - ٧ فإن مقدار  $\mathbf{t}$  يبقى

ثابتاً ، ولذلك فإن  $d\mathbf{t}/ds$  تعطي قياس معدل التغير لإتجاه  $\mathbf{t}$ . وبالتالي فإن

مقدار  $d\mathbf{t}/ds$  عند النقطة  $P$  هو القيمة العددية للانحناء عند  $P$  ، أي أن  $|d\mathbf{t}/ds| = |K|$ .

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |K|\mathbf{n}$$

أنظر المسائل (١٠ - ١٣)

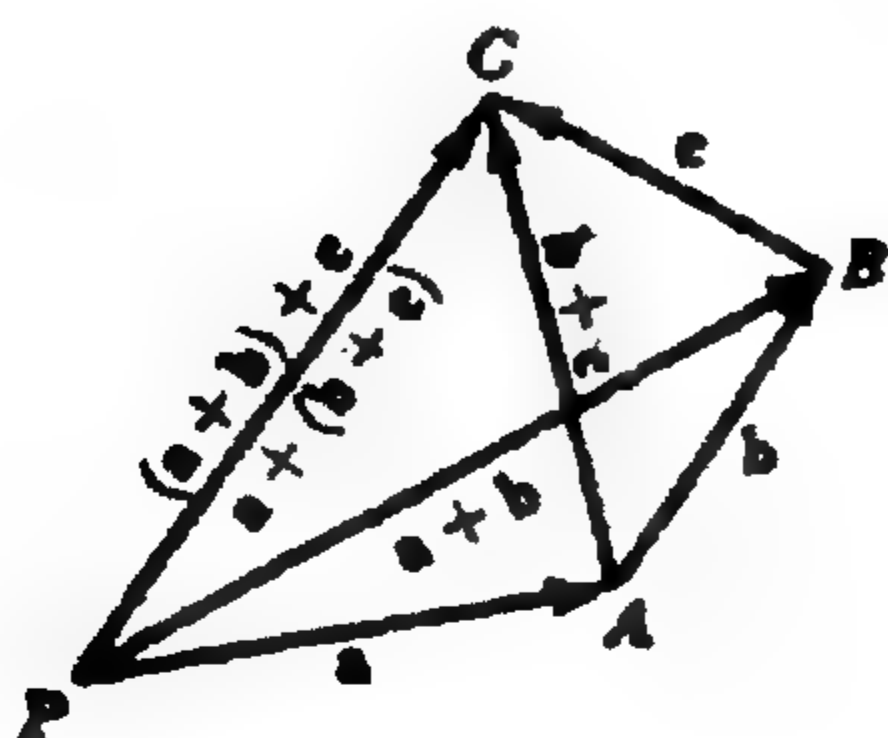
### مسائل محلولة

١ - برهن أن  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ .

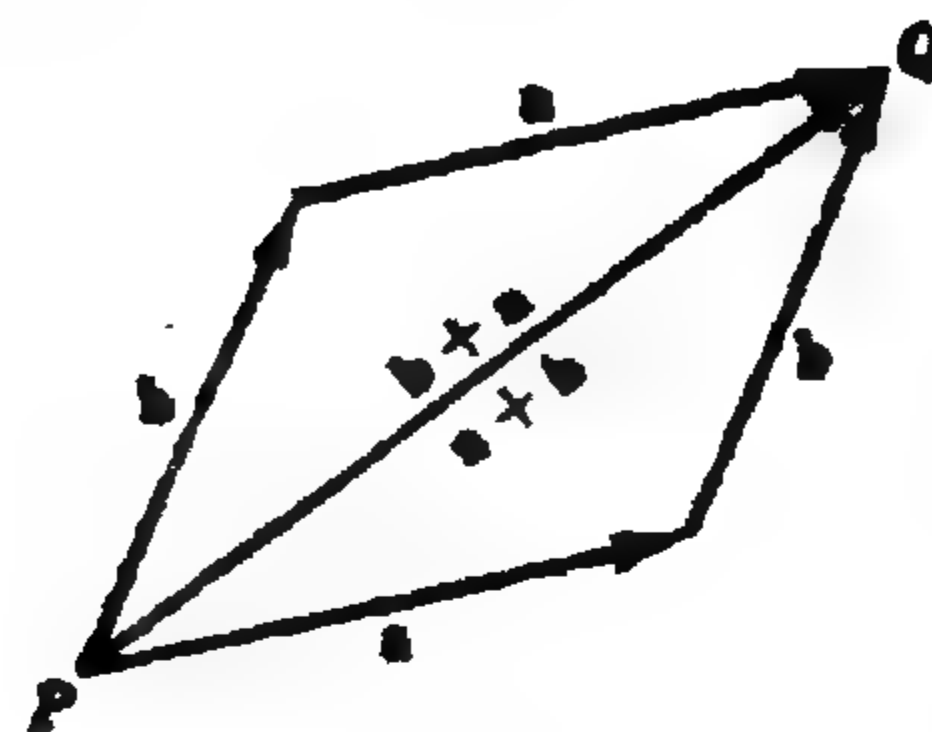
ينضح من الشكل ١٨ - ٨ أن  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{PQ} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

٧- برهن أن  $(a+b)+c = a+(b+c)$

يوضح من الشكل ١٨-٩ أن  $PC = PB + BC = (a+b)+c$  وكذلك  $PC = PA + AC = a+(b+c)$



شكل ١٨-٩



شكل ١٨-٨

٣- لتكن  $a$  ثلاثة متجهات منبعثة من نقطة  $P$  بحيث تقع نهاياتها  $A, B, C$  على مستقيم واحد كما في الشكل (١٨-١٠) فإذا قسمت  $C$  الجزء  $BA$  بنسبة  $x:y$  حيث  $x+y=1$  فإنه يكون :

$$c = PB + BC = b + x(a-b) = xa + (1-x)b = xa + yb$$

وعلى سبيل المثال ، إذا نصفت  $C$  الجزء  $BA$  فيكون  $c = \frac{1}{2}(a+b)$  و  $BC = \frac{1}{2}(a-b)$ .

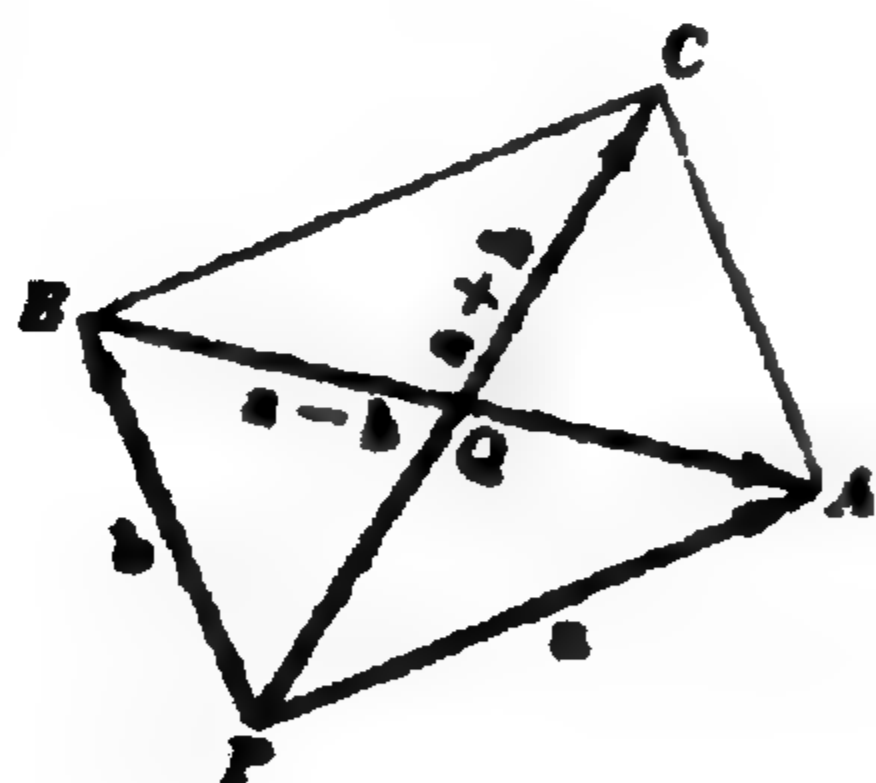
٤- برهن أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر .

لتفرض أن القطرين يتقاطعان عند  $Q$  كما هو مبين في الشكل (١٨-١١) .

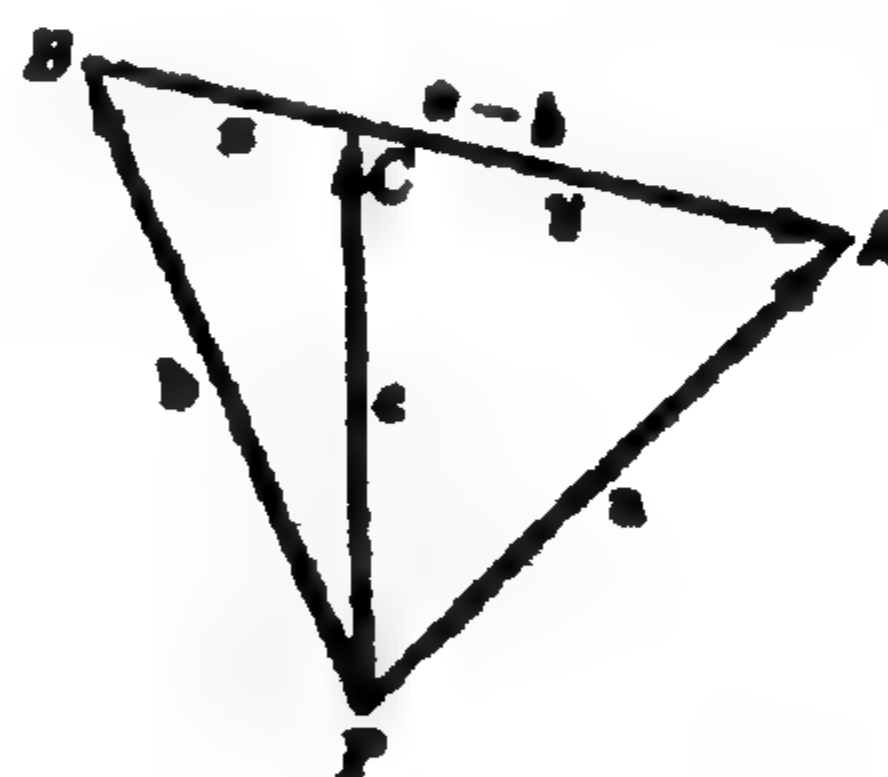
بما أن

$$b = x(a+b) - y(a-b) = (x-y)a + (x+y)b \quad \text{أو} \quad PB = PQ + QB = PQ - BQ$$

فإن  $x+y=1$  و  $x-y=0$  وبالتالي  $x=y=\frac{1}{2}$  والنقطة  $Q$  هي منتصف كل من القطرين .



شكل ١٨-١١



شكل ١٨-١٠

٥- لتجهين  $a = 3i + 4j$  و  $b = 2i - j$  لوجد مقدار اتجاه كل من  $a$  و  $b$

(ب)  $a+b$  (ج)  $a-b$

(١) بما أن  $a = 3i + 4j$  و  $|a| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  و  $\cos \theta = \frac{a_1}{|a|} = \frac{3}{5}$  و  $\sin \theta = \frac{4}{5}$  و  $\theta = 53^\circ 8'$

و الزاوية  $\theta$  واقعة في الربع الأول وتساوي  $53^\circ 8'$

بما أن  $b = 2i - j$  إذن  $|b| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$  و  $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$  و  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$  و  $\theta = 360^\circ - 26^\circ 34' = 333^\circ 26'$



$$a + b = (3i + 4j) + (2i - j) = 5i + 3j. \quad (ب)$$

$$|a + b| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}; \tan \theta = 3/5, \cos \theta = 5/\sqrt{34}; \theta = 30^\circ 58'.$$

$$b - a = (2i - j) - (3i + 4j) = -i - 5j. \quad (ج)$$

$$|b - a| = \sqrt{26}; \tan \theta = 5, \cos \theta = -1/\sqrt{26}; \theta = 258^\circ 41'.$$

٦- برهن أن المستقيم المنصف لقاعدة المثلث المتساوي الساقين عمودي على القاعدة [ في الشكل ١٨ - ١٧. ]  $[ |a| = |b| ]$ .

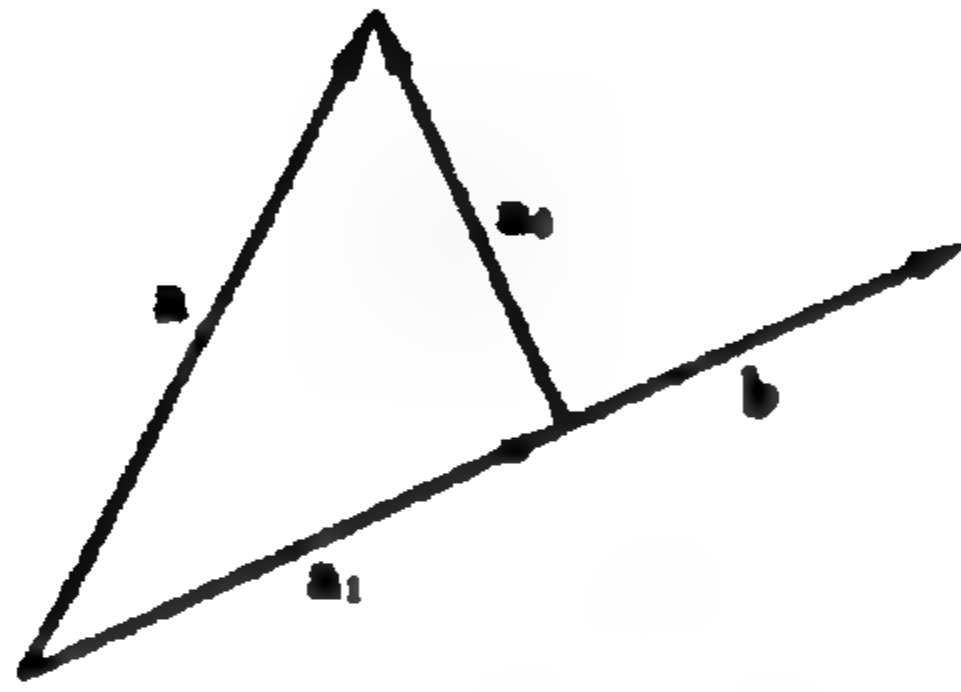
بما أن  $m$  منصف لقاعدة فإنه يكون حسب المألة ٢.

$$m = \frac{1}{2}(a + b)$$

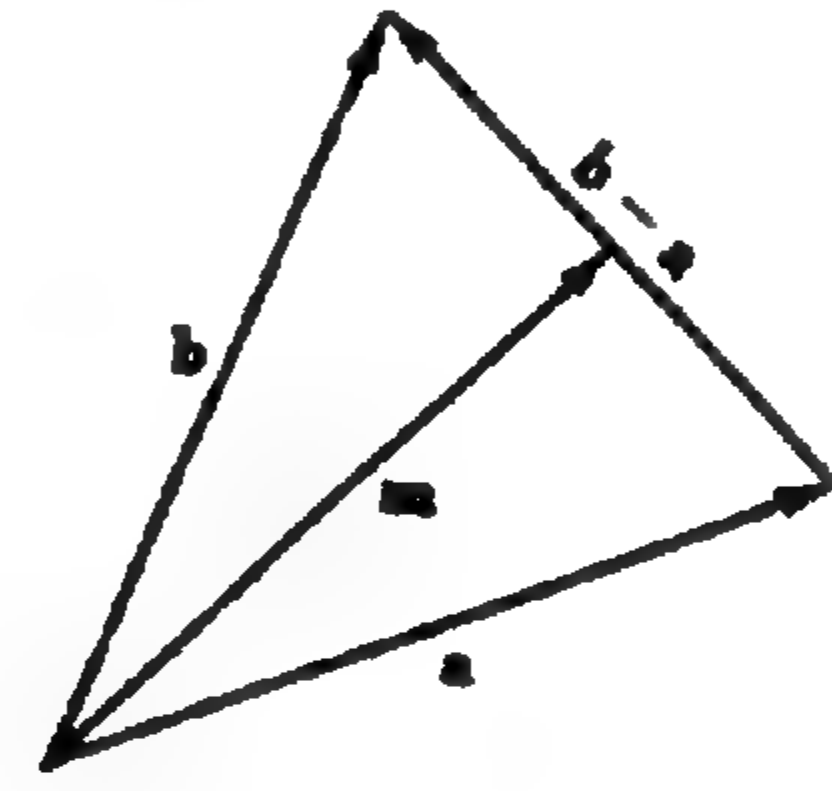
$$m \cdot (b - a) = \frac{1}{2}(a + b) \cdot (b - a) \quad \text{ومن}$$

$$= \frac{1}{2}(a \cdot b - a \cdot a + b \cdot b - b \cdot a) = \frac{1}{2}(b \cdot b - a \cdot a) = 0$$

ومذا ما نريد برهانه.



شكل ١٨ - ١٣



شكل ١٨ - ١٢

٧- حلل  $a$  إلى مركبتين  $a_1$  و  $a_2$  الأولى موازية لتجه مفروض  $b$  والثانية عمودية عليه.

من الشكل ١٨ - ١٢ أعلاه نجد  $a = a_1 + a_2$ ,  $a_1 = cb$ ,  $a_2 \cdot b = 0$ . إذن :

$$a_2 = a - a_1 = a - cb, \quad a_2 \cdot b = (a - cb) \cdot b = a \cdot b - c|b|^2 = 0$$

$$a_2 = a - cb = a - \frac{a \cdot b}{|b|^2} b. \quad \text{و} \quad a_1 = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b \quad \text{إذن} \quad c = \frac{a \cdot b}{|b|^2}.$$

والمقد  $\frac{a \cdot b}{|b|^2}$  هو المسقط السدي لـ  $a$  على  $b$ ؛ وأن التجه  $\left( \frac{a \cdot b}{|b|^2} \right) \frac{b}{|b|}$  هو المسقط المتجه لـ  $a$  على  $b$ .

٨- حلل  $a = 4i + 3j$  إلى مركبتين  $a_1$  و  $a_2$  الأولى موازية لـ  $b = 3i + j$  والثانية عمودية على  $b$ .

$$c = \frac{a \cdot b}{|b|^2} = \frac{12 + 3}{10} = \frac{3}{2}. \quad \text{حسب المألة ٧ يكون}$$

$$a_1 = cb = \frac{3}{2}i + \frac{3}{2}j, \quad a_2 = a - a_1 = -\frac{1}{2}i + \frac{3}{2}j.$$

٩- أوجد الشغل اللازم بذله لتحريك جسم على طول المتجه  $a = 3i + 4j$  إذا كانت القوة المؤثرة تعطى بالمتجه

$$b = 2i + j$$

الشغل المبذول = المركبة السدية لـ  $b$  على  $a$  (المسافة المقطوعة)

$$= (|b| \cos \theta) |a| = b \cdot a = (2i + j) \cdot (3i + 4j) = 10$$

١٠- إذا كان  $a = i f_1(u) + j f_2(u)$  و  $b = i g_1(u) + j g_2(u)$  فبرهن أن  $\frac{d}{du}(a \cdot b) = \frac{da}{du} \cdot b + a \cdot \frac{db}{du}$ .

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (if_1 + jf_2) \cdot (ig_1 + jg_2) = f_1g_1 + f_2g_2, \\ \frac{d}{du}(a \cdot b) &= f_1'g_1 + f_2'g_2 + f_1g_1' + f_2g_2' \quad \left( f_i' = \frac{df_i(u)}{du} \right) \\ &= (f_1'g_1 + f_2'g_2) + (f_1g_1' + f_2g_2') \\ &= (if_1' + jf_2') \cdot (ig_1 + jg_2) + (if_1 + jf_2) \cdot (ig_1' + jg_2') = \frac{da}{du} \cdot b + a \cdot \frac{db}{du} \end{aligned}$$

١١- إذا كانت  $a = if_1(u) + jf_2(u)$  ذا مقدار ثابت فبرهن أن  $a$  و  $da/du$  متعامدان .

استنادا إلى المسألة ١٠ فإننا نحصل من  $a \cdot a =$  ثابت  $\neq 0$  على  $\frac{d}{du}(a \cdot a) = \frac{da}{du} \cdot a + a \cdot \frac{da}{du} = 2a \cdot \frac{da}{du} = 0$ .

وبالتالى فإن  $a \cdot \frac{da}{du} = 0$  ومنه يكون المتجهان  $a$  و  $\frac{da}{du}$  متعامدان . وعلى هذا فإن مماس الدائرة عند إحدى نقاطها  $P$  عمودى على نصف القطر المار بـ  $P$  .

١٢- إذا كان  $r = i \cos^2 \theta + j \sin^2 \theta$  فأوجد  $t$  .

$$dr/d\theta = -i \sin 2\theta + j \sin 2\theta$$

$$t = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j, \quad \frac{ds}{d\theta} = \left| \frac{dr}{d\theta} \right| = \sqrt{\frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{dr}{d\theta}} = \sqrt{2} \sin 2\theta$$

١٣- إذا كان  $x = a \cos^2 \theta, y = a \sin^2 \theta$  فأوجد  $t$  و  $a$  عندما  $\theta = \frac{1}{4}\pi$  .

$$r = ai \cos^2 \theta + aj \sin^2 \theta$$

$$dr/d\theta = -2ai \cos \theta \sin \theta + 2aj \sin \theta \cos \theta$$

$$ds/d\theta = |dr/d\theta| = 2a \sin \theta \cos \theta$$

$$t = \frac{dr}{ds} = \frac{dr/d\theta}{ds/d\theta} = -i \cos \theta + j \sin \theta$$

$$\frac{dt}{d\theta} = (i \sin \theta + j \cos \theta) \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2a \cos \theta} i + \frac{1}{2a \sin \theta} j$$

فإذا كان  $\theta = \frac{1}{4}\pi$  فإنه يكون :

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{2a}i + \frac{\sqrt{2}}{2a}j, \quad |K| = \left| \frac{dt}{ds} \right| = \frac{2}{2a}, \quad a = \frac{1}{|K|} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j.$$

١٤- بين أن المتجه  $aj + bi$  عمودى على المستقيم  $ax + by + c = 0$  .

لتكن  $P_1(x_1, y_1)$  و  $P_2(x_2, y_2)$  نقطتين مختلفتين على المستقيم فنعتقد يكون  $ax_1 + by_1 + c = 0$  ، وإذا طرحنا الأولى من الثانية نجد :

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

$$\begin{aligned} a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) &= (ai + bj) \cdot [(x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j] \\ &= a \cdot P_1P_2 = 0 \end{aligned}$$

والمتجه  $a$  عمودى على المستقيم .

١٥- استخدم طرق الاتجاهات لتصل على :

(١) معادلة المستقيم المار بالنقطة  $P_1(2, 3)$  والعمودى على المستقيم  $x + 2y + 5 = 0$  .

(ب) معادلة المستقيم المار بالنقطتين  $P_1(2, 3)$  و  $P_2(5, -1)$ .

خذ نقطة  $P(x, y)$  أخرى على المستقيم المطلوب.

(١) إن المتجه  $a = i + 2j$  وفق المسألة ١٤ عمودى على  $x + 2y + 5 = 0$ . وبالتالي فإن المتجه  $P_1P = (x-2)i + (y-3)j$  مواز لـ  $a$  أى أن :

$$(x-2)i + (y-3)j = k(i+2j)$$

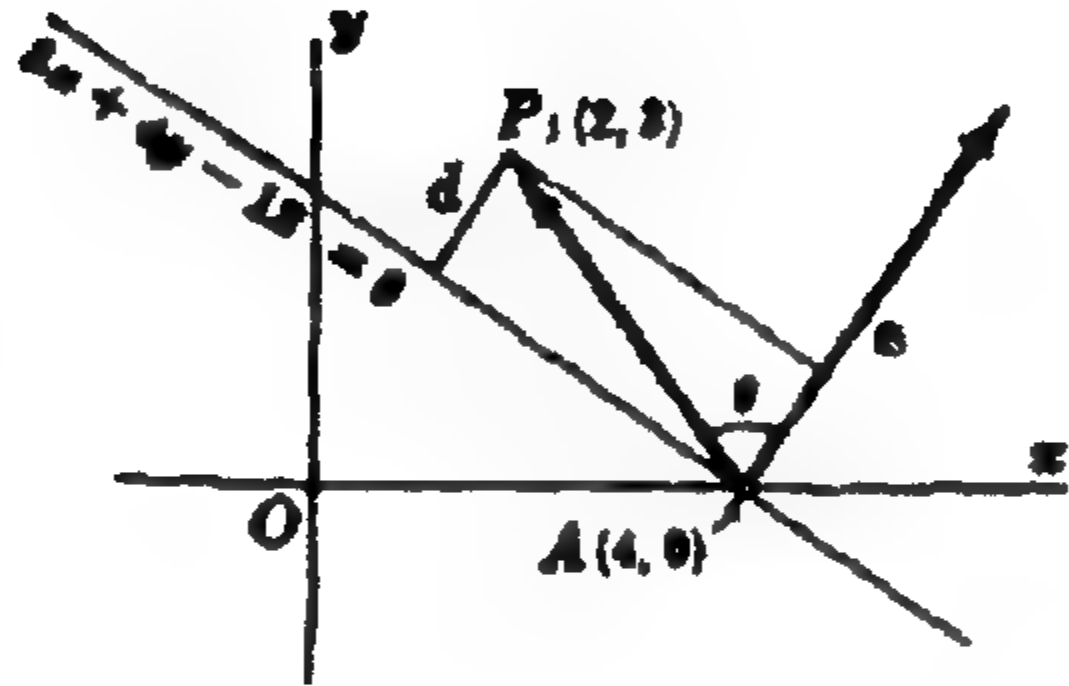
حيث  $k$  متغير عددي وبمساواة المركبات نجد أن  $x-2 = k$ ,  $y-3 = 2k$ . وبحذف  $k$  نجد المعادلة المطلوبة  $2x - y - 1 = 0$ . أو  $y - 3 = 2(x - 2)$

(ب) لدينا  $P_1P = (x-2)i + (y-3)j$  و  $P_1P_2 = 3i - 4j$

وحيث أن  $a = 4i + 3j$  عمودى على  $P_1P_2$  وبالتالي على  $P_1P$  فإن المعادلة المطلوبة هي

$$a \cdot P_1P = (4i + 3j) \cdot [(x-2)i + (y-3)j] = 0 \quad \text{أو} \quad 4x + 3y - 17 = 0$$

١٦ - استخدم طرق المتجهات لتحصل على بعد النقطة  $P_1(2, 3)$  عن المستقيم  $3x + 4y - 12 = 0$ .



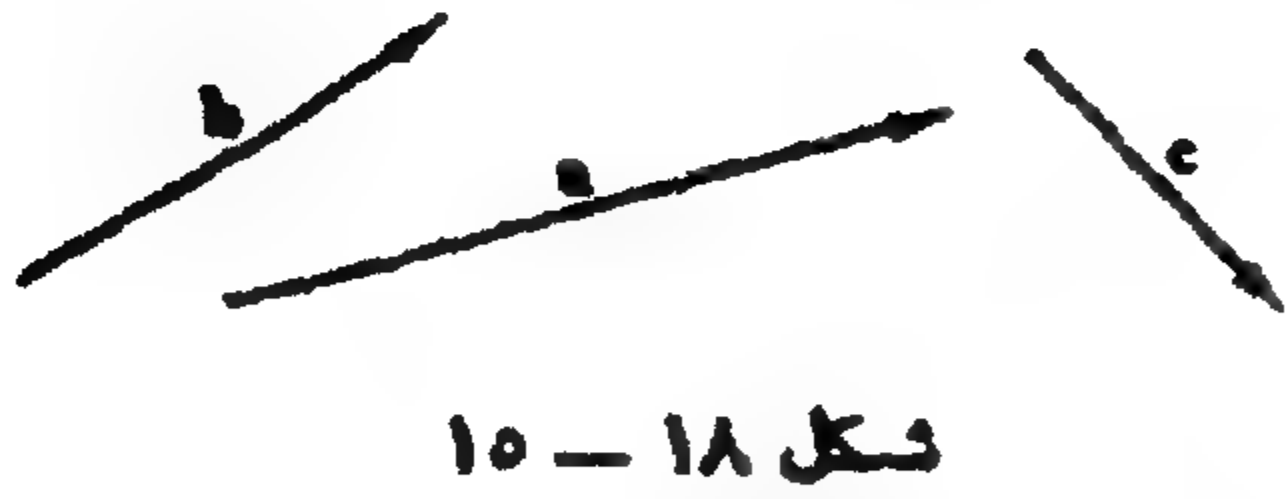
لننشئ من أية نقطة ملائمة على المستقيم ، ولنكن  $A(4, 0)$  متجهها  $a = 3i + 4j$  عموديا على المستقيم . فيكون البعد المطلوب هو :

$$d = |AP_1| \cos \theta$$

$$a \cdot AP_1 = |a| |AP_1| \cos \theta = |a| d; \quad \text{وحيث أن}$$

$$\text{فإنه} \quad d = \frac{a \cdot AP_1}{|a|} = \frac{(3i + 4j) \cdot (-2i + 3j)}{5} = \frac{-6 + 12}{5} = \frac{6}{5}$$

### مسائل إضافية



شكل ١٨ - ١٥

١٧ - إذا كانت لدينا المتجهات  $a, b, c$  (أنظر الشكل ١٨-١٥) فأنشئ :

$$(أ) \quad 2a + b - c$$

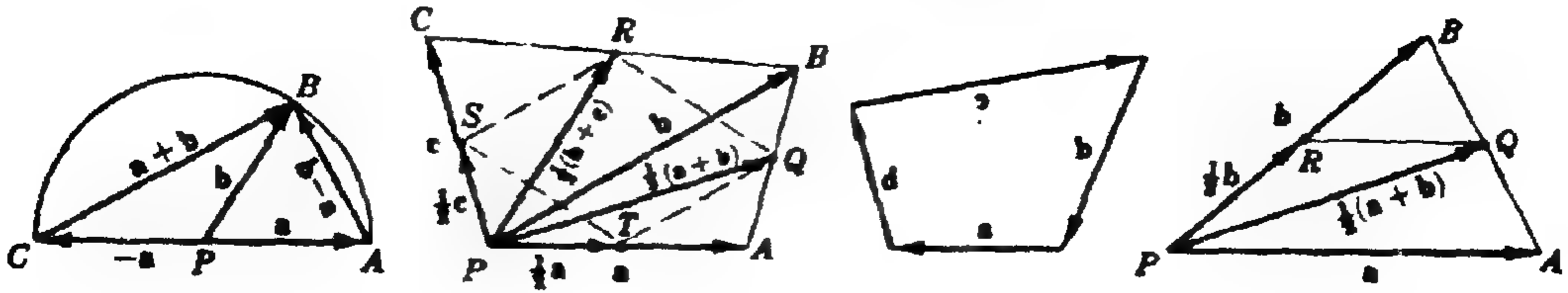
$$(ب) \quad -3b + 2c$$

$$(ج) \quad a + 2b$$

١٨ - برهن أن الخط المستقيم الذى يصل بين منتصفى ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوى نصفه . أنظر الشكل ١٨ - ١٦ .

١٩ - إذا كانت  $a, b, c, d$  الأضلاع المتتالية لشكل رباعي فبرهن أن  $a + b + c + d = 0$ . أنظر الشكل ١٨ - ١٧ .  
إرشاد : ليكن  $P$  و  $Q$  رأسين غير متتالين . احسب  $PQ$  بطريقتين مختلفتين .

٢٠ - برهن أنه إذا وصلنا منتصفات الأضلاع المتتالية لشكل رباعي فإن الشكل الرباعي الناتج هو متوازي أضلاع . أنظر الشكل ١٨ - ١٨ .



شكل ١٨ - ١٩

شكل ١٨ - ١٨

شكل ١٨ - ١٧

شكل ١٨ - ١٦

٢١- برهن باستخدام الشكل الذى فيه  $|a| = |b|$  هو نصف قطر دائرة ، أن الزاوية المحيطية المقابلة لنصف دائرة هي زاوية قائمة . أنظر الشكل ١٨ - ١٩ .

٢٢- أوجد طول كل من المتجهات التالية والزاوية التى يصنعها مع المحور  $x$  الموجب :

(١)  $i + j$ , (ب)  $-1 + j$ , (ج)  $i + \sqrt{3}j$ , (د)  $i - \sqrt{3}j$ .

ج : (١)  $\sqrt{2}; \theta = \frac{\pi}{4}$ , (ب)  $\sqrt{2}; \theta = \frac{3\pi}{4}$ , (ج)  $2; \theta = \frac{\pi}{3}$ , (د)  $2; \theta = \frac{5\pi}{3}$ .

٢٣- بين أنه إذا كان  $u$  هو المتجه الناتج عن دوران متجه الوحدة  $i$  فى اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة بزاوية مقدارها  $\theta$  فإن  $u = i \cos \theta + j \sin \theta$ .

٢٤- استخدم قانون جيبوس التام فى المثلثات لتحصل على  $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |c|^2)$ .

٢٥- اكتب كلا من المتجهات التالية على الشكل  $ai + bj$  :

(١) المتجه الذى يصل نقطة الأصل بالنقطة  $P(2, -3)$  (ب) المتجه الذى يصل بين النقطتين  $P_1(2, 3)$  و  $P_2(4, 2)$

(ج) المتجه الذى يصل النقطة  $P_2(4, 2)$  بالنقطة  $P_1(2, 3)$  (د) متجه الوحدة فى الاتجاه  $3i + 4j$  (هـ) المتجه الذى مقداره 6 واتجاهه  $120^\circ$ .

ج : (١)  $2i - 3j$ , (ب)  $2i - j$ , (ج)  $-2i + j$ , (د)  $\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$ , (هـ)  $-3i + 3\sqrt{3}j$ .

٢٦- استخدم طرق المتجهات لتحصل على معادلة المسافة بين النقطتين  $P_1(x_1, y_1)$  و  $P_2(x_2, y_2)$ .

٢٧- إذا كانت  $B(1, 5)$   $A(3, 1)$   $O(0, 0)$  ثلاثة رؤوس من متوازي الأضلاع  $OAPB$  فامى إحداثيات  $P$ .

٢٨- (١) أوجد  $k$  بحيث يكون  $a = 3i - 2j$  عموديا على  $b = i + kj$ .

(ب) أوجد متجهها عموديا على  $a = 2i + 5j$ .

٢٩- برهن الخواص ٨ - ١٥ لضرب القياسى.

٣٠- أوجد المسقط المتجه والمسقط العددى لـ  $b$  على  $a$  إذا علمت :

(١)  $a = -3i + j$ ,  $b = i - 2j$ , (ب)  $a = 10i + 2j$ ,  $b = 2i + 3j$ .

ج : (١)  $-\sqrt{5}$ ,  $-i + 2j$ , (ب)  $2\sqrt{13}$ ,  $4i + 6j$ .

٣١- بين أن ثلاثة متجهات  $a, b, c$  تشكل مثلثاً بعد إزاحات متوازية بشرط

(١) أن يكون أحد المتجهات هو مجموع المتجهين الآخرين أو (ب) أن يكون  $a + b + c = 0$ .

٣٢- بين أن  $a = -7i + 4j$ ,  $b = 4i + 8j$ ,  $c = 2i - 6j$  هي أضلاع مثلث قائم. تحقق من أن منتصف الوتر متساوي الأبعاد عن رؤوس المثلث.

٣٣- أوجد متجه وحدة المماس  $t = dr/ds$  بفرض أن :

$$(١) \quad r = 4i \cos \theta + 4j \sin \theta; \quad (ب) \quad r = e^{\theta}i + e^{-\theta}j; \quad (ج) \quad r = \theta i + \theta^2 j.$$

$$ج : (١) \quad -i \sin \theta + j \cos \theta, \quad (ب) \quad \frac{e^{\theta}i - e^{-\theta}j}{\sqrt{e^{2\theta} + e^{-2\theta}}}, \quad (ج) \quad \frac{i + 2\theta j}{\sqrt{1 + 4\theta^2}}$$

٣٤- (١) أوجد  $n$  لنحن المسألة ٣٣ (١). (ب) أوجد  $n$  لنحن المسألة ٣٣ (ج).

(ج) أوجد  $t$  و  $n$  بفرض أن  $x = \cos \theta + \theta \sin \theta$ ,  $y = \sin \theta - \theta \cos \theta$ .

$$ج : (١) \quad i \cos \theta - j \sin \theta, \quad (ب) \quad i \cos \theta - j \sin \theta, \quad (ج) \quad \frac{-2\theta}{\sqrt{1 + 4\theta^2}} i + \frac{1}{\sqrt{1 + 4\theta^2}} j$$



# الفصل التاسع عشر

## الحركة الخطية الانحنائية

### السرعة في الحركة الخطية الانحنائية :

لتكن نقطة تتحرك على منحنى معادله  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  .

حيث  $t$  الزمن . باشتقاق متجه الموضع :

$$\mathbf{r} = ix + jy \quad (1)$$

بالنسبة لـ  $t$  نحصل على متجه السرعة .

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = i \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} = iv_x + jv_y \quad (2)$$

حيث  $v_x = dx/dt$  و  $v_y = dy/dt$  .

ويعطى مقدار  $\mathbf{v}$  بـ

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{ds}{dt}$$

وأما اتجاه  $\mathbf{v}$  عند  $P$  فهو المماس لمسار عند  $P$  كما هو موضح في الشكل ١٩ - ١ . وإذا رمزنا بـ  $\tau$  لاتجاه  $\mathbf{v}$  (الزاوية بين  $\mathbf{v}$  والمحور  $x$  الموجب) فإن  $\tan \tau = v_y/v_x$  حيث يتعين الربيع الذي تقع فيه بالعلامتين  $v_x = |\mathbf{v}| \cos \tau$  و  $v_y = |\mathbf{v}| \sin \tau$  .

### التسارع (المجلة) في الحركة الخطية الانحنائية :

باشتقاق المعادلة (٢) بالنسبة لـ  $t$  نحصل على متجه التسارع :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = i \frac{d^2x}{dt^2} + j \frac{d^2y}{dt^2} = ia_x + ja_y \quad (3)$$

حيث  $a_x = d^2x/dt^2$  و  $a_y = d^2y/dt^2$  .

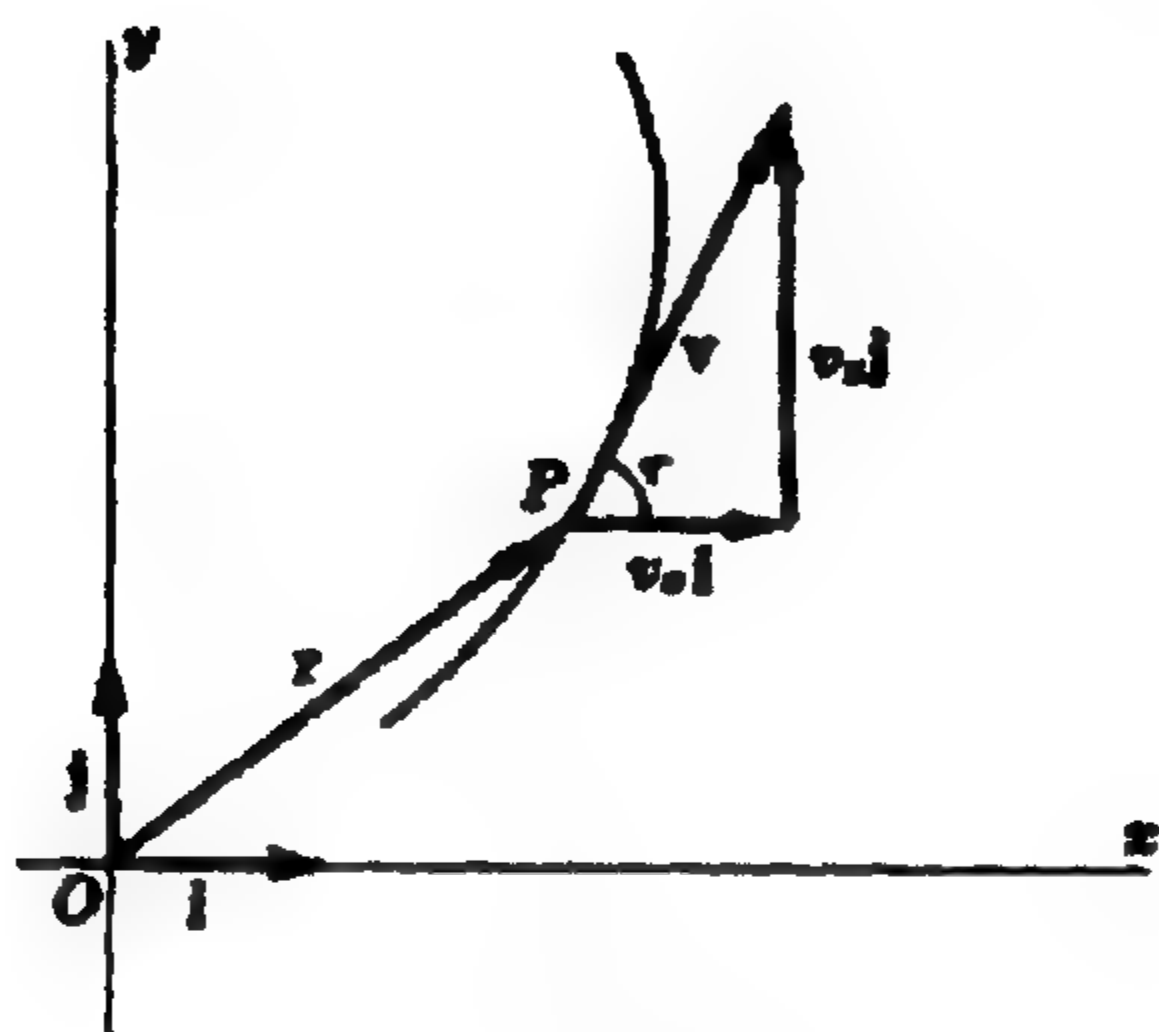
ويعطى مقدار  $\mathbf{a}$  بـ

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

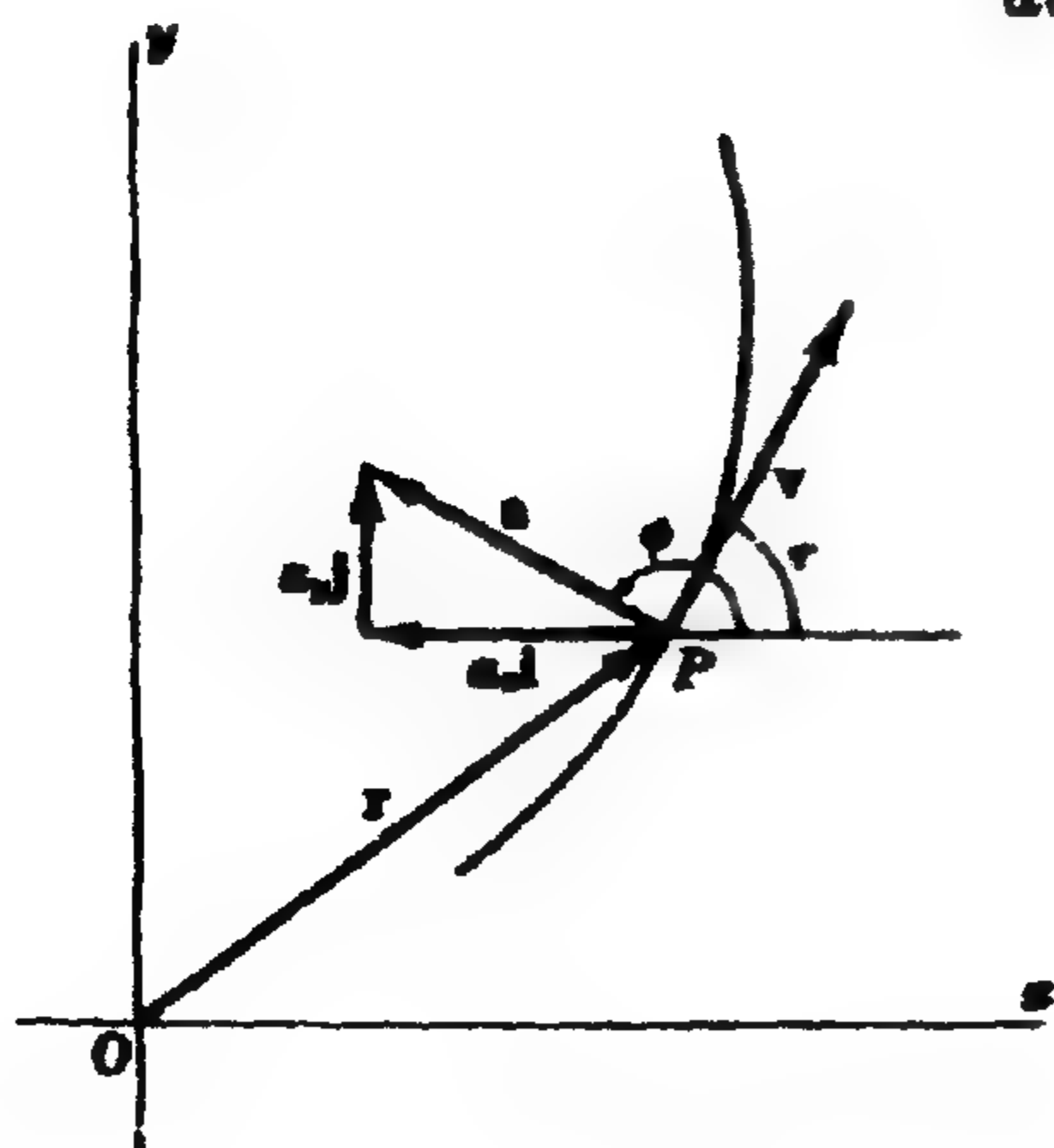
وأما الاتجاه  $\phi$  لـ  $\mathbf{a}$  فيعطى بـ  $\tan \phi = a_y/a_x$  حيث يتعين الربيع الذي تقع فيه بالمعادلتان  $a_x = |\mathbf{a}| \cos \phi$  و  $a_y = |\mathbf{a}| \sin \phi$  . أنظر الشكل ١٩ - ٢ .

منطوق السائل ١ - ٣ حلين يتمثل أحدهما بمتجه الموضع (١)

ومتجه السرعة (٢) ومتجه التسارع (٣)



شكل ١٩ - ١



شكل ١٩ - ٢

وهذا الحل يتطلب تمثيلا بارامتريا للمسار . في حين يستخدم الحل الآخر ، الأكثر شيوعا ، المركبات  $x$  و  $y$  لهذه الاتجاهات دون اللجوء إلى التمثيل البارامترى للنحن . والحلان ، بالطبع ، لا يختلفان عن بعضهما من حيث الأساس .  
أنظر المسائل ١ - ٣

المركبتان المماسية والعمودية للتسارع : من المعادلة (٦) في الفصل الثامن عشر نجد أن :

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = t \frac{ds}{dt} \quad (١)$$

ومن

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = t \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{dt}{dt} \frac{ds}{dt} \\ &= t \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{dt}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = t \frac{d^2s}{dt^2} + |K| \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (٢)$$

وذلك استنادا إلى المعادلة (٧) من الفصل الثامن عشر .

تطينا المعادلة (٢) تحليل متجه التسارع عند النقطة  $P$  إلى مركبتين إحداها في اتجاه المماس والأخرى في الاتجاه العمودي عند هذه النقطة ، فإذا أشرنا إلى هاتين المركبتين بـ  $a_t$  و  $a_n$  على الترتيب فإن مقدارهما يسى بالمعادلتين

$$|a_n| = \frac{(ds/dt)^2}{R} = \frac{|v|^2}{R} \quad \text{و} \quad |a_t| = \left| \frac{d^2s}{dt^2} \right|$$

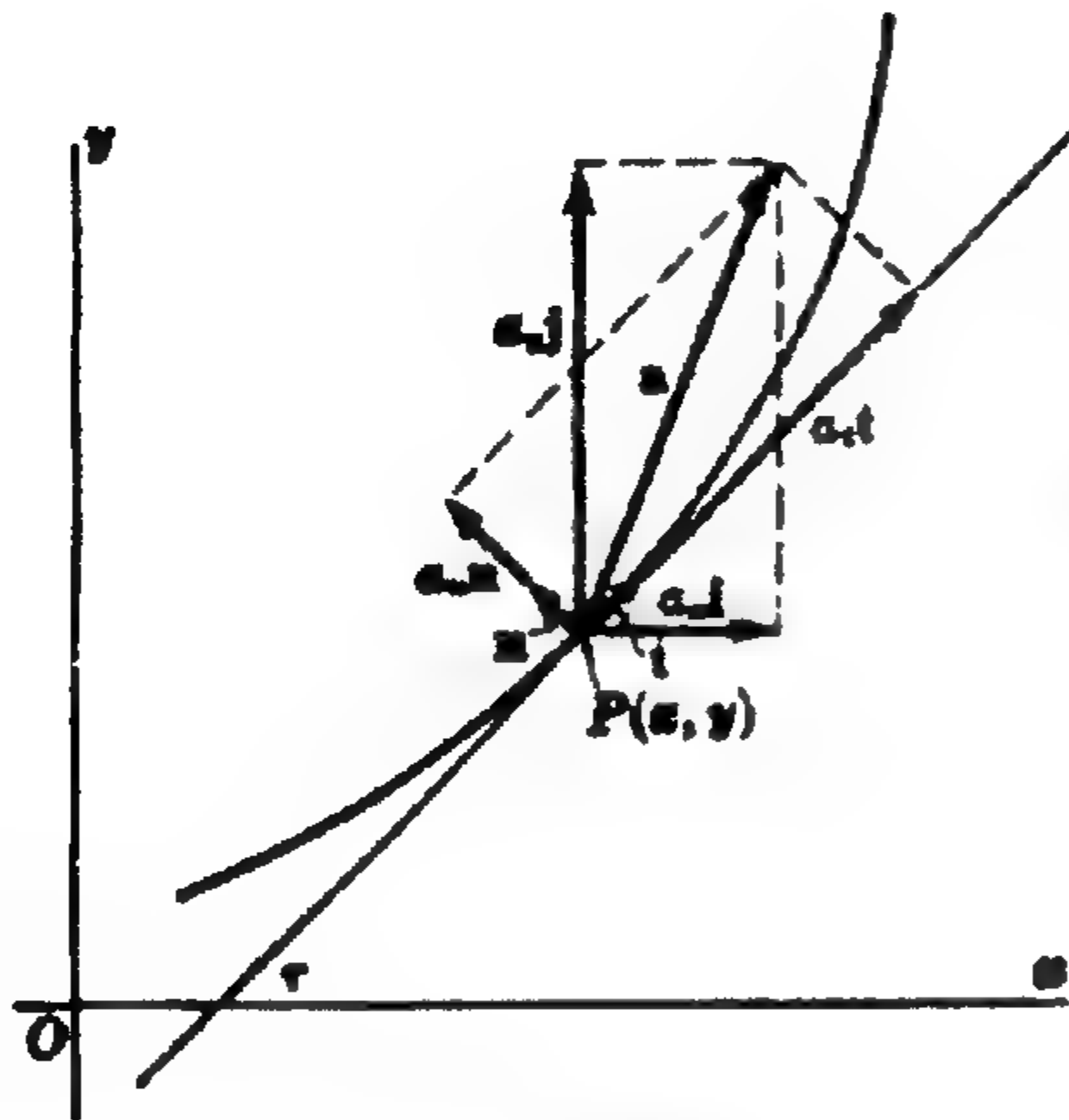
حيث  $R$  نصف قطر انحناء المسار عند  $P$  . انظر الشكل ١٩ - ٢

وبما أن  $|a|^2 = a_t^2 + a_n^2 = a_t^2 + a_n^2$  ، إذن :

$$a_n^2 = |a|^2 - a_t^2$$

وهذه العلاقة تدلنا على طريقة أخرى لتعيين  $|a|$  .

أنظر المسائل ٤ - ٨



شكل ١٩ - ٢

### مسائل مهولة

- ناقش الحركة المطة بالمعادلتين  $x = \cos 2\pi t$  ،  $y = 3 \sin 2\pi t$  . أوجد مقدار واتجاه كل من متجهي السرعة والتسارع متسا (١)  $t = 1/6$  و (ب)  $t = 2/3$  .

أن الحركة على القطع الناقص  $9x^2 + 16y^2 = 144$  . فإذا بدأنا من  $t = 0$  عند  $(1, 0)$  فإن النقطة المتحركة تتحرك على النحن في اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة .

الحل الأول :

$$r = ix + jy = i \cos 2\pi t + 3j \sin 2\pi t$$

$$v = dr/dt = i v_x + j v_y = -2\pi i \sin 2\pi t + 6\pi j \cos 2\pi t$$

$$a = dv/dt = i a_x + j a_y = -4\pi^2 i \cos 2\pi t - 12\pi^2 j \sin 2\pi t$$

(أ) وعندما  $t=1/6$  يكون :

$$\mathbf{a} = -2r^2\mathbf{i} - 6\sqrt{3}r^2\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{v} = -\sqrt{3}r\mathbf{i} + 3r\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3}r)^2 + (3r)^2} = 2\sqrt{3}r$$

$$\tau = 120^\circ \quad , \quad \tan \tau = v_y/v_x = -\sqrt{3}, \quad \cos \tau = v_x/|\mathbf{v}| = -1/2,$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-2r^2)^2 + (-6\sqrt{3}r^2)^2} = 4\sqrt{7}r^2$$

$$\phi = 259^\circ 6' \quad , \quad \tan \phi = a_y/a_x = 3\sqrt{3}, \quad \cos \phi = a_x/|\mathbf{a}| = -1/2\sqrt{7},$$

(ب) وعندما  $t=2/3$  يكون :

$$\mathbf{a} = 2r^2\mathbf{i} + 6\sqrt{3}r^2\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{v} = \sqrt{3}r\mathbf{i} - 3r\mathbf{j}$$

$$\tau = 5\pi/3 \quad , \quad |\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}r, \quad \tan \tau = -\sqrt{3}, \quad \cos \tau = 1/2,$$

$$\phi = 79^\circ 6' \quad , \quad |\mathbf{a}| = 4\sqrt{7}r^2, \quad \tan \phi = 3\sqrt{3}, \quad \cos \phi = 1/2\sqrt{7},$$

الحل الثاني :

$$x = \cos 2\pi t, \quad v_x = dx/dt = -2\pi \sin 2\pi t, \quad a_x = d^2x/dt^2 = -4\pi^2 \cos 2\pi t$$

$$y = 3 \sin 2\pi t, \quad v_y = dy/dt = 6\pi \cos 2\pi t, \quad a_y = d^2y/dt^2 = -12\pi^2 \sin 2\pi t$$

(أ) عندما  $t = 1/6$  يكون :

$$v_x = -\sqrt{3}\pi, \quad v_y = 3\pi, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{3}\pi$$

$$\tan \tau = v_y/v_x = -\sqrt{3}, \quad \cos \tau = v_x/|\mathbf{v}| = -1/2, \quad , \quad \tau = 120^\circ$$

$$a_x = -2\pi^2, \quad a_y = -6\sqrt{3}\pi^2, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4\sqrt{7}\pi^2$$

$$\tan \phi = a_y/a_x = 3\sqrt{3}, \quad \cos \phi = a_x/|\mathbf{a}| = -1/2\sqrt{7}, \quad , \quad \phi = 259^\circ 6'$$

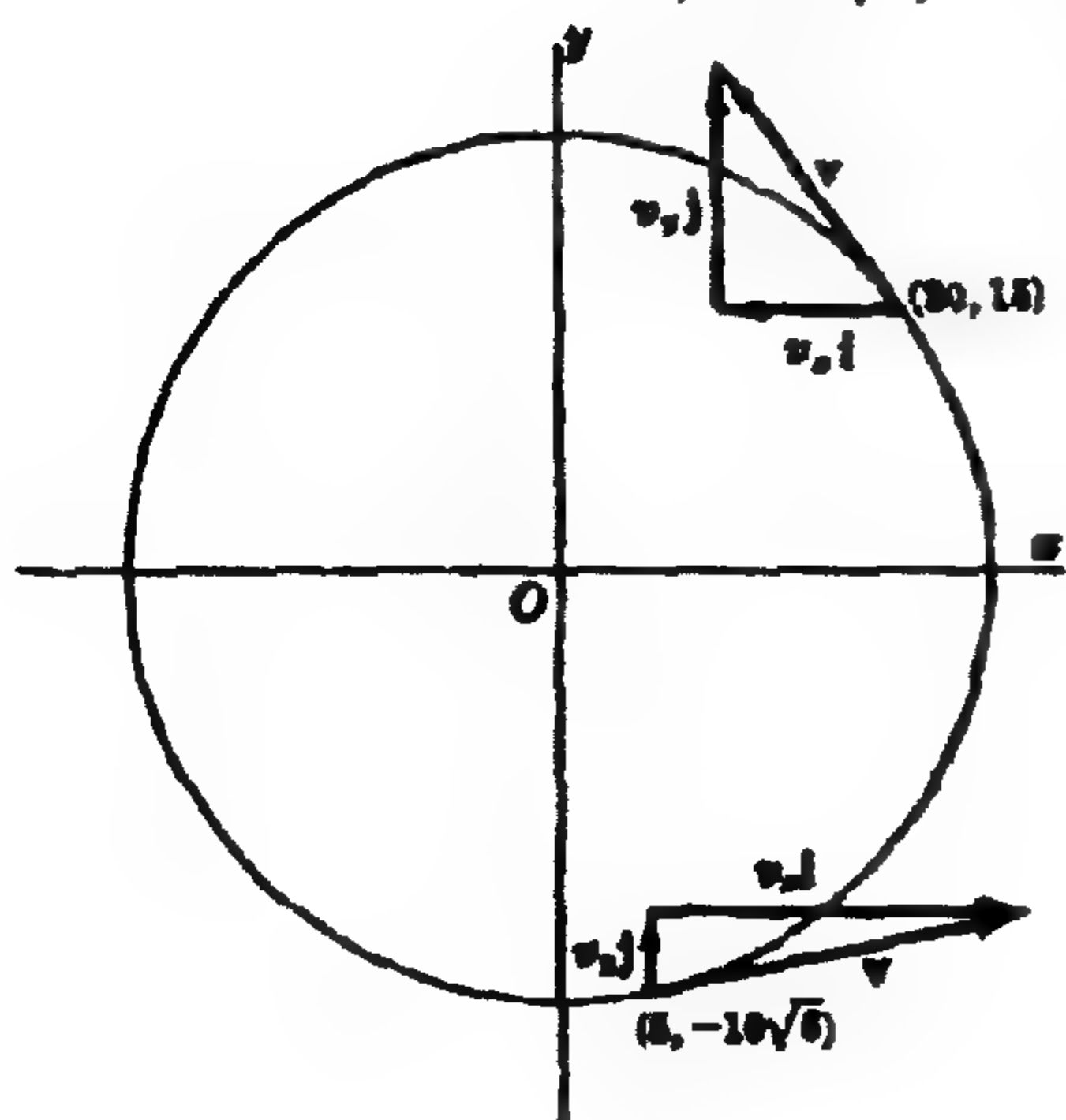
(ب) وعندما  $t = 2/3$  يكون :

$$v_x = \sqrt{3}\pi, \quad v_y = -3\pi, \quad |\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}\pi$$

$$\tan \tau = -\sqrt{3}, \quad \cos \tau = 1/2, \quad , \quad \tau = 5\pi/3$$

$$a_x = 2\pi^2, \quad a_y = 6\sqrt{3}\pi^2, \quad |\mathbf{a}| = 4\sqrt{7}\pi^2$$

$$\tan \phi = 3\sqrt{3}, \quad \cos \phi = 1/2\sqrt{7}, \quad , \quad \phi = 79^\circ 6'$$



شكل ١٩ - ٤

٢- تتحرك نقطة على الدائرة  $x^2 + y^2 = 625$  في اتجاه مخالف لحركة

مقارب الساعة بمعدل  $|\mathbf{v}| = 15$ . أوجد  $|\mathbf{a}|$ ,  $\tau$  و  $\phi$  عند

(أ) النقطة (20, 15) وعند (ب) النقطة  $(5, -10\sqrt{6})$

ارجع إلى الشكل ١٩ - ٤ .

الحل الأول : لدينا .

$$|\mathbf{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 = 225 \quad (I)$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ  $t$  نحصل على .

$$v_x a_x + v_y a_y = 0. \quad (II)$$

ومن المعادلة  $x^2 + y^2 = 625$  باشتقاق متالين نحصل على :

$$xv_x + yv_y = 0 \quad (III)$$

$$xv_x + v_x^2 + yv_y + v_y^2 = 0 \quad \text{وعلى}$$

أو

$$225v_x + 9v_y = -225 \quad (iv)$$

وبحل (i) و (iii) ما نجد أن :

$$v_x = \pm \frac{1}{3}v \quad (v)$$

وبحل (i) و (iv) ما نجد أن :

$$a_x = \frac{225v_y}{yv_x - xv_y} \quad (vi)$$

(أ) من الشكل ١٩ - ٤ نلاحظ أن  $v_x < 0$  عند  $(20, 15)$  . ومن (v) نجد  $v_x = -9$  ومن (iii)  $v_y = 12$  . ومنه  $\tan r = -4/3$ ,  $\cos r = -3/5$ ,  $r = 126^\circ 52'$  . ونجد من (vi) أن  $a_x = -36/5$  ومن (iv) نجد أن  $a_y = -27/5$  . إذن  $|a| = 9$  . ومن  $\tan \phi = 3/4$ ,  $\cos \phi = -4/5$ ,  $\phi = 216^\circ 52'$  . وبالتالي

(ب) من الشكل نلاحظ أن  $v_x > 0$  عند  $(5, -10\sqrt{6})$  . ومن (v) نجد  $v_x = 6\sqrt{6}$  ومن (iii) نجد  $v_y = 3$  . إذن  $\tan r = \sqrt{6}/12$ ,  $\sin r = 1/5$ ,  $r = 11^\circ 32'$  . من (vi) نجد  $a_x = -9/5$  ومن (iv) نجد  $a_y = 18\sqrt{6}/5$  . و  $|a| = 9$  . إذن  $\tan \phi = -2\sqrt{6}$ ,  $\cos \phi = -1/5$ ,  $\phi = 101^\circ 32'$  . وبالتالي

الحل الثاني :

باستخدام المعادلات البارامترية  $x = 25 \cos \theta$ ,  $y = 25 \sin \theta$  نجد عند  $P(x, y)$

$$r = 25i \cos \theta + 25j \sin \theta$$

$$v = \frac{dr}{dt} = (-25i \sin \theta + 25j \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} = -15i \sin \theta + 15j \cos \theta$$

$$a = \frac{dv}{dt} = (-15i \cos \theta - 15j \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = -9i \cos \theta - 9j \sin \theta$$

حيث أن  $|a| = 15$  مكان 'سرعة زاوية ثابتة' هي  $d\theta/dt = 3/5$  .

(أ) عند النقطة  $(20, 15)$  يكون  $\sin \theta = 3/5$  و  $\cos \theta = 4/5$  .

$$r = 126^\circ 52' \quad v = -9i + 12j; \tan r = -4/3, \cos r = -3/5,$$

$$\phi = 216^\circ 52' \quad a = -\frac{36}{5}i - \frac{27}{5}j; |a| = 9; \tan \phi = \frac{3}{4}, \cos \phi = -\frac{4}{5}.$$

(ب) وعند النقطة  $(5, -10\sqrt{6})$  يكون  $\sin \theta = -\frac{1}{5}\sqrt{6}$  و  $\cos \theta = 1/5$  .

$$r = 11^\circ 32' \quad v = 6\sqrt{6}i + 3j; \tan r = \sqrt{6}/12, \cos r = \frac{1}{5}\sqrt{6},$$

$$\phi = 101^\circ 32' \quad a = -\frac{9}{5}i + \frac{18\sqrt{6}}{5}j; |a| = 9; \tan \phi = -2\sqrt{6}, \cos \phi = -1/5,$$

٢ - يتحرك جسم على قوس القطع المكافئ  $y = 8x^2$  الواقع في الربع الأول بحيث يكون  $v_x = 2$  . لوجد  $|a|$ ,  $v$ ,  $|a|$  و  $\phi$  عند النقطة  $(4, 2)$  .

الحل الأول :

بافتراض  $x = 8y$  مرتين بالنسبة لـ  $t$  وبإستخدام  $v_x = 2$  نحصل على

$$2av_x = 8v_y = 16 \quad \text{أو} \quad av_x = 8, \quad \text{و} \quad av_x + v_y^2 = 0$$

وعند (4, 2) : يكون  $r = \frac{1}{2}\pi$ ,  $v_r = 8/x = 2$ ;  $|v| = 2\sqrt{2}$ ;  $\tan r = 1$ ,  $\cos r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,

$$\phi = r. \text{ و } a_r = -1; a_\phi = 0; |a| = 1; \tan \phi = 0, \cos \phi = -1,$$

الحل الثاني :

باستخدام المعادلتين البارامتريتين  $x = 4\theta$ ,  $y = 2\theta^2$  نحصل على :

$$r = 4i\theta + 2j\theta^2$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\theta}. \quad a = -\frac{1}{\theta^3}i \quad \text{و} \quad v_r = 4\theta \frac{d\theta}{dt} = 2 \quad \text{حيث} \quad v = 4i \frac{d\theta}{dt} + 4j\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{\theta}i + 2j.$$

وعند النقطة (4, 2) يكون  $\theta = 1$  وبالتالي :

$$r = \frac{1}{2}\pi. \quad \text{و} \quad v = 2i + 2j; |v| = 2\sqrt{2}; \tan r = 1, \cos r = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\phi = r. \quad \text{و} \quad a = -i; |a| = 1; \tan \phi = 0, \cos \phi = -1,$$

٤ - أوجد مقدار كل من المركبتين المماسية والمعدية لتسارع الحركة  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$  عند أى زمن  $t$  :

$$\begin{aligned} r &= ix + jy = ie^t \cos t + je^t \sin t \\ v &= ie^t (\cos t - \sin t) + je^t (\sin t + \cos t) \\ a &= -2ie^t \sin t + 2je^t \cos t \end{aligned}$$

وبالتالى فإن  $|a_r| = |dv/dt| = \sqrt{2}e^t$ ;  $|a_n| = \sqrt{|a|^2 - a_r^2} = \sqrt{2}e^t$ . و  $|a| = 2e^t$ ;  $ds/dt = |v| = \sqrt{2}e^t$

٥ - يتحرك جسم على القطع المكافئ  $y = x^2$  من اليسار إلى اليمين بسرعة قياسية ثابتة 5. أوجد مقدار كل من المركبتين المماسية والمعدية لتسارع عند النقطة (1, 1).

بما أن السرعة القياسية ثابتة فإن  $|a_r| = |dv/dt| = 0$ . عند النقطة (1, 1) يكون  $y' = 2x = 2$  و  $y'' = 2$ .

$$|a_n| = \frac{|v|^3}{R} = 2\sqrt{5}. \quad \text{فإن} \quad R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \quad \text{هو} \quad (1, 1)$$

٦ - تعطى القوة الطاردة المركزية FN التى يخضع لها جسم كتلته W kg عند نقطة على مساره بالملاقة  $F = W|a_n|$ . أوجد القوة الطاردة المركزية التى يخضع لها جسم kg كتلته 2.5 عند طرفى المحور الكبير وطرفى المحور الصغير للقطع الناقص  $x = 20 \cos t$ ,  $y = 15 \sin t$  الذى يتحرك عليه الجسم ، علما بأن وحدات القياس هى المتر والثانية .

$$\begin{aligned} r &= 20i \cos t + 15j \sin t \\ v &= -20i \sin t + 15j \cos t \\ a &= -20i \cos t - 15j \sin t \end{aligned}$$

$$\frac{ds}{dt} = |v| = \sqrt{400 \sin^2 t + 225 \cos^2 t}, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{175 \sin t \cos t}{\sqrt{400 \sin^2 t + 225 \cos^2 t}}$$

وعند طرفى المحور الكبير حيث  $(t=0)$  أو  $(t=\pi)$  نجد

$$F = (2.5)(20) = 50 \text{ N} \quad \text{و} \quad |a| = 20, |a_r| = |dv/dt| = 0, |a_n| = 20,$$

وعند طرفى المحور الصغير حيث  $(t=\pi/2)$  أو  $(t=3\pi/2)$  نجد :

$$F = (2.5)(15) = 37.5 \text{ N} \quad \text{و} \quad |a| = 15, |a_r| = 0, |a_n| = 15,$$

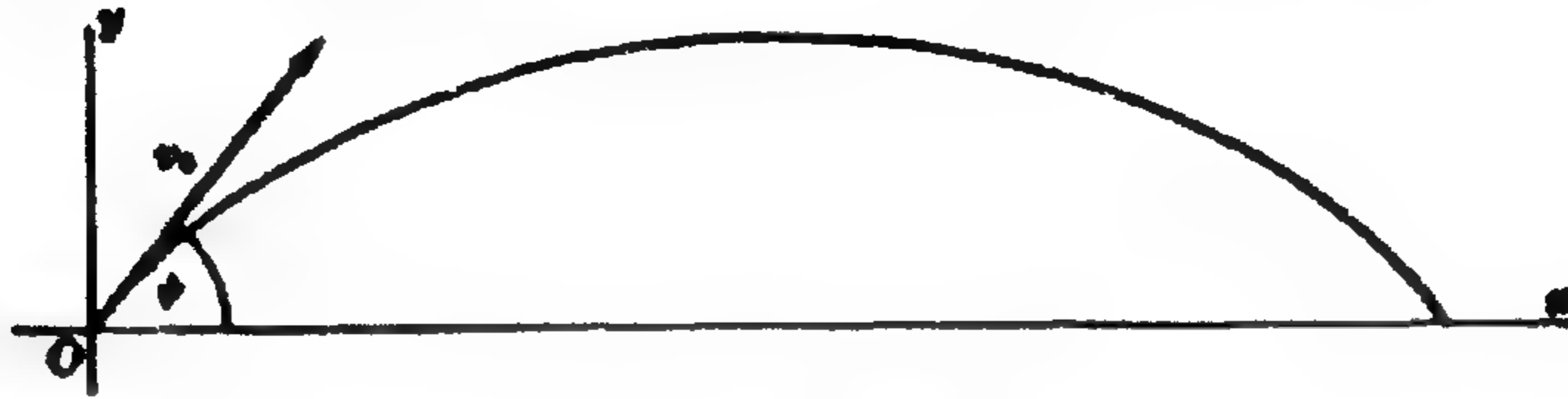


٧- بفرض أن معادلات الحركة لقلبة هي  $x = v_0 t \cos \phi$ ,  $y = v_0 t \sin \phi - \frac{1}{2} g t^2$ , حيث السرعة الابتدائية  $v_0$  و  $\phi$  زاوية القذف وأن  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  وأن  $x$  و  $y$  يقيسان بالأمتار و  $t$  بالثواني أوجد :

(أ) معادلة الحركة في الإحداثيات القائمة .

(ب) المسى (ج) زاوية القذف التي تعطي أكبر مدى ممكن .

(د) السرعة القياسية واتجاه القلبة بعد 5 sec من الانطلاق إذا كان  $v_0 = 150 \text{ ms}^{-1}$  و  $\phi = 45^\circ$ .



شكل ١٩ - ٥

(أ) بحل المعادلة الأولى نجد  $t = \frac{x}{v_0 \cos \phi}$  وبالتعويض في الثانية نحصل على :

$$y = v_0 \left( \frac{x}{v_0 \cos \phi} \right) \sin \phi - \frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_0 \cos \phi} \right)^2 = x \tan \phi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \phi}$$

(ب) عندما  $y = v_0 t \sin \phi - \frac{1}{2} g t^2 = 0$ , يكون  $t = 0$  و  $t = (2 v_0 \sin \phi) / g$ .

وعندما  $t = \frac{2 v_0 \sin \phi}{g}$ , يكون المدى مساريًا  $x = v_0 \cos \phi \left( \frac{2 v_0 \sin \phi}{g} \right) = \frac{v_0^2 \sin 2\phi}{g}$ .

(ج) عندما تكون  $x$  نهاية المدى ينبغي أن يكون  $\frac{dx}{d\phi} = \frac{2 v_0^2 \cos 2\phi}{g} = 0$ ,  $\cos 2\phi = 0$ ,  $2\phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi = \frac{\pi}{4}$ .

(د) عندما  $v_0 = 150$  و  $\phi = \frac{\pi}{4}$  نجد  $x = 75\sqrt{2}t$  و  $y = 75\sqrt{2}t - 4.9t^2$  وبالتالى فإن :

$$v_x = 75\sqrt{2} \quad \text{و} \quad v_y = 75\sqrt{2} - 9.8t$$

وعندما  $t = 5$  : نجد  $v_x = 75\sqrt{2}$  و  $v_y = 75\sqrt{2} - 49$  وبالتالى فإن

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 120 \text{ ms}^{-1} \quad \text{و} \quad \tan \tau = v_y / v_x = 0.538, \quad \tau = 28^\circ 17'$$

٨- كمحرك نقطة  $P$  على دائرة  $x = r \cos \beta$ ,  $y = r \sin \beta$  بسرعة زاوية ثابتة  $\omega$ . بين أنه إذا كان نصف القطر المحب

إلى  $P$  يتحرك بسرعة زاوية  $\omega$  وتقاطع زاوى  $\alpha$  فإن (أ)  $v = r\omega$  و (ب)  $a = r\omega^2$ .

$$v_x = r \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{dt} = r \cos \beta \cdot \omega \quad \text{و} \quad v_y = -r \sin \beta \cdot \frac{d\beta}{dt} = -r \sin \beta \cdot \omega \quad (1)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(r^2 \sin^2 \beta + r^2 \cos^2 \beta) \omega^2} = r\omega$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega \sin \beta \cdot \frac{d\beta}{dt} - r \sin \beta \cdot \frac{d\omega}{dt} = -r\omega^2 \sin \beta - r \sin \beta \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad (ب)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -r\omega \cos \beta \cdot \frac{d\beta}{dt} + r \cos \beta \cdot \frac{d\omega}{dt} = -r\omega^2 \cos \beta + r \cos \beta \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$$a = r\sqrt{\omega^4 + \frac{d\omega^2}{dt^2}} \quad \text{و} \quad a^2 = a_x^2 + a_y^2 = r^2(\omega^4 + \frac{d\omega^2}{dt^2})$$

### مسائل إضافية

٩ - أوجد مقدار واتجاه كل من السرعة والتسارع لما يل :

$$(أ) \quad t=0 \quad \text{عندما} \quad x = e^t, \quad y = e^{2t} - 4e^t + 3$$

$$(ب) \quad t=1 \quad \text{عندما} \quad x = 2-t, \quad y = 2t^2 - t$$

$$(ج) \quad t = \frac{1}{2}\pi \quad \text{عندما} \quad x = \cos 3t, \quad y = \sin t$$

$$(د) \quad t=0 \quad \text{عندما} \quad x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t$$

$$ج : (أ) \quad |v| = \sqrt{5}, \quad r = 290^\circ 34'; \quad |a| = 1, \quad \phi = 0$$

$$(ب) \quad |v| = \sqrt{25}, \quad r = 101^\circ 19'; \quad |a| = 12, \quad \phi = \frac{1}{2}\pi$$

$$(ج) \quad |v| = \sqrt{5}, \quad r = 161^\circ 34'; \quad |a| = \sqrt{41}, \quad \phi = 353^\circ 40'$$

$$(د) \quad |v| = \sqrt{2}, \quad r = \frac{1}{2}\pi; \quad |a| = 2, \quad \phi = \frac{1}{2}\pi$$

١٠ - يتحرك جسم على قوس القطع المكافئ  $y = 12x^2$  الواقع في الربع الأول بحيث يكون  $v_x = 15$ . أوجد  $v_y, |v|, r; a_x, a_y, |a|, \phi$  عند  $(3, 6)$

$$ج : \quad v_x = 15, \quad |v| = 15\sqrt{2}, \quad r = \frac{1}{2}\pi; \quad a_x = 0, \quad a_y = -75/2, \quad |a| = 75/2, \quad \phi = 3\pi/2$$

١١ - يتحرك جسم على المنحنى  $y = x^3/3$  بحيث يكون  $v_x = 2$  هنا كان الزمن .

أوجد مقدار واتجاه كل من السرعة والتسارع عندما  $x = 3$  .

$$ج : \quad |v| = 2\sqrt{82}, \quad r = 83^\circ 40'; \quad |a| = 24, \quad \phi = \frac{1}{2}\pi$$

١٢ - يدور جسم على دائرة نصف قطرها 6 m بسرعة قياسية ثابتة 4 m/sec . عين مقدار تسارعه في أى موضع .

$$ج : \quad |a_t| = 0, \quad |a_n| = |a| = 8/3 \text{ ms}^{-2}$$

١٣ - أوجد مقدار واتجاه السرعة والتسارع ومقدار مركبتي التسارع المماسية والمعدنية للمركبتين التاليتين :

$$(أ) \quad t=2 \quad \text{عندما} \quad x = 3t, \quad y = 9t - 3t^2$$

$$(ب) \quad t=1 \quad \text{عندما} \quad x = \cos t + t \sin t, \quad y = \sin t - t \cos t$$

$$ج : (أ) \quad |v| = 3\sqrt{2}, \quad r = 7\pi/4; \quad |a| = 6, \quad \phi = 3\pi/2; \quad |a_t| = |a_n| = 3\sqrt{2}$$

$$(ب) \quad |v| = 1, \quad r = 1; \quad |a| = \sqrt{2}, \quad \phi = 102^\circ 18'; \quad |a_t| = |a_n| = 1$$

١٤ - يتحرك جسم على المنحنى  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$  بحيث يكون  $x = \frac{1}{2}e^t, t > 0$ . أوجد  $v_x, v_y, |v|, r; a_x, a_y, |a|, \phi; |a_t|$  عندما  $t = 1$  .

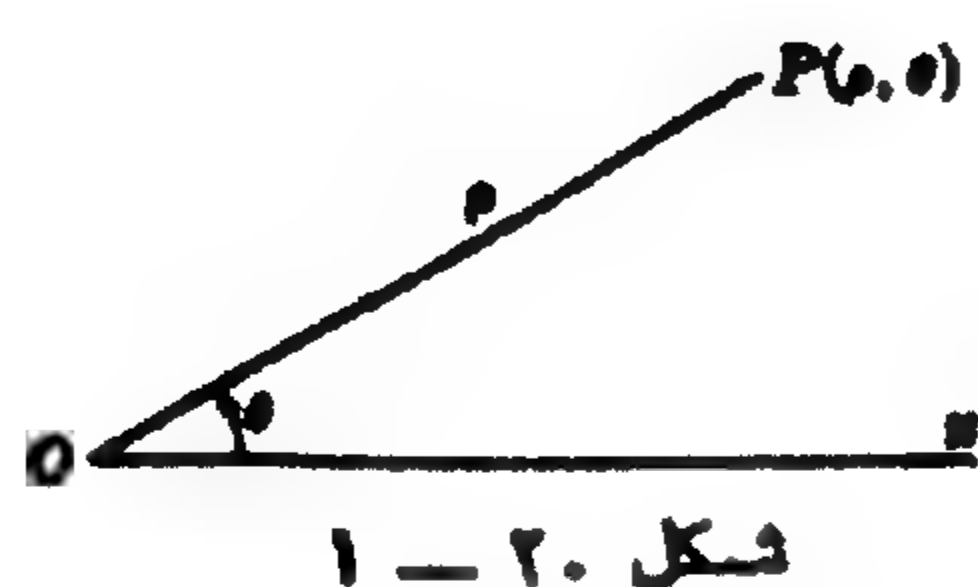
$$ج : \quad v_x = 1, \quad v_y = 0, \quad |v| = 1, \quad r = 0; \quad a_x = 1, \quad a_y = 2, \quad |a| = \sqrt{5}, \quad \phi = 63^\circ 26'; \quad |a_t| = 1, \quad |a_n| = 2$$

١٥ - يتحرك جسم على المسار  $y = 2x - x^2$  بحيث يكون  $v_x = 4$  دائما . أوجد مقدار مركبتي التسارع المماسية والمعدنية عند الموضع (أ) (1, 1) و (ب) (2, 0) .

$$ج : (أ) \quad |a_t| = 0, \quad |a_n| = 32; \quad (ب) \quad |a_t| = 64/\sqrt{5}, \quad |a_n| = 32/\sqrt{5}$$

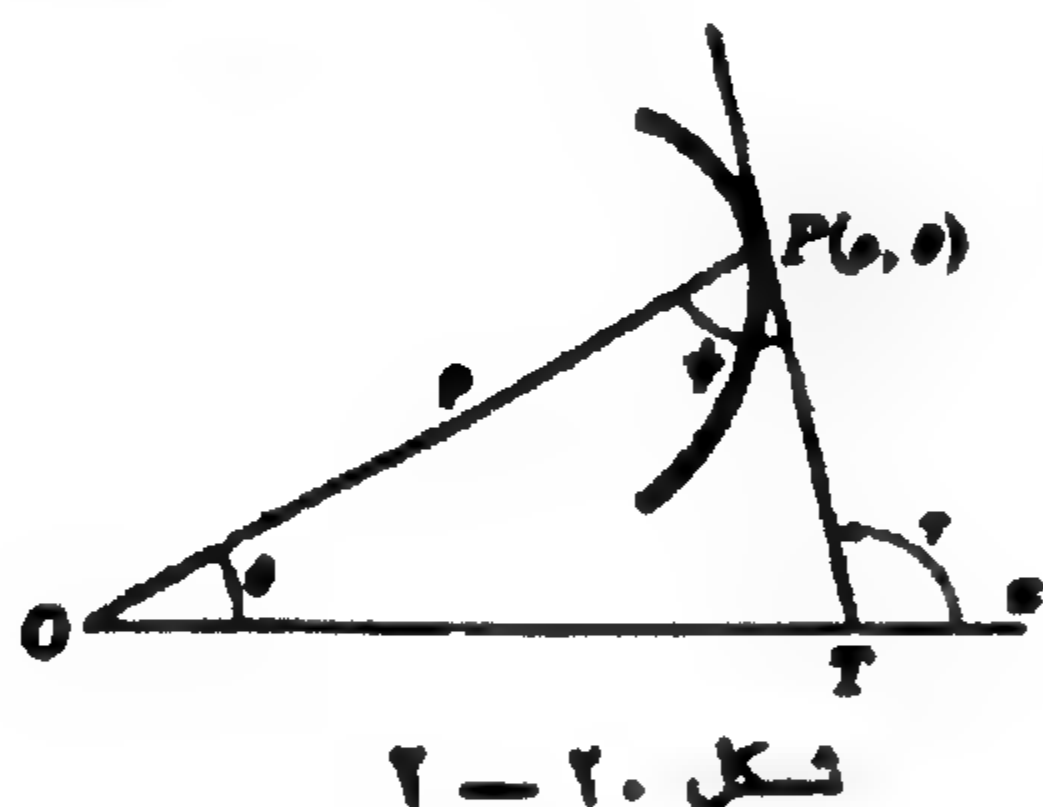
# الفصل العشرون

## الإحداثيات القطبية



يمكن تعيين موضع نقطة  $P$  في مستوى مفروض بالنسبة إلى نقطة ثابتة  $O$  من هذا المستوى ، بمسقط المتجه  $OP$  على محورين متعامدين في المستوى ولما بين  $O$  . وهذه مجزئهما ، هي مجموعة الإحداثيات القائمة . ويمكن تعيين موضع النقطة بطريقة أخرى وذلك بواسطة المسافة الموجبة  $p = OP$  والزاوية  $\theta$  التي يصنعها  $OP$  مع نصف المستقيم الثابت  $OX$  المار بـ  $O$  . وهذه هي مجموعة الإحداثيات القطبية .

ويقابل كل زوج عددي  $(p, \theta)$  نقطة ونقطة واحدة فقط . لكن العكس ليس صحيحا : فثلا النقطة  $P$  في الشكل يمكن أن تتعين بـ  $(p, \theta \pm 2n\pi)$  و  $(-p, \theta \pm (2n+1)\pi)$  ، حيث  $n$  أي عدد صحيح موجب بما في ذلك الصفر . ويمكن بوجه خاص أن تمثل الإحداثيات القطبية القطب بـ  $(0, \theta)$  حيث  $\theta$  اختيارية تماما . ويتكون المنحنى الذي صادك في الإحداثيات القطبية هي  $p = f(\theta)$  أو  $p = 0$  من جميع النقط المنقطنة  $(p, \theta)$  التي تحقق هذه المعادلة .



وتعطي الزاوية  $\psi$  المصورة بين نصف القطر المتجه  $OP$  والمماس للمنحنى  $PT$  عند النقطة  $P(p, \theta)$  بالمللة

$$\tan \psi = p \frac{d\theta}{dp} = \frac{p}{p'}$$

ويلعب ظل الزاوية  $\psi$  في الإحداثيات القطبية دورا مشابها نوما لما للزوايا ميل المماس في الإحداثيات القائمة .

أنظر المثال ١ - ٢

تعطي زاوية الميل  $\tau$  لمماس المنحنى عند نقطة  $P(p, \theta)$  بالمللة

$$\tan \tau = \frac{p \cos \theta + p' \sin \theta}{-p \sin \theta + p' \cos \theta}$$

أنظر المثال ٤ - ١٠

ونقطة التقاطع لمنحنين صادتهما معا :

$$p = f_1(\theta) \quad \text{و} \quad p = f_2(\theta)$$

يمكن إيجادها بحل المعادلة :

$$f_1(\theta) = f_2(\theta) \quad (1)$$

### مثال ١ :

أوجد نقط تقاطع  $\rho = 1 + \sin \theta$  و  $\rho = 5 - 3 \sin \theta$  .  
 نضع  $\sin \theta = 1$  فنحصل على  $1 + \sin \theta = 5 - 3 \sin \theta$  ، وبالتالي  $\theta = \frac{1}{2} \pi$  ومنه تكون النقطة  $(2, \frac{1}{2} \pi)$  هي نقطة التقاطع الوحيدة .  
 عندما يكون القطب أحد نقط التقاطع ، فن الممكن أن لا يظهر بين حلول المعادلة (١) ويكون القطب أحد نقط التقاطع إذا استطعنا أن نجد قيميا لـ  $\theta$  مثل  $\theta_1$  و  $\theta_2$  بحيث يكون  $f_1(\theta_1) = 0$  و  $f_2(\theta_2) = 0$  .

### مثال ٢ :

أوجد نقط تقاطع  $\rho = \sin \theta$  و  $\rho = \cos \theta$  .  
 من المعادلة : (١)  $\sin \theta = \cos \theta$   
 نحصل على نقطة التقاطع  $(\frac{1}{2} \sqrt{2}, \frac{1}{4} \pi)$  . ولكن المنحنين هما دائرتان مارتان بالقطب وهو نقطة تقاطع ، ولكن لا يمكن الحصول عليه من (١) لأن له على المنحنى  $\rho = \sin \theta$  الإحداثيان  $(0,0)$  وعلى المنحنى  $\rho = \cos \theta$  الإحداثيان  $(0, \frac{1}{2} \pi)$  .

### مثال ٣ :

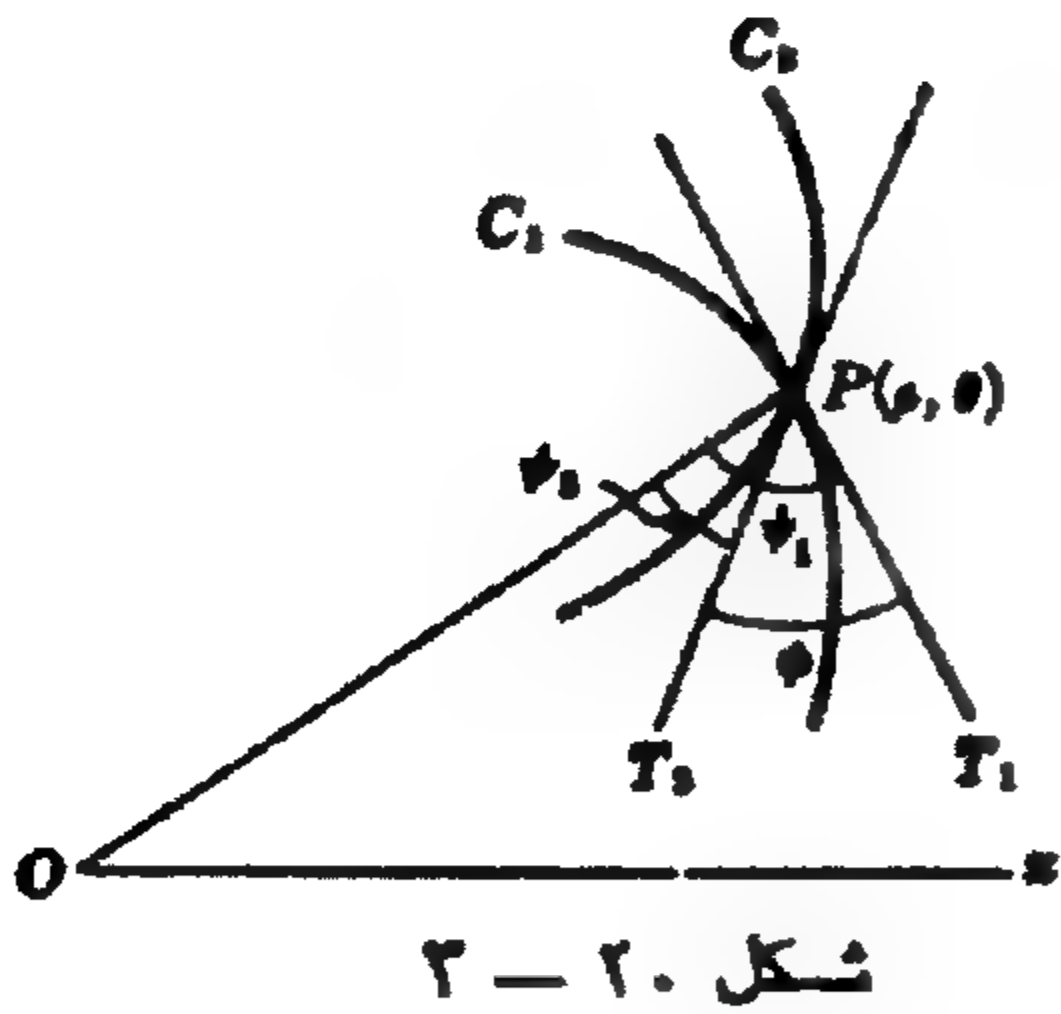
أوجد نقط تقاطع  $\rho = \cos \theta$  و  $\rho = \cos 2\theta$  .  
 نضع  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = \cos \theta$  ، نجد أن  $(\cos \theta - 1)(2 \cos \theta + 1) = 0$  .  
 ومنه نجد  $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$  . وبالتالي فإن نقط التقاطع هي  $(1,0), (-\frac{1}{2}, 2\pi/3), (-\frac{1}{2}, 4\pi/3)$  .  
 والقطب هو نقطة تقاطع أيضا .

تعطى زاوية التقاطع :  $\phi$  لمنحنين عند نقطة مشتركة  $P(\rho, \theta)$  ،  
 ليست القطب ، بالمعادلة :

$$\tan \phi = \frac{\tan \psi_1 - \tan \psi_2}{1 + \tan \psi_1 \tan \psi_2}$$

حيث  $\psi_1$  و  $\psi_2$  هما زاويتا نصف القطر المتجه  $OP$  مع المماسين الخاصين  
 بهما على المنحنين عند النقطة  $P$  .

والطريقة هنا ماثلة لتلك التي وردت في حالة المنحنيات المغطاة بالإحداثيات  
 القائمة ، ونستخدم خلال الزوايا بين نصف القطر المتجه والمماس بدلا من  
 ميل المماسات وذلك لسهولة الحسابات .



### مثال ٤ :

أوجد زاوية التقاطع (الحادة) بين  $\rho = \cos \theta$  و  $\rho = \cos 2\theta$  .  
 لقد وجدنا نقط التقاطع في المثال ٣ .  
 عند القطب : يطل القطب على المنحنى  $\rho = \cos \theta$  بـ  $\theta = \frac{1}{2} \pi$  ويطل على المنحنى  $\rho = \cos 2\theta$  بـ  $\theta = \pi/4$  .  
 و  $\theta = 3\pi/4$  ، إذن يوجد عند القطب نقطتا تقاطع والزاوية الحادة لكل منهما تساوي  $\frac{1}{4} \pi$  .

$$\begin{array}{ll} \text{ولمبنى} & \rho = \cos \theta \\ \text{نجد} & \tan \psi_1 = -\cot \theta \\ \text{وأما للمبنى} & \rho = \cos 2\theta \\ \text{نجد} & \tan \psi_2 = -\frac{1}{2} \cot 2\theta \end{array}$$

وعند النقطة (1,0) يكون  $\tan \psi_1 = -\cot 0 = \infty$  و  $\tan \psi_2 = \infty$  وبالتالي فإن  $\psi_1 = \psi_2 = \frac{1}{2}\pi$  و  $\phi = 0$ .  
وعند النقطة  $(-\frac{1}{2}, 2\pi/3)$  يكون  $\tan \psi_1 = \sqrt{3}/3$  و  $\tan \psi_2 = -\sqrt{3}/6$ .  
إذن  $\tan \phi = \frac{\sqrt{3}/3 + \sqrt{3}/6}{1 - 1/6} = 3\sqrt{3}/5$  و زاوية التقاطع الحادة هي  $\phi = 46^\circ 6'$ .  
وهذه بسبب التناظر، هي أيضا زاوية التقاطع الحادة عند النقطة  $(-\frac{1}{2}, 4\pi/3)$ .

أنظر المسائل ١١ - ١٢

يعطى اشتقاق طول القوس :  $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}$  حيث  $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$  مع احتبار أن  $\theta$  تزداد بزيادة  $\theta$ .

أنظر المسائل ١٤ - ١٦

$$K = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}} : \text{ ويعطى اتجاه منحنى } \rho$$

أنظر المسائل ١٧ - ١٩

**الحركة الخطية الانحنائية :** نفرض أن جسم  $P$  يتحرك على منحنى معادله بالاحداثيات القطبية هي  $\rho = f(\theta)$  فإذا استعنا بالتمثيل البارامترى للمبنى :

$$x = \rho \cos \theta = g(\theta), \quad y = \rho \sin \theta = h(\theta)$$

نجد أن متجه الموضع للنقطة  $P$  هو :

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \rho\mathbf{i} \cos \theta + \rho\mathbf{j} \sin \theta = \rho(\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta)$$

ومنثله يمكن دراسة الحركة كافي الفصل ١٩.

وهناك طريقة بديلة وهي أن نعتبر عن  $\mathbf{r}$  وبالتالي عن  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{a}$  بدلالة اتجاهات وحدة على المستقيم العمودي على نصف القطر المتجه للنقطة  $P$ . ولهذا نفرض فإننا نعرف متجه الوحدة :

$$\mathbf{u}_\rho = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta$$

على المتجه  $\mathbf{r}$  وفي اتجاه تزايد  $\rho$  ونعرف متجه الوحدة :

$$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta$$

العمودي على  $\mathbf{r}$  وفي اتجاه تزايد  $\theta$ . ويمكن بحسابات بسيطة الحصول على

$$\frac{d\mathbf{u}_\rho}{dt} = -\mathbf{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{u}_\rho \frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho \quad \text{ومن}$$

ونحصل من المسألة ٢٠ على :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho \mathbf{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} = v_\rho \mathbf{u}_\rho + v_\theta \mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_\rho \left[ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \mathbf{u}_\theta \left[ \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right]$$

$$= a_\rho \mathbf{u}_\rho + a_\theta \mathbf{u}_\theta$$



ونجد ما آر  $v_\theta = p \frac{d\theta}{dt}$  ،  $v_\rho = \frac{dp}{dt}$  ،  $v_\theta = p \frac{d\theta}{dt}$  في اتجاه نصف القطر المتجه والعمودى عليه على الترتيب  
 $a_\theta = p \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dp}{dt} \frac{d\theta}{dt}$  ،  $a_\rho = \frac{d^2p}{dt^2} - p \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  هما مركبتا  $a$  المقابلتان .  
 أنظر المسألة ٢١

### مسائل محلولة

١ - برهن أن  $\tan \psi = p \frac{d\theta}{dp}$  حيث  $\psi$  هي الزاوية المقاسة من نصف القطر المتجه  $OP$  للنقطة  $P(p, \theta)$  على المنحنى الذى يعادله  $p = f(\theta)$  إلى المماس  $PT$  .

في الشكل ٢٠ - النقطة  $Q(p + \Delta p, \theta + \Delta \theta)$  هي نقطة على المنحنى وقريبة من  $P$  ونجد من المثلث القائم  $PSQ$  أن

$$\tan \lambda = \frac{SP}{SQ} = \frac{SP}{OQ - OS} = \frac{p \sin \Delta \theta}{p + \Delta p - p \cos \Delta \theta}$$

$$= \frac{p \sin \Delta \theta}{p(1 - \cos \Delta \theta) + \Delta p} = \frac{p \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta \theta}}{p \frac{1 - \cos \Delta \theta}{\Delta \theta} + \frac{\Delta p}{\Delta \theta}}$$

وإذا آلت النقطة  $Q$  إلى  $P$  على المنحنى فإن

$$\Delta \theta \rightarrow 0, OQ \rightarrow OP, PQ \rightarrow PT, \angle \lambda \rightarrow \angle \psi$$

$$\frac{\sin \Delta \theta}{\Delta \theta} \rightarrow 1 \quad \frac{1 - \cos \Delta \theta}{\Delta \theta} \rightarrow 0 \quad \text{فإن } \Delta \theta \rightarrow 0$$

(أنظر الفصل ١٢)

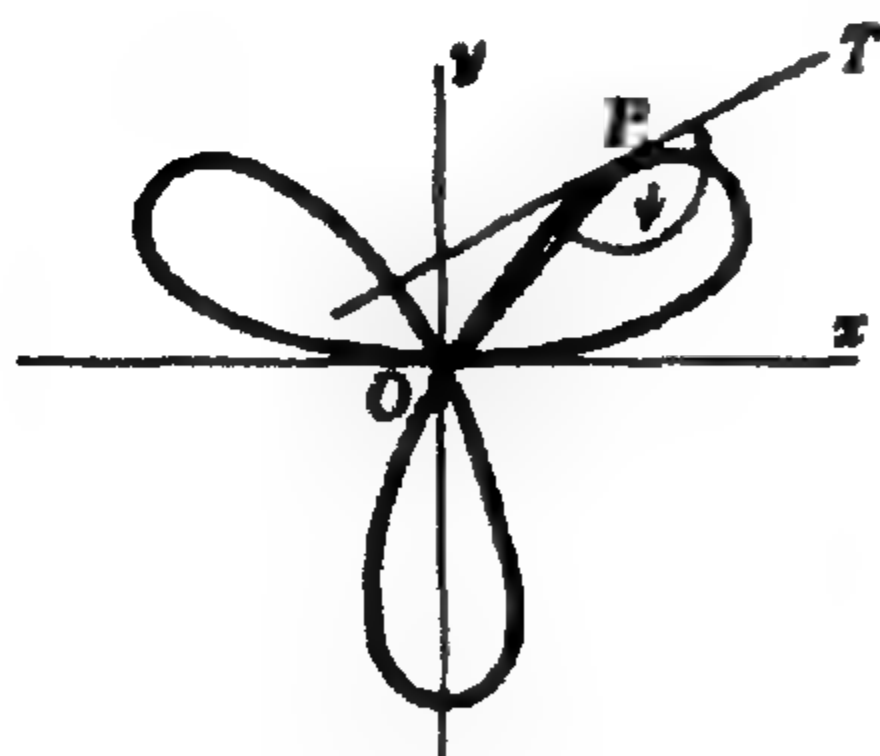
$$\tan \psi = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \tan \lambda = \frac{p}{dp/d\theta} = p \frac{d\theta}{dp}$$

أوجد في المسألتين ٢ - ٣ ،  $\tan \psi$  للمنحنيات المذكورة وعند النقطة المذكورة .

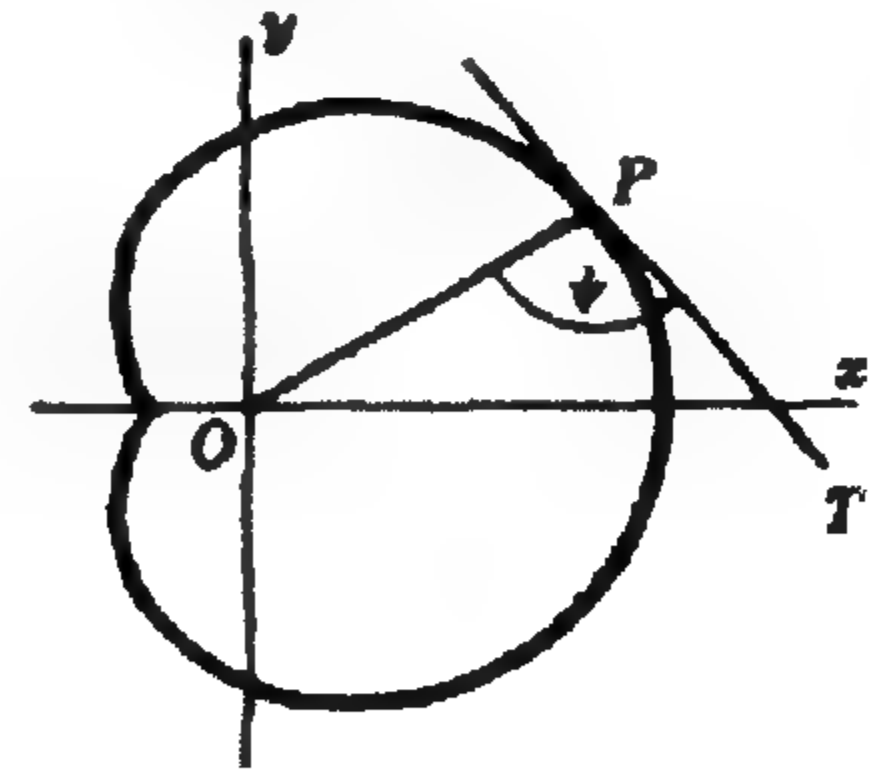
$$p = 2 + \cos \theta, \theta = \pi/3. \quad - \quad ٢$$

(أنظر الشكل ٢٠ - ١)

$$\tan \psi = p/p' = -5/\sqrt{3}, \quad p = 2 + \frac{1}{2} = 5/2, \quad p' = -\sin \theta = -\sqrt{3}/2, \quad \theta = \pi/3 \text{ يكون}$$



شكل ٢٠ - ٧



شكل ٢٠ - ٦

$$p = 2 \sin 3\theta; \theta = \pi/4. \quad - \quad ٣$$

أنظر الشكل ٢٠ - ٧

وعند  $\theta = \pi/4$  يكون

$$p = 2(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \quad p' = 6 \cos 3\theta = 6(-1/\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}, \quad \tan \psi = p/p' = -1/3.$$

$$\tan \tau = \frac{\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta}{-\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta} \quad ٤ - \text{ برهن أن}$$

نلاحظ من شكل المسألة ١ أن  $\tau = \psi + \theta$  ومنه :

$$\begin{aligned} \tan \tau = \tan(\psi + \theta) &= \frac{\tan \psi + \tan \theta}{1 - \tan \psi \tan \theta} = \frac{\rho \frac{d\theta}{d\rho} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 - \rho \frac{d\theta}{d\rho} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{\rho \cos \theta + \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta}{\frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta} = \frac{\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta}{-\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta} \end{aligned}$$

٥ - بين أنه إذا مر المنحنى  $\rho = f(\theta)$  بالقطب وكانت  $\theta_1$  تحقق العلاقة  $f(\theta_1) = 0$  فإن اتجاه المماس للمنحنى عند القطب  $(0, \theta_1)$  هو  $\theta_1$ .

عند  $(0, \theta_1)$  يكون  $\rho = 0$  و  $\rho' = f'(\theta_1)$ .

$$\begin{aligned} \tan \tau &= \frac{\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta}{-\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta} \\ &= \frac{0 + \sin \theta_1 \cdot f'(\theta_1)}{0 + \cos \theta_1 \cdot f'(\theta_1)} = \tan \theta_1 \end{aligned}$$

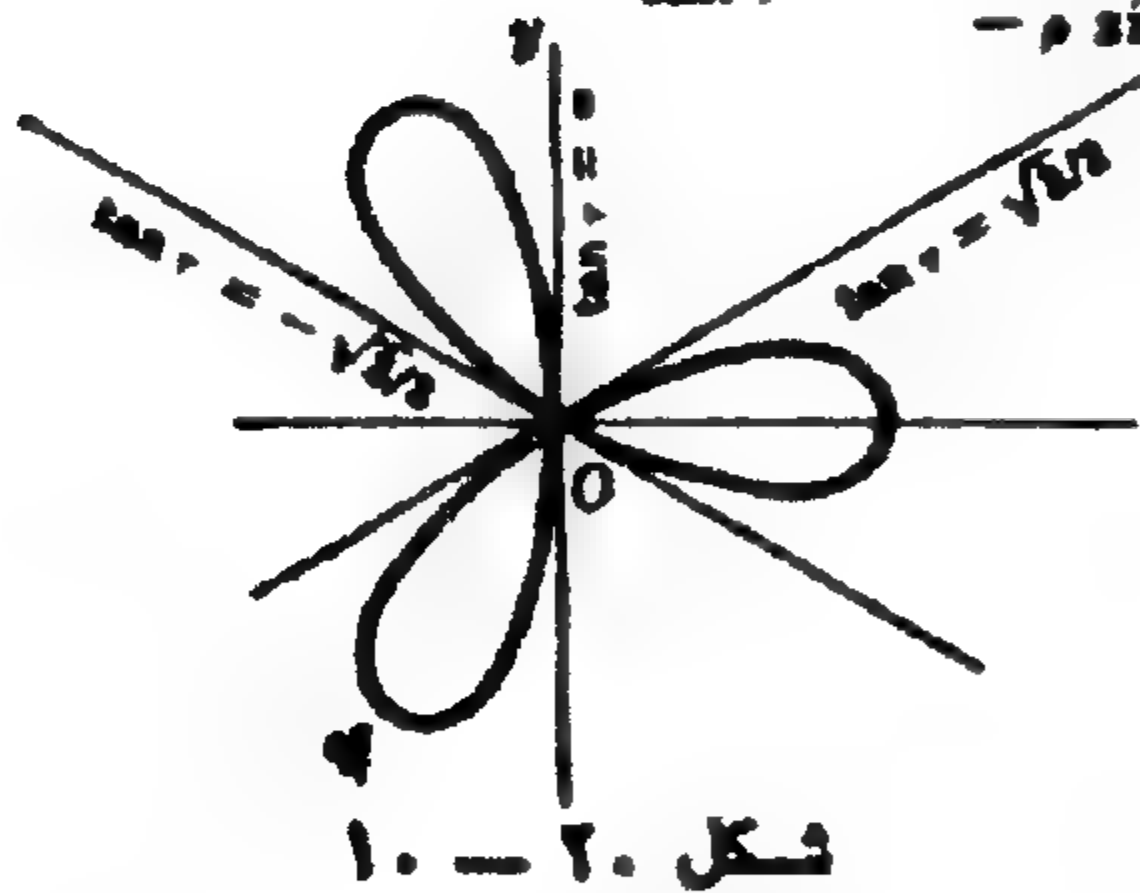
$$\tan \tau = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1} \frac{\sin \theta \cdot f'(\theta)}{\cos \theta \cdot f'(\theta)} = \tan \theta_1 \quad \text{نجد أن } \rho' = 0 \text{ وإذا كان}$$

في المسائل ٦ - ٨ أوجد ميل المنحنى المفروض عند النقطة المفروضة.

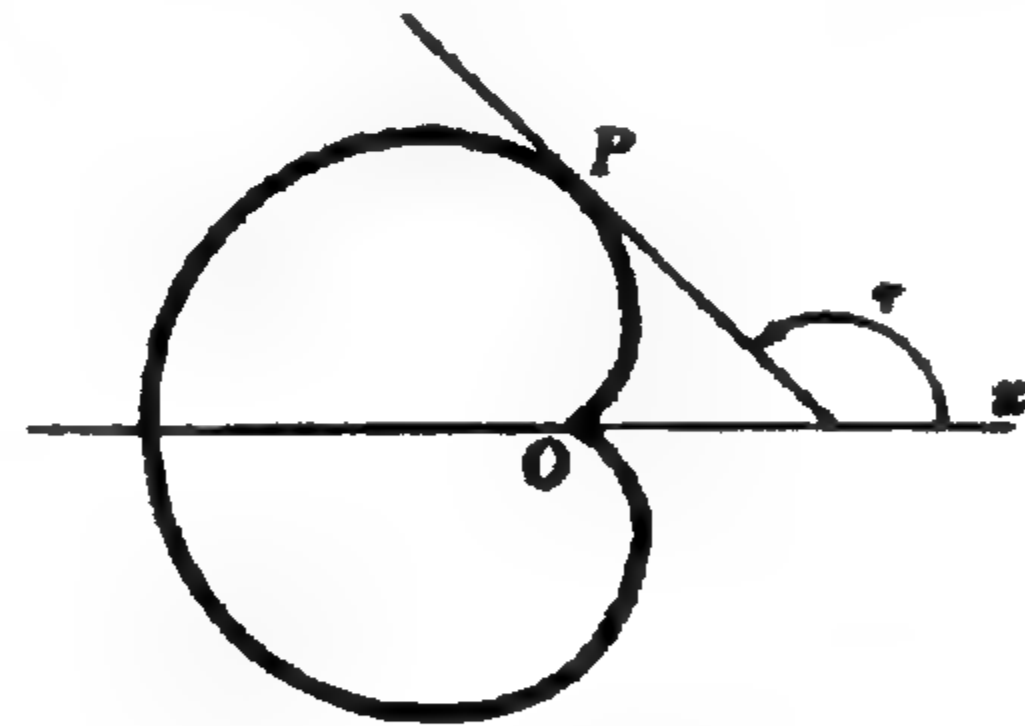
$$٦ - \rho = 1 - \cos \theta \text{ عند } \theta = \frac{1}{2}\pi \quad \text{أنظر الشكل ٢٠ - ١}$$

$$\text{عند } \theta = \frac{1}{2}\pi \text{ يكون } \sin \theta = 1, \cos \theta = 0, \rho = 1, \rho' = \sin \theta = 1,$$

$$\text{وبالتالي} \quad \tan \tau = \frac{\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta}{-\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta} = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{-1 \cdot 1 + 1 \cdot 0} = -1$$



شكل ٢٠ - ١



شكل ٢٠ - ٢

$$٧ - \rho = \cos 3\theta \text{ عند القطب. أنظر الشكل ٢٠ - ١٠}$$

معنا  $\rho = 0$  فإن  $\cos 3\theta = 0$ . وبالتالي  $3\theta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$  ومنه  $\theta = \pi/6, \pi/2, 5\pi/6$ .

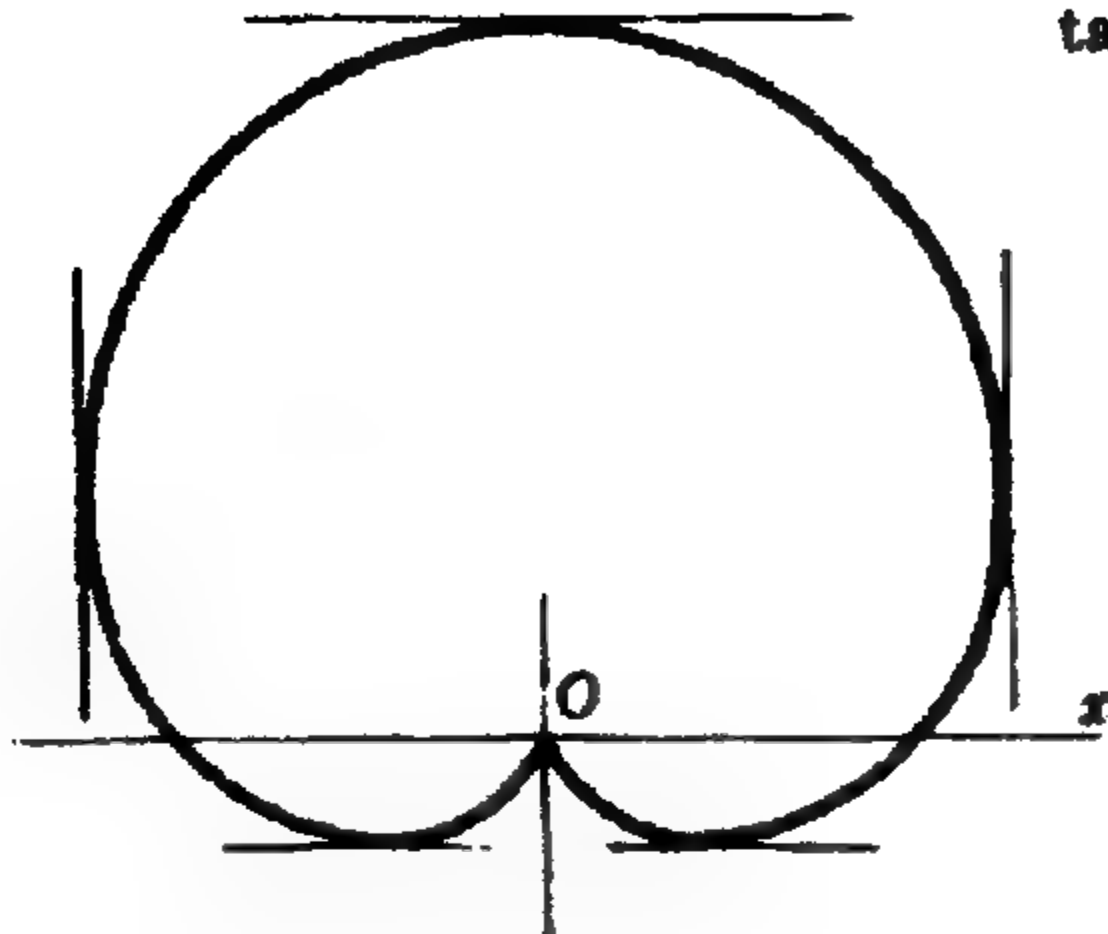
وحسب المسألة ٥ يكون :  $\tan \tau = 1/\sqrt{3}, \infty, -1/\sqrt{3}$ .

$$٨ - \rho = e - \theta \text{ عند } \theta = \pi/3.$$

$$\text{عند } \theta = \pi/3 \text{ يكون } \sin \theta = \sqrt{3}/2, \cos \theta = \frac{1}{2}, \rho = 2e/\pi, \rho' = -1/\pi = -\theta/\pi^2 = -\theta\pi/\pi^3.$$

$$\tan \tau = \frac{\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta}{-\rho \sin \theta + \rho' \cos \theta} = -\frac{\pi - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\pi + 3} \quad \text{إذن}$$

٩ - ابحث في المماسات الأفقية والرأسية للمنحنى  $\rho = 1 + \sin \theta$ .



شكل ٢٠ - ١١

$$\tan \tau = \frac{(1 + \sin \theta) \cos \theta + \cos \theta \sin \theta}{-(1 + \sin \theta) \sin \theta + \cos^2 \theta} \quad \text{عند } P(\rho, \theta) \text{ يكون}$$

$$= -\frac{\cos \theta (1 + 2 \sin \theta)}{(\sin \theta + 1)(2 \sin \theta - 1)}$$

(١) بوضع  $\cos \theta (1 + 2 \sin \theta) = 0$  نجد أن :

$$\theta = \pi/2, 3\pi/2, 7\pi/6, \text{ and } 11\pi/6.$$

وبوضع  $(\sin \theta + 1)(2 \sin \theta - 1) = 0$  نجد أن :

$$\theta = 3\pi/2, \pi/6, \text{ و } 5\pi/6.$$

(ب) عندما  $\theta = \pi/2$  يوجد مماس أفقي عند  $(2, \pi/2)$

وعندما  $\theta = 7\pi/6$  و  $\theta = 11\pi/6$  يوجد مماسان أفقيان

عند  $(\frac{1}{2}, 7\pi/6)$  و  $(\frac{1}{2}, 11\pi/6)$ .

وعندما  $\theta = \pi/6$  و  $\theta = 5\pi/6$  يوجد مماسان رأسيان عند  $(\frac{3}{2}, \pi/6)$  و  $(\frac{3}{2}, 5\pi/6)$ .

وعندما  $\theta = 3\pi/2$  يوجد استناداً إلى المسألة ٥ مماس رأسي عند القطب.

١٠ - بين أن الزاوية التي يصنعها نصف القطر المتجه لأية نقطة على منحنى القلب  $\rho = a(1 - \cos \theta)$  (الكارديويد)

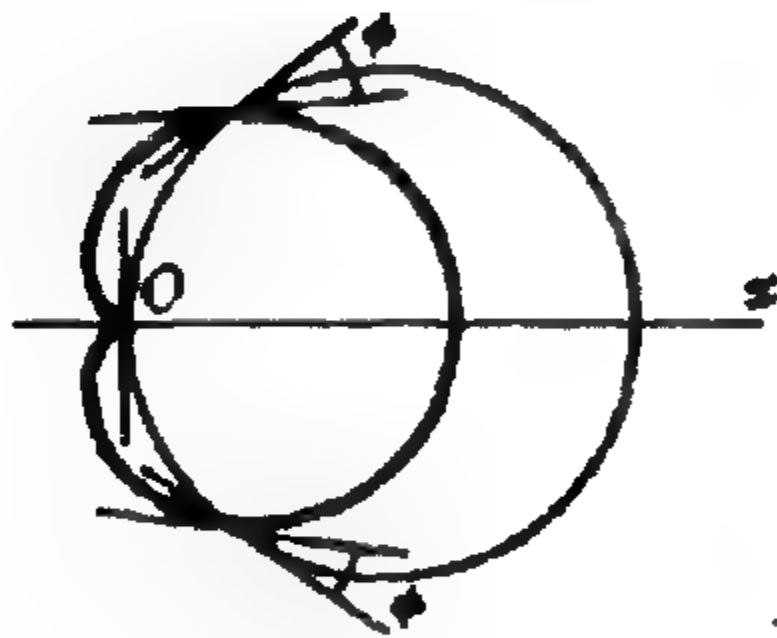
مع المنحنى تساوى نصف الزاوية التي يصنعها نصف القطر المتجه مع المحور القطبي.

عند أية نقطة  $P(\rho, \theta)$  من المنحنى لدينا :

$$\rho' = a \sin \theta, \quad \tan \psi = \rho/\rho' = (1 - \cos \theta)/\sin \theta = \tan \frac{1}{2}\theta \quad \text{or } \psi = \frac{1}{2}\theta$$

في المسائل ١١ - ١٣ أوجد زوايا التقاطع لكل زوج من المنحنيات :

$$\rho = 3 \cos \theta, \quad \rho = 1 + \cos \theta. \quad - ١١$$



شكل ٢٠ - ١٢

(١) بحل  $3 \cos \theta = 1 + \cos \theta$  نحصل على نقطتي التقاطع

$(\frac{3}{2}, \pi/3)$  و  $(\frac{3}{2}, 5\pi/3)$  والمنحنيان يتقاطعان أيضاً عند القطب.

(ب) للمنحنى  $\rho = 3 \cos \theta$  يكون  $\rho' = -3 \sin \theta$  و  $\tan \psi_1 = -\cot \theta$

والمنحنى  $\rho = 1 + \cos \theta$  يكون  $\rho' = -\sin \theta$

$$\tan \psi_2 = -\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{و}$$

(ج) عندما  $\theta = \pi/3$  فإن  $\tan \psi_1 = -1/\sqrt{3}$ ,  $\tan \psi_2 = -\sqrt{3}$ .

وبالتالي  $\tan \phi = 1/\sqrt{3}$ .

وزاوية التقاطع الحادة عند  $(\frac{3}{2}, \pi/3)$  وعند  $(\frac{3}{2}, 5\pi/3)$  بالتأكل هي  $\pi/6$ .

يجد من الشكل أو بالاستفادة من نتيجة المسألة ٥ ، أن المنحنيين متعامدان عند القطب.

$$\rho = \sec^2 \frac{1}{2}\theta, \quad \rho = 3 \csc^2 \frac{1}{2}\theta. \quad - ١٢$$

(١) بحل  $\sec^2 \frac{1}{2}\theta = 3 \csc^2 \frac{1}{2}\theta$  نحصل على نقطتي التقاطع  $(4, 2\pi/3)$  و  $(4, 4\pi/3)$ .

(ب) للمنحنى  $\rho = \sec^2 \frac{1}{2}\theta$  يكون  $\rho' = \sec^2 \frac{1}{2}\theta \tan \frac{1}{2}\theta$  و  $\tan \psi_1 = \cot \frac{1}{2}\theta$ .

والمنحنى  $\rho = 3 \csc^2 \frac{1}{2}\theta$  يكون  $\rho' = -3 \csc^2 \frac{1}{2}\theta \cot \frac{1}{2}\theta$  و  $\tan \psi_2 = -\tan \frac{1}{2}\theta$ .

(ج) عند  $\theta = 2\pi/3$  يكون  $\tan \psi_1 = 1/\sqrt{3}$ ,  $\tan \psi_2 = -\sqrt{3}$  ومنه  $\phi = \frac{1}{2}\pi$  والمنحنيان متعامدان.

$$p = \sin 2\theta, \quad p' = \cos 2\theta. \quad - 12$$

(أ) المنحنيان يتقاطعان عند  $(\sqrt{3}/2, \pi/6)$ ,  $(-\sqrt{3}/2, 5\pi/6)$  وعند القطب.

(ب) المنحني  $p = \sin 2\theta$  يكون  $p' = 2 \cos 2\theta$  و  $\tan \phi_1 = \frac{1}{2} \tan 2\theta$ .

والمنحني  $p = \cos \theta$  يكون  $p' = -\sin \theta$  و  $\tan \phi_2 = -\cot \theta$ .

(ج) عند  $\theta = \pi/6$  يكون  $\tan \phi_1 = \sqrt{3}/2$ ,  $\tan \phi_2 = -\sqrt{3}$  ومنه  $\tan \phi = -3\sqrt{3}$  وبالتالي فإن زاوية

التقاطع الحادة عند  $(\sqrt{3}/2, \pi/6)$  وعند  $(-\sqrt{3}/2, 5\pi/6)$  هي  $\phi = \arctan 3\sqrt{3} = 79^\circ 6'$ . وزوايا التقاطع عند القطب هي  $0^\circ$  و  $\frac{1}{2}\pi$ .

في المسائل ١٤ - ١٦ أوجد  $ds/d\theta$  عند النقطة  $P(p, \theta)$ .

$$p = \cos 2\theta. \quad - 14$$

$$ds/d\theta = \sqrt{p^2 + (p')^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + 4 \sin^2 2\theta} = \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\theta}. \quad \text{و} \quad p' = -2 \sin 2\theta$$

$$p(1 + \cos \theta) = 4. \quad - 15$$

$$p' = \frac{p \sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{4 \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2} \quad \text{ومن} \quad -p \sin \theta + p'(1 + \cos \theta) = 0.$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{p^2 + (p')^2} = \frac{4\sqrt{2}}{(1 + \cos \theta)^{3/2}} \quad \text{وبالتالي}$$

$$p = \sin^2 \frac{1}{2}\theta. \quad - 16 \quad \text{حسب قيمة } ds/d\theta \text{ عند } \theta = 1/2\pi.$$

$$ds/d\theta = \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}\theta + \sin^4 \frac{1}{2}\theta \cos^2 \frac{1}{2}\theta} = \sin^2 \frac{1}{2}\theta. \quad \text{و} \quad p' = \sin^2 \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta$$

$$ds/d\theta = \sin^2 \frac{1}{2}\pi = 1/4. \quad \text{وعند } \theta = 1/2\pi \text{ يكون}$$

$$K = \frac{p^3 + 2(p')^2 - pp''}{\{p^3 + (p')^2\}^{3/2}}. \quad - 17 \quad \text{برهن أن}$$

من التعريف  $K = d\tau/ds$  وحيث أن  $\tau = \theta + \psi$  فإن :

$$\psi = \arctan \frac{p'}{p} \quad \text{حيث} \quad \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \left(1 + \frac{d\psi}{d\theta}\right).$$

$$1 + \frac{d\psi}{d\theta} = 1 + \frac{(p')^2 - pp''}{p^3 + (p')^2} = \frac{p^3 + 2(p')^2 - pp''}{p^3 + (p')^2} \quad \text{و} \quad \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{[(p')^2 - pp'']/(p')^2}{1 + (p/p')^2} = \frac{(p')^2 - pp''}{p^3 + (p')^2}$$

$$K = \frac{d\tau}{ds} \left(1 + \frac{d\psi}{d\theta}\right) = \frac{1 + d\psi/d\theta}{ds/d\theta} = \frac{1 + d\psi/d\theta}{\sqrt{p^3 + (p')^2}} = \frac{p^3 + 2(p')^2 - pp''}{\{p^3 + (p')^2\}^{3/2}}. \quad \text{وبالتالي}$$

$$P(p, \theta) \quad - 18 \quad \text{أوجد انحناء المنحني } p = 2 + \sin \theta \text{ عند النقطة}$$

$$K = \frac{p^3 + 2(p')^2 - pp''}{\{p^3 + (p')^2\}^{3/2}} = \frac{(2 + \sin \theta)^3 + 2 \cos^2 \theta + (\sin \theta)(2 + \sin \theta)}{\{(2 + \sin \theta)^3 + \cos^2 \theta\}^{3/2}} = \frac{6(1 + \sin \theta)}{(5 + 4 \sin \theta)^{3/2}}.$$

$$- 19 \quad \text{أوجد انحناء المنحني } p(1 - \cos \theta) = 1. \text{ عند } \theta = \pi/2 \text{ وعند } \theta = 4\pi/3$$

$$K = \sin^2 \frac{1}{2}\theta. \quad \text{ومن} \quad p' = \frac{-\sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}, \quad p'' = \frac{-\cos \theta}{(1 - \cos \theta)^3} + \frac{2 \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^3},$$

$$K = (\sqrt{3}/2)^2 = 3\sqrt{3}/8. \quad \text{عند } \theta = \pi/2 \text{ فإن } K = (1/\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}/4; \text{ عند } \theta = 4\pi/3 \text{ فإن}$$

٢٠ - استنتج من العلاقة  $r = \rho u_\rho$  صيغة لكل من  $v$  و  $a$  بدلالة  $\rho$  و  $\theta$ .

$$v = \frac{dr}{dt} = u_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{du_\rho}{dt} = u_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho u_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = u_\rho \frac{d^2\rho}{dt^2} + u_\theta \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \rho u_\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + u_\rho \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} - \rho u_\rho \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$= u_\rho \left[ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + u_\theta \left[ \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right]$$

٢١ - يتحرك جسيم على المنحنى  $\rho = 4 \sin 2\theta$  وفي اتجاه  $\rho$ ، لف لمركبة عقارب الساعة وبحيث يكون  $\frac{d\theta}{dt} = 1/2 \text{ rad s}^{-1}$

(١) عبر عن  $v$  و  $a$  بدلالة  $\rho$  و  $\theta$  (ب) أوجد  $|v|$  و  $|a|$  عند  $\theta = \pi/6$ .

$$r = 4 \sin 2\theta u_\rho, \quad d\rho/dt = 8 \cos 2\theta d\theta/dt = 4 \cos 2\theta, \quad d^2\rho/dt^2 = -4 \sin 2\theta$$

$$v = u_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho u_\theta \frac{d\theta}{dt} = 4u_\rho \cos 2\theta + 2u_\theta \sin 2\theta \quad (١)$$

$$a = u_\rho \left[ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + u_\theta \left[ \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right]$$

$$= -5u_\rho \sin 2\theta + 4u_\theta \cos 2\theta$$

(ب) عند  $\theta = \pi/6$  فإن

$$u_\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j, \quad u_\theta = -\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j, \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{6}{2}j; \quad a = -\frac{19}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4}j.$$

$$|v| = \sqrt{7}, \quad |a| = \frac{1}{4}\sqrt{91}.$$

### مسائل إضافية

في المسائل ٢٢ - ٢٥، أوجد  $\tan \psi$  عند النقطة المفروضة.

$$\rho = 3 - \sin \theta \quad \text{عند } \theta = 0, \theta = 3\pi/4 \quad \text{ج : } -3, 3\sqrt{2}-1 \quad \text{٢٢}$$

$$\rho = a(1 - \cos \theta) \quad \text{عند } \theta = \pi/4, \theta = 3\pi/2 \quad \text{ج : } \sqrt{2}-1, -1 \quad \text{٢٣}$$

$$\rho(1 - \cos \theta) = a \quad \text{عند } \theta = \pi/3, \theta = 5\pi/4 \quad \text{ج : } -\sqrt{3}/3, 1+\sqrt{2} \quad \text{٢٤}$$

$$\rho^3 = 4 \sin 2\theta \quad \text{عند } \theta = 5\pi/12, \theta = 2\pi/3 \quad \text{ج : } -1/\sqrt{3}, \sqrt{3} \quad \text{٢٥}$$

أوجد  $\tan \tau$  في المسائل ٢٦ - ٢٩ :

$$\rho = 2 + \sin \theta \quad \text{عند } \theta = \pi/6 \quad \text{ج : } -\sqrt{3} \quad \text{٢٦}$$

$$\rho^2 = 9 \cos 2\theta \quad \text{عند } \theta = \pi/6 \quad \text{ج : } 0 \quad \text{٢٧}$$

$$\rho = \sin^2 \theta/3 \quad \text{عند } \theta = \pi/2 \quad \text{ج : } -\sqrt{8} \quad \text{٢٨}$$

$$2\rho(1 - \sin \theta) = 3 \quad \text{عند } \theta = \pi/4 \quad \text{ج : } 1+\sqrt{2} \quad \text{٢٩}$$

٣٠ - أوجد المماسات الأفقية والرأسية للمنحنى  $\rho = \sin 2\theta$ .

ج : مماسات أفقية عند  $\theta = 0, \pi, 54^\circ 44', 125^\circ 16', 234^\circ 44', 305^\circ 16'$

مماسات رأسية عند  $\theta = \pi/2, 3\pi/2, 35^\circ 16', 144^\circ 44', 215^\circ 16', 324^\circ 44'$

في المسائل ٣١ - ٣٣ أوجد زوايا التقاطع الحادة لكل زوج من المنحنيات.

$$\rho = \sin \theta, \rho = \sin 2\theta \quad \text{ج : } \phi = 79^\circ 6', \theta = \pi/3, \theta = 5\pi/3, \phi = 0 \text{ عند القطب.} \quad \text{٣١}$$

$$\rho = \sqrt{2} \sin \theta, \rho^2 = \cos 2\theta \quad \text{ج : } \phi = \pi/3 \text{ عند } \theta = \pi/6, \theta = 5\pi/6, \phi = \pi/4 \text{ عند القطب.} \quad \text{٣٢}$$

$$\rho^2 = 16 \sin 2\theta, \rho^3 = 4 \csc 2\theta \quad \text{ج : } \phi = \pi/3 \text{ عند كل نقطة تقاطع.} \quad \text{٣٣}$$



٢٤ - بين أن كل زوج من المنحنيات التالية يتقاطعان بشكل عمودي عند جميع نقاط التقاطع .

$$\begin{aligned} (1) \quad & \rho = 4 \cos \theta, \quad \rho = 4 \sin \theta \quad (ج) \quad \rho^2 \cos 2\theta = 4, \quad \rho^2 \sin 2\theta = 9 \quad (د) \\ (2) \quad & \rho = e^{\theta}, \quad \rho = e^{-\theta} \quad (ب) \quad \rho = 1 + \cos \theta, \quad \rho = 1 - \cos \theta \quad (د) \end{aligned}$$

٢٥ - أوجد زاوية تقاطع المماس للمنحنى  $\rho = 2 - 4 \sin \theta$  عند القطب . ج :  $2\pi/3$  .

٢٦ - أوجد انحناء كل منحنى عند النقطة  $P(\rho, \theta)$

$$(1) \quad \rho = \sin \theta \quad (ب) \quad \rho = 4 \cos 2\theta \quad (ج) \quad \rho = 3 \sin \theta + 4 \cos \theta \quad (د)$$

$$ج : (1) \quad 1/(\sqrt{2}) \quad (ب) \quad 2 \quad (ج) \quad 3/2 \sqrt{\cos 2\theta} \quad (د) \quad 2/5$$

٢٧ - إذا كانت  $\rho = f(\theta)$  هي المعادلة القطبية لمنحنى وكان  $s$  طول القوس على هذا المنحنى .

$$\text{فباستخدام } x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \text{ حيث أن } \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$

$$\text{أوجد } \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \rho^2 + (\rho')^2$$

٢٨ - أوجد  $ds/d\theta$  لكل منحنى ما يلي ، بفرض أي  $s$  تزداد مع  $\theta$  :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \rho = a \cos \theta \quad (ب) \quad \rho = a(1 + \cos \theta), \quad (ج) \quad \rho = \cos 2\theta. \\ (2) \quad & a \sqrt{2 + 2 \cos \theta}, \quad (ب) \quad a \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\theta} \quad (ج) \end{aligned}$$

٢٩ - لنفرض أن جسماً يتحرك على المنحنى  $\rho = f(\theta)$  بحيث يتعين موضعه عند أي لحظة  $t$  بالمعادلة  $\rho = \rho(t), \quad \theta = \theta(t)$

$$(1) \quad \text{بضرب العلاقة التي حصلت عليها في المسألة ٢٧ في } \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \text{ أوجد } v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2$$

$$(ب) \quad \text{من } \tan \psi = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = \rho \frac{d\theta/dt}{d\rho/dt} \text{ أوجد } \sin \psi = \frac{\rho}{v} \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \cos \psi = \frac{1}{v} \frac{d\rho}{dt}$$

$$40 - \text{برهن أن } \frac{du_\rho}{dt} = u_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \frac{du_\theta}{dt} = -u_\rho \frac{d\theta}{dt}$$

٤١ - يتحرك جسم على منحنى القلب  $\rho = 4(1 + \cos \theta)$  في اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة وبحيث يكون  $d\theta/dt = \pi/6 \text{ rad/sec}$

عبر عن  $v$  و  $a$  بدلالة  $u_\rho$  و  $u_\theta$  .

$$ج \quad v = -\frac{2\pi}{3} u_\rho \sin \theta + \frac{2\pi}{3} u_\theta (1 + \cos \theta), \quad a = -\frac{\pi^2}{9} u_\rho (1 + 2 \cos \theta) - \frac{2\pi^2}{9} u_\theta \sin \theta$$

٤٢ - يتحرك جسم على المنحنى  $\rho = 8 \cos \theta$  في اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة وبسرعة قياسية ثابتة مقدارها 4

وحدات/ثانية ، عبر عن  $v$  و  $a$  بدلالة  $u_\rho$  و  $u_\theta$  .

$$ج : \quad v = -4u_\rho \sin \theta + 4u_\theta \cos \theta, \quad a = -4u_\rho \cos \theta - 4u_\theta \sin \theta$$

٤٣ - عندما يتحرك جسم كتلته  $m$  في مسار تحت تأثير قوة  $F$  متجهة باستمرار نحو نقطة الأصل فإن  $F = m a$

$$\text{أو } a = 1/m F \text{ ويكون } a_\theta = 0 \text{ بين أنه عندما يكون } a_\theta = 0 \text{ فإن } \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = k \text{ حيث } k \text{ ثابت وأن}$$

نصف القطر المتجه يمسح المسطح بمعدل ثابت .

$$44 - \text{يتحرك جسم على المنحنى } \rho = \frac{2}{1 - \cos \theta} \text{ بحيث يكون } a_\theta = 0 \text{ بين أن } a_\rho = -\frac{K^2}{2} \frac{1}{\rho^3}$$

حيث  $K$  في المسألة ٤٢ .

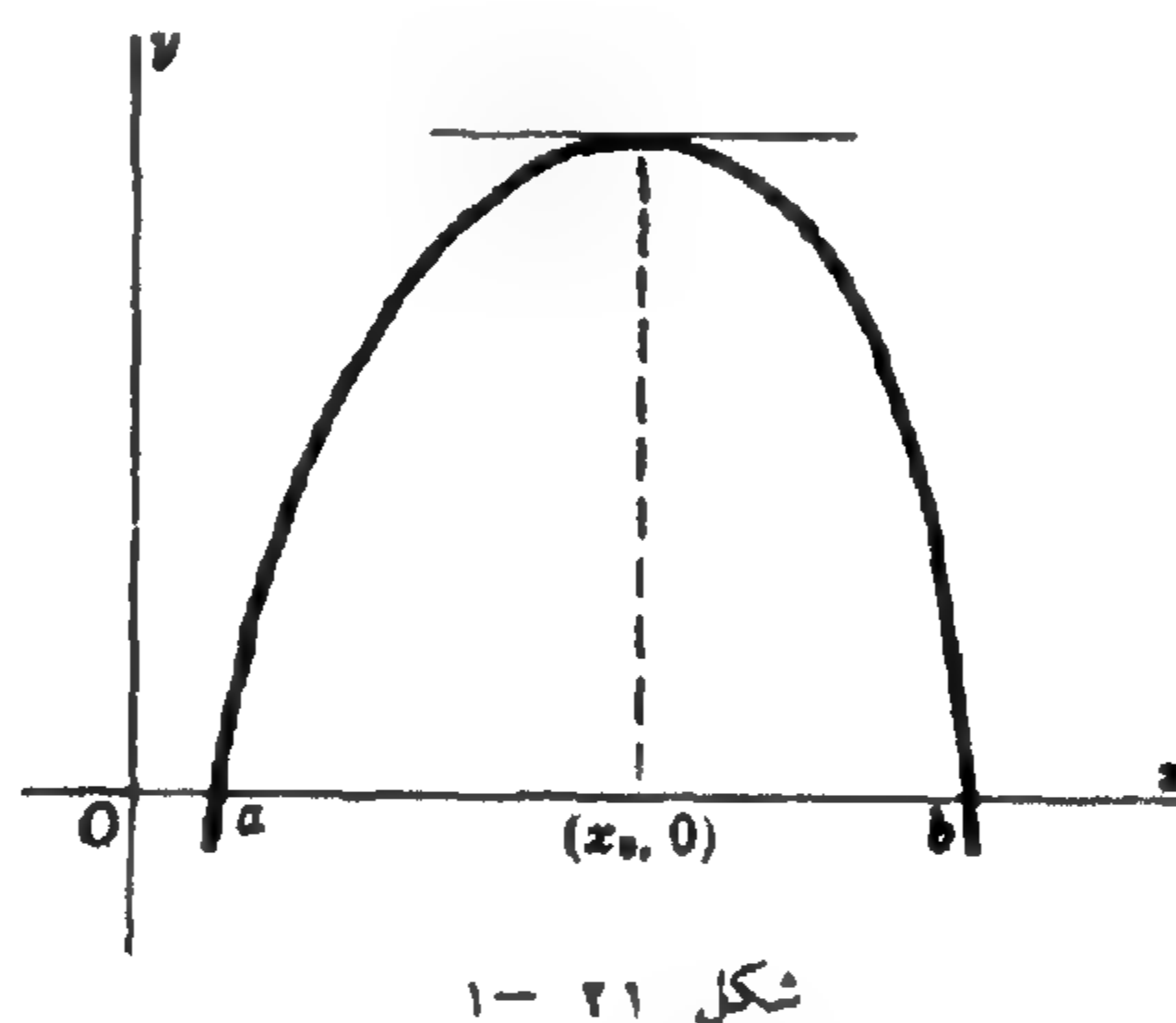
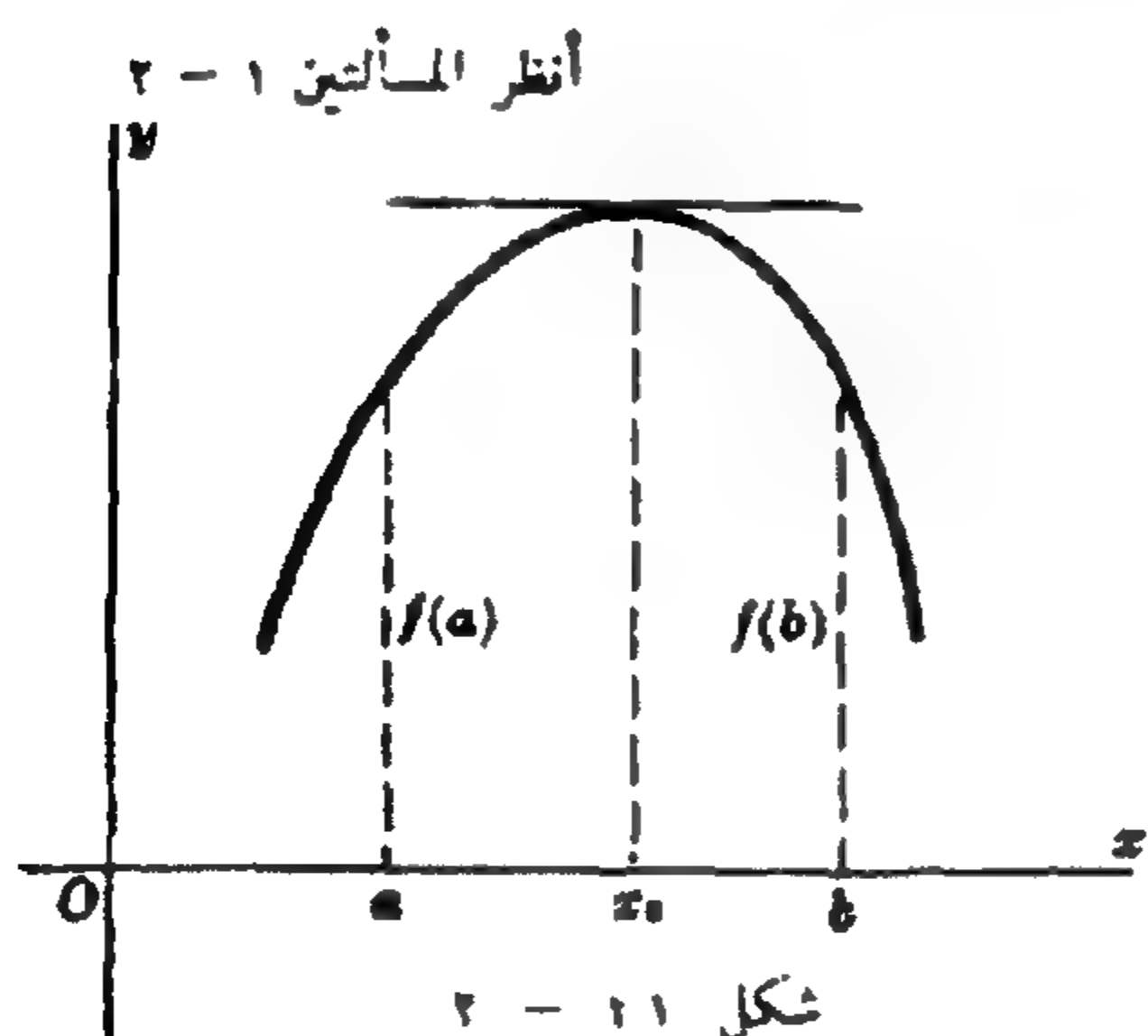
# الفصل الحادى والعشرون

## قانون القيمة المتوسطة

**نظرية رول :** إذا كانت  $f(x)$  متصلة فى الفترة  $a \leq x \leq b$  وكان  $f(a) = f(b) = 0$  وإذا كان  $f'(x)$  موجودة عند كل موضع فى الفترة باستثناء نقطى نهايات الفترة على الأكثر ، فإن  $f'(x) = 0$  لقيمة واحدة على الأقل  $x = x_0$  ، مثل  $x = x_0$  ، واقعة بين  $a$  و  $b$  .

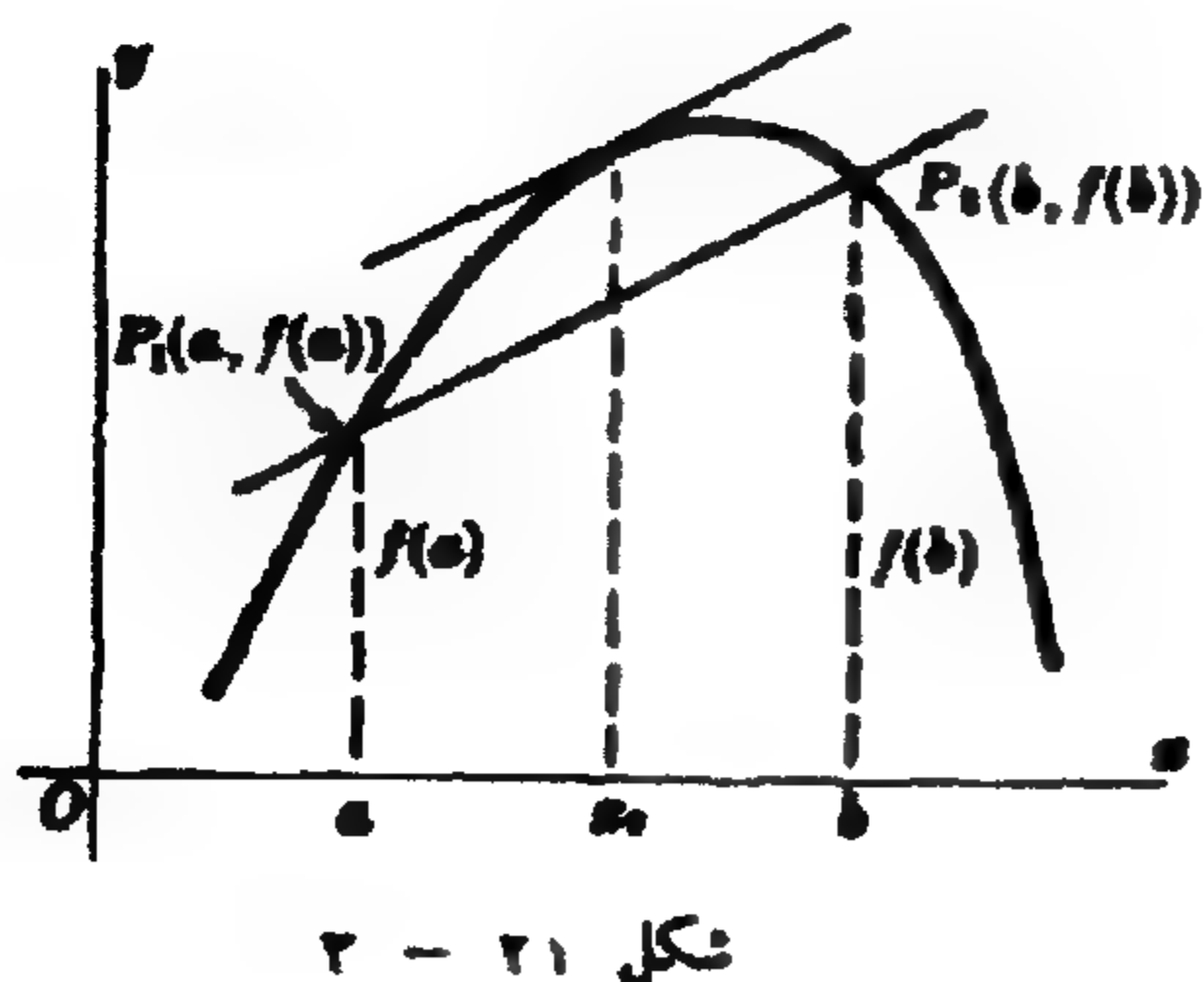
وهذا يعنى من الناحية الهندسية أنه إذا قطع منحنى متصل المحور  $x$  عند  $x = a$  و  $x = b$  وكان له مماس عند كل نقطة من نقطة التى تقع بين  $a$  و  $b$  فإنه يوجد على الأقل نقطة واحدة  $x = x_0$  بين  $a$  و  $b$  يكون المماس عندها موازياً للمحور . أنظر الشكل ٢١ - ١ .

**نتيجة :** إذا حققت الدالة  $f(x)$  شروط نظرية رول ، خلاف أن  $f(a) = f(b) \neq 0$  فمعدن  $f'(x) = 0$  لقيمة واحدة على الأقل  $x = x_0$  ، واقعة بين  $a$  و  $b$  . أنظر الشكل ٢١ - ٢



**قانون القيمة المتوسطة :** إذا كانت  $f(x)$  متصلة فى الفترة  $a \leq x \leq b$  وكانت  $f(x)$  موجودة عند كل موضع فى هذه الفترة باستثناء نقطى نهايات الفترة على الأكثر ، فمعدن يوجد على الأقل قيمة واحدة  $x$  بين  $a$  و  $b$  مثل  $x = x_0$  بحيث :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$



وهذا يعنى من الناحية الهندسية أنه إذا كانت  $P_1$  و  $P_2$  نقطتين على منحنى متصل ، له مماس عند كل نقطة بينهما ، فمعدن يوجد على الأقل نقطة واحدة على المنحنى بين  $P_1$  و  $P_2$  يكون ميل المنحنى عندها مساوياً لميل  $P_1 P_2$  . أنظر الشكل ٢١ - ٣ .

لبرهان أنظر المسألة ١٢

يمكن صياغة قانون القيمة المتوسطة بأشكال مفيدة متعددة .

$$f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'(x_0), \quad (I)$$

وبتغيير بسيط في الرموز تأخذ هذه الصيغة الشكل .

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(x_0), \quad (II)$$

ويوضح من الشكل ٢١-٤ أن  $x_0 = a + \theta(b-a)$

حيث  $0 < \theta < 1$  . ويجراء هنا التبديل تأخذ الصيغة (I) الشكل :

شكل ٢١-٤

$$f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'[a + \theta(b-a)], \quad 0 < \theta < 1 \quad (III)$$

وإذا كتبنا  $(b-a) = h$  فإن (III) تصبح :

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1 \quad (IV)$$

وأخيراً إذا وضعنا  $a = x$  و  $h = \Delta x$  فإن (IV) تصبح :

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \cdot f'(x+\theta \cdot \Delta x), \quad 0 < \theta < 1 \quad (V)$$

نظر المسائل ٢-٩

**القانون العام للقيمة المتوسطة :** إذا كانت الدالتان  $f(x)$  و  $g(x)$  متصلتين في الفترة  $a \leq x \leq b$  ، وإذا وجد  $f'(x)$  و  $g'(x) \neq 0$  وكان  $g'(x) \neq 0$  عند كل موضع من هذه الفترة باستثناء نقطتي نهايتها على الأكثر . فمعدلة توجد بين  $a$  و  $b$  قيمة واحدة لـ  $x$  على الأقل مثل  $x = x_0$  بحيث يكون :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

وعندما  $g(x) = x$  تصبح هذه المعادلة قانون القيمة المتوسطة .

البرهان أنظر المسألة ١٢

**قانون القيمة المتوسطة الموسع :** إذا كان كلا من  $f(x)$  وجميع مشتقاتها حتى  $(n-1)$  متصلة في الفترة  $a \leq x \leq b$  وإذا كانت  $f^{(n)}(x)$  موجودة عند كل موضع في الفترة باستثناء نقطتي نهايتها على الأكثر ، فمعدلة توجد قيمة واحدة على الأقل لـ  $x$  ، مثل  $x = x_0$  ، واقعة بين  $a$  ،  $b$  بحيث :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n \quad (VI)$$

البرهان أنظر المسألة ١٥

وإذا وضعنا  $x$  بدلاً من  $b$  فإن (VI) تأخذ الشكل :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-a)^n, \quad (VII)$$

وإذا وضعنا 0 بدلاً من  $a$  في (VII) تصبح :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n \quad (VIII)$$

حيث  $x_0$  واقعة بين 0 و  $x$  .

### مسائل محلولة

١- أوجد قيمة  $x_0$  الواردة في نظرية رول لدالة  $f(x) = x^3 - 12x$  في الفترة  $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$ .  
إن  $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$  وعندما  $x = \pm 2$  فإن  $x_0 = 2$  هي القيمة المطلوبة.

٢- هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالتين (أ)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$  (ب)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x + 2}$  ؟  
(أ) أن  $f(x) = 0$  عندما  $x = 0, 4$  وبما أن  $f(x)$  دالة متقطعة عند  $x = 2$  وهي نقطة من نقاط الفترة  $0 \leq x \leq 4$  فإن النظرية لا تطبق.

(ب)  $f(x) = 0$  عندما  $x = 0, 4$  ولكن  $f(x)$  هنا متقطعة عند  $x = -2$  وهي نقطة ليست من نقاط الفترة  $0 \leq x \leq 4$  ثم إن  $f'(x) = (x^2 + 4x - 8)/(x + 2)^2$  موجودة في كل موضع باستثناء عند  $x = -2$ . لذلك فالنظرية قابلة للتطبيق حيث نجد  $(\sqrt{3} - 1)$   $x_0 = 2$ ، وهي الجذر الموجب لـ  $x^2 + 4x - 8 = 0$ .

٣- أوجد قيمة  $x_0$  الواردة في قانون القيمة المتوسطة إذا كانت  $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3$ .  
باستخدام الصيغة (I) حيث  $f'(x_0) = 6x_0 + 4$ ,  $f(a) = f(1) = 4$ ,  $f(b) = f(3) = 36$ ,  $b - a = 2$ ,  
نجد أن  $36 = 4 + 2(6x_0 + 4) = 12x_0 + 12$  ومنه  $x_0 = 2$ .

٤- استخدم قانون القيمة المتوسطة لحساب القيمة التقريبية لـ  $\sqrt[6]{65}$ .

ضع  $f(x) = \sqrt[6]{x}$ ,  $a = 64$ ,  $b = 65$  وباستخدام الصيغة (I)  
عندئذ يكون  $64 < x_0 < 65$   $f(65) = f(64) + (65 - 64)/6x_0^5$ ,  $x_0$  غير معروفة فإننا نأخذ  $x_0 = 64$  فنجد  
القيمة التقريبية  $\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64} + 1/(6\sqrt[5]{64}) = 2 + 1/192 = 2.00521$ .

٥- المطلوب توسيع خزانة دائرية في قطعة مدنية، قطرها 10 cm وعمقها 30 cm، ليصبح قطرها 10.3 cm. احسب كمية المعدن الذي تزيله من القطعة.

يسل الحجم بالستينترات المكعبة، لنفب دائري نصف قطره  $x$  cm وعمقه 30 cm.  $V = f(x) = 30\pi x^2$ .  
فلنأخذ أن نقدر القيمة  $f(5.15) - f(5)$  من قانون القيمة المتوسطة. لدينا.

$$f(5.15) - f(5) = 0.15 f'(x_0) = 0.15(60\pi x_0), \quad 5 < x_0 < 5.15$$

فإذا أخذنا  $x_0 = 5$  فإننا نحصل على القيمة التقريبية  $f(5.15) - f(5) = 0.15(60\pi \cdot 5) = 45\pi \text{ cm}^3$

٦- طبق قانون القيمة المتوسطة على  $y = f(x)$ ,  $a = x$ ,  $b = x + \Delta x$  بفرض أن جميع الشروط محققة، لنحصل  
على  $\Delta y = f'(x) \Delta x$  بشكل تقريبي.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [x + \Delta x - x] \cdot f'(x_0), \quad x < x_0 < x + \Delta x.$$

لدينا  $x_0 = x$  فإذاً نجد القيمة التقريبية لـ  $\Delta y = f'(x) \Delta x$ .

٧- استخدم قانون القيمة المتوسطة لبرهن أن  $\sin x < x$  عندما  $x > 0$  بما أن  $\sin x \leq 1$  فإن  $\sin x < x$   
وعندما  $x < 0$  نأخذ  $f(x) = \sin x$  في الفترة  $0 \leq x \leq 1$  وباستخدام الصيغة (II) فنجد أن:

$$\sin x = \sin 0 + x \cos x_0 = x \cos x_0, \quad 0 < x_0 < x$$

ولكن في هذه الفترة  $\cos x_0 < 1$  وبالتالي فإن  $x \cos x_0 < x$  ومنه  $\sin x < x$ .

٨- استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبين أن  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$  عندما  $-1 < x < 0$  وعندما  $x > 0$ .

باستخدام الصيغة (IV) حيث  $f(x) = \ln x$ ,  $a = 1$   $x = x_0$  فنجد:



$$\ln(1+x) = \ln 1 + x \frac{1}{1+\theta x} = \frac{x}{1+\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

وعندما  $x > 0$  فإن  $1 < 1 + \theta x < 1 + x$  وبالتالي  $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\theta x} < 1$  و  $x > \frac{x}{1+\theta x} > \frac{x}{1+x}$  و  $1 > \frac{1}{1+\theta x} > \frac{1}{1+x}$  و  
وعندما  $-1 < x < 0$  فإن  $1 > 1 + \theta x > 1 + x$  وبالتالي  $1 < \frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1+x}$  و  $x > \frac{x}{1+\theta x} > \frac{x}{1+x}$  و  $1 < \frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1+x}$  و  
وفي كلا الحالتين  $\frac{x}{1+\theta x} < x$  و  $\frac{x}{1+\theta x} > \frac{x}{1+x}$  و  $\ln(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}$  و  $\frac{x}{1+\theta x} > \frac{x}{1+x}$  و  $\ln(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}$  و  $\frac{x}{1+\theta x} < x$  و  $\frac{x}{1+\theta x} > \frac{x}{1+x}$  و  
وبالتالي فإن  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$  عندما  $-1 < x < 0$  و  $x > 0$  و

٩- استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبين أن  $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$  عندما  $-1 < x < 0$  وعندما  $x > 0$ .

لنأخذ  $f(x) = \sqrt{x}$  وباستخدام الصيغة (IV) حيث  $a = 1$ ,  $b = x$  نجد :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}}, \quad 0 < \theta < 1$$

وعندما  $x > 0$  نلاحظ أن  $\sqrt{1+\theta x} < \sqrt{1+x}$  و  $\frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$  و عندما  $-1 < x < 0$  نلاحظ أن  $\sqrt{1+\theta x} > \sqrt{1+x}$  و  $\frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$  و  
وفي كلا الحالتين يكون  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$  و  $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$  و  $1+x > \sqrt{1+x} + \frac{1}{2}x$  نجد

١٠- أوجد قيمة  $x_0$  الواردة في القانون العام لقيمة المتوسطة بفرض أن  $1 \leq x \leq 4$ ,  $g(x) = x^2 + 1$ ,  $f(x) = 3x + 2$  لإيجاد قيمة  $x_0$  فإن :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{14 - 5}{17 - 2} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{3}{2x_0}$$

إذن  $2x_0 = 5$  ومنه  $x_0 = 5/2$ .

١١- برهن نظرية رول : إذا كانت  $f(x)$  دالة متصلة في الفترة  $a \leq x \leq b$  وكانت  $f(a) = f(b) = 0$  وكانت  $f'(x)$  موجودة عند كل موضع في الفترة باستثناء نقطتي نهايتها على الأكثر فإن  $f'(x) = 0$  لقيمة واحدة على الأقل لـ  $x$  مثل  $x = x_0$  واقعة بين  $a$  و  $b$ .

إذا كانت  $f(x) = 0$  على طول الفترة فإن  $f'(x) = 0$  كذلك وبنم برهان النظرية . أما إذا كانت  $f(x)$  موجبة (سالبة) في موضع ما في الفترة فمتى يكون لها قيمة عظمى (صغرى) نسبية عند موضع ما مثل  $x = x_0$  في الفترة  $a < x_0 < b$  (أنظر الملاحظة II من الفصل الثالث) وبالتالي فإن  $f'(x_0) = 0$ .

١٢- برهن قانون القيمة المتوسطة : إذا كانت  $f(x)$  متصلة في الفترة  $a \leq x \leq b$  وإذا كانت  $f'(x)$  موجودة عند كل موضع في الفترة باستثناء نقطتي نهايتها على الأكثر فمتى يوجد على الأقل قيمة واحدة لـ  $x$  بين  $a$  و  $b$  مثل  $x = x_0$  بحيث

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

بالعودة إلى الشكل ٢١ - ٢ نلاحظ أن معادلة المستقيم القاطع  $P_1 P_2$  هي  $y = f(b) + K(x - b)$  حيث  $K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  والمسافة الرأسية من المستقيم القاطع إلى المنحنى عند أي نقطة  $x$  في الفترة  $a < x < b$  هي  $K(x - b)$ .

إن  $F(x) = f(x) - f(b) - K(x - b)$  الآن تحقق شروط نظرية رول (تحقق من ذلك) وبالتالي فإن  $F'(x) = f'(x) - K = 0$  و

$$K = f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{عند } x = x_0 \text{ بين } a \text{ و } b \text{ وهكذا}$$

وهو المطلوب .



١٣- برهن القانون العام لقيمة المتوسطة : إذا كانت الدالتان  $f(x)$  و  $g(x)$  متصلتين في الفترة  $a \leq x \leq b$  وإذا وجد  $f'(x)$  و  $g'(x)$  وكانت  $g'(x) \neq 0$  عند كل موضع في الفترة باستثناء نقطتي نهايتها على الأكثر ، فنمظ  
توجد بين  $a$  و  $b$  قيمة واحدة لـ  $x$  على الأقل مثل  $x = x_0$  بحيث يكون :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

لنفرض  $g(b) = g(a)$  فتتخذ ينفع من نتيجة نظرية رول أن  $g'(x) = 0$  عند قيمة لـ  $x$  بين  $a$  و  $b$  وهذا مخالف للفرض ، إذن  $g(b) \neq g(a)$  . لنفرض الآن  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = K$  حيث  $K$  ثابت ، ونكتب الدالة .

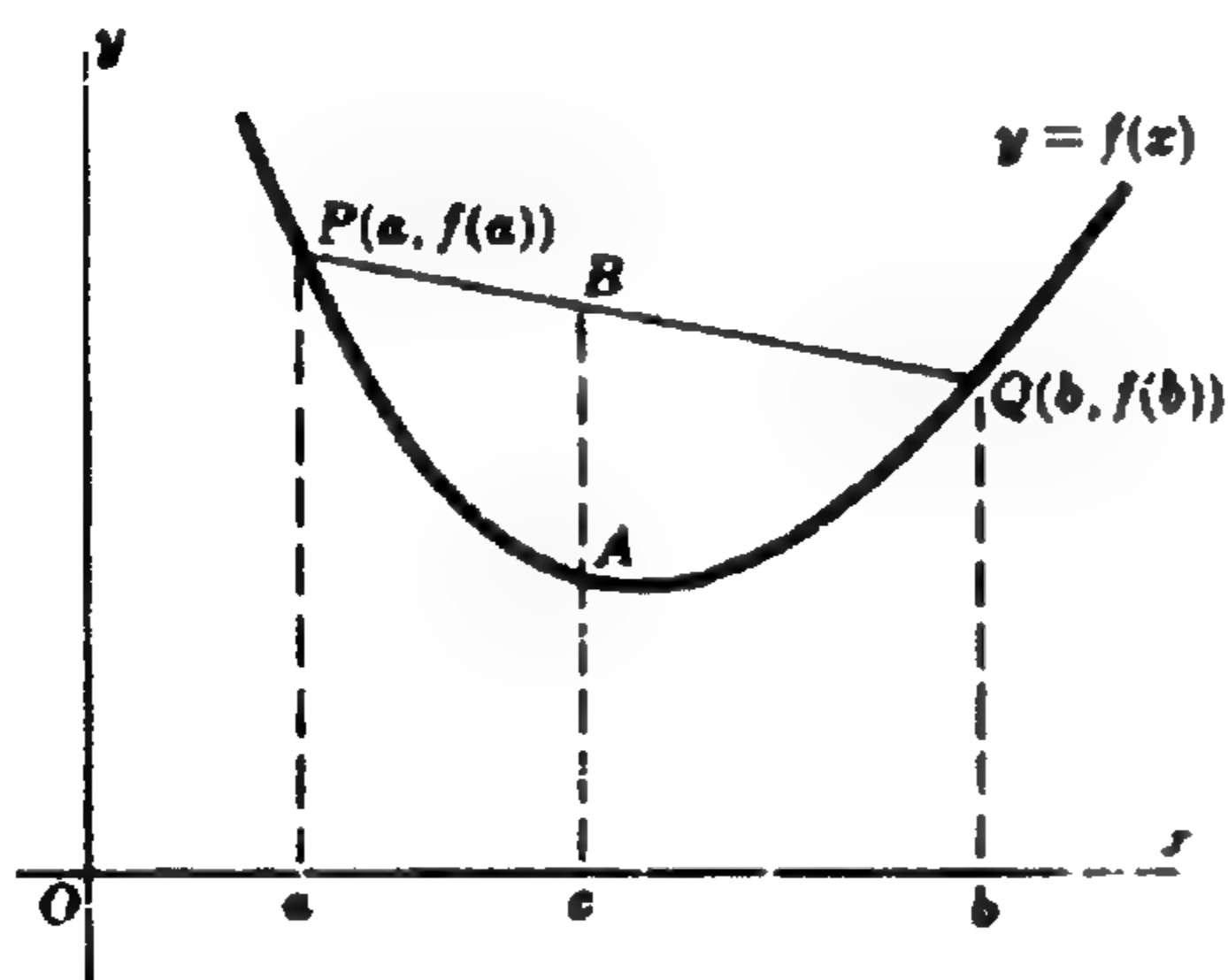
$$F(x) = f(x) - f(b) - K[g(x) - g(b)]$$

تحقق هذه الدالة شروط نظرية رول ( تحقق من ذلك ) وبالتالي  $F'(x) = f'(x) - K g'(x) = 0$  عند قيمة واحدة لـ  $x$  على الأقل ، لتكن  $x = x_0$  بين  $a$  و  $b$  إذن :

$$K = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

وهو المطلوب .

١٤- يكون القوس  $PQ$  لمنحنى  $y = f(x)$  مقعراً لأعلى إذا وقع تحت الوتر ومقعراً لأسفل إذا وقع فوق هذا الوتر .  
برهن أنه إذا كانت  $f(x)$  و  $f'(x)$  متصلتين في الفترة  $a \leq x \leq b$  وإذا حافظت  $f'(x)$  على إشارتها في الفترة  $a < x < b$  فتتخذ يكون :



شكل ٢١ - ٥

(i) مقعرة لأعلى في الفترة  $a < x < b$  عندما

$$f''(x) > 0$$

(ii) مقعرة لأسفل في الفترة  $a < x < b$  عندما

$$f''(x) < 0$$

إن معادلة الوتر  $PQ$  التي يصل  $P[a, f(a)]$  و  $Q[b, f(b)]$  هي

من  $y = f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين على القوس والوتر ، على الترتيب ، احداثيات السني  $x = c$  حيث  $a < c < b$  ويصل احداثيات الصادي بـ  $f(c)$  و

$$f(a) + (c - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(b - c) \cdot f(a) + (c - a) \cdot f(b)}{b - a}$$

(i) علينا أن نبرهن أن :

$$f(c) < \frac{(b - c) \cdot f(a) + (c - a) \cdot f(b)}{b - a}$$

عندما  $f''(x) > 0$  . استناداً إلى قانون القيمة المتوسطة ، يكون  $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(\xi)$  حيث  $\xi$  بين  $a$  و  $c$  . وبما أن  $f''(x) > 0$  في الفترة  $a < x < b$  فإن  $f'(x)$  دالة متزايدة في الفترة . وبالتالي فإن  $f'(\xi) < f'(\eta)$  حيث  $\eta$  بين  $c$  و  $b$  . ويكون  $\frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(\eta)$  .

ومن يتبع أن :

$$f(c) < \frac{(b - c) \cdot f(a) + (c - a) \cdot f(b)}{b - a}$$

كما هو مطلوب .

وأما الجزء (ii) فنتركه للقارىء كتمرين .

١٥- برهن أنه إذا كانت الدالة  $f(x)$  متصلة مع مشتقاتها  $(n-1)$  الأولى في الفترة  $a \leq x \leq b$  وإذا وجد  $f^{(n)}(x)$  في كل موضع في الفترة باستثناء نقطتي نهايتها على الأكثر ، فمتممًا توجد بين  $a$  و  $b$  قيمة واحدة لـ  $x$  على الأقل مثل  $x = x_0$  بحيث :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n$$

إذا كانت  $n=1$  فإن الأمر يزول إلى قانون القيمة المتوسطة . والبرهان التالي مماثل للبرهان في المسألة ١٢ . لنعرف  $K$  بالعلاقة :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + K(b-a)^n \quad (i)$$

وباحسب أن :

$$F(x) = f(x) - f(b) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + K(b-x)^n$$

من المعادلة (i) نلاحظ الآن أن  $F(a) = 0$  وأن  $F(b) = 0$  . لذلك يوجد ، استناداً إلى نظرية رول ، قيمة لـ  $x$  ولكن  $x = x_0$  وبحيث تحقق العلاقة :

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= f'(x_0) + \{f''(x_0) \cdot (b-x_0) - f'(x_0)\} + \left\{ \frac{f'''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2 - f''(x_0) \cdot (b-x_0) \right\} \\ &\quad + \dots + \left\{ \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b-x_0)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(b-x_0)^{n-2} \right\} - Kn(b-x_0)^{n-1} \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b-x_0)^{n-1} - Kn(b-x_0)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن  $K = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$  ونأخذ المعادلة (i) الشكل :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n$$

### مسائل اختيارية

١٦- أوجد قيمة  $x_0$  الواردة في نظرية رول بفرض أن :

$$\begin{aligned} (a) \quad f(x) &= x^3 - 4x + 3, \quad 1 \leq x \leq 3 & : \quad x_0 = 2 \\ (b) \quad f(x) &= \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi & : \quad x_0 = \frac{1}{2}\pi \\ (c) \quad f(x) &= \cos x, \quad \pi/2 < x < 3\pi/2 & : \quad x_0 = \pi \end{aligned}$$

١٧- أوجد قيمة  $x_0$  الواردة في قانون القيمة المتوسطة بفرض أن :

$$\begin{aligned} (a) \quad y &= x^2, \quad 0 \leq x \leq 6 & : \quad x_0 = 2\sqrt{3} \\ (b) \quad y &= ax^2 + bx + c, \quad x_1 \leq x \leq x_2 & : \quad x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ (c) \quad y &= \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2e & : \quad x_0 = \frac{2e-1}{1+\ln 2} \end{aligned}$$

١٨- استخدم قانون القيمة المتوسطة لتحسب قيمة تقريبية لـ (a)  $\sqrt{13}$

$$(b) \quad (3.001)^3 \quad (c) \quad 1/999$$

$$ج: (a) \quad 3.875 \quad (b) \quad 27.027 \quad (c) \quad 0.001001$$

١٩ - استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبرهن أن :

$$(١) \tan x > x, 0 < x < \frac{1}{2}\pi; (ب) \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arctan} x < x, x > 0; (ج) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1. \quad x < \operatorname{Arcsin} x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

٢٠ - بين أن  $|f(x) - f(x_1)| \leq |x - x_1|$  بحيث  $x_1$  عدداً ، وذلك بفرض أن :

$$(١) f(x) = \sin x, \quad (ب) f(x) = \cos x.$$

٢١ - استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبرهن أنه :

(١) إذا كانت  $f'(x) = 0$  في كل موضع في الفترة  $0 \leq x \leq b$  فإن  $f(x) = f(a) = c$  حيث  $c$  ثابت في كل موضع في نفس الفترة .

(ب)  $f(x)$  تزداد مع  $x$  في الفترة المعطاة  $0 \leq x \leq b$  إذا كانت  $f'(x) > 0$  على طول الفترة .

ارشاد : لتكن  $x_1 < x_2$  نقطتين على الفترة ، عندئذ  $f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_0)$  ،  $x_1 < x_0 < x_2$ .

٢٢ - استخدم نظرية المسألة ٢١ (١) لتبرهن أنه إذا كانت  $f(x)$  و  $g(x)$  مختلفتين ولكن  $f'(x) = g'(x)$  في فترة ما فإن  $f(x) - g(x) = c \neq 0$  حيث  $c$  ثابت ، في نفس الفترة .

٢٣ - نعرف نقطة انحناء  $f(x)$  بأنها نقطة حرجة عند  $x = x_0$  بحيث تتغير عندها إشارة  $f'(x)$  عندما تزداد  $x$  مارة بـ  $x = x_0$  بفرض أن  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$  هي نقط الانحناء المختلفة لـ  $f(x)$  . بين أن للمعادلة  $f(x) = 0$  جذر حقيقى واحد على الأكثر في كل من الفترات  $x < x_1, x_1 < x < x_2, \dots, x_{n-1} < x < x_n, x > x_n$ .

٢٤ - برهن أنه إذا كان لـ  $f(x) = 0$  من الدرجة  $n$  جذراً حقيقياً بسيطاً فإن لـ  $f'(x) = 0$  ،  $(n-1)$  جذراً حقيقياً بسيطاً بالضبط .

٢٥ - برهن أن للمعادلة  $x^3 + px + q = 0$  (١) جذراً حقيقياً واحداً إذا كان  $p > 0$  (ب) ثلاثة جذور حقيقية بسيطة عندما  $4p^3 + 27q^2 < 0$

٢٦ - أوجد قيمة  $x_0$  الواردة في القانون العام للقيمة المتوسطة بفرض أن :

$$(١) f(x) = x^2 + 2x - 3, g(x) = x^2 - 4x + 6; a = 0, b = 1. \quad ج : \frac{1}{2}$$

$$(ب) f(x) = \sin x, g(x) = \cos x; a = \pi/6, b = \pi/3. \quad ج : \frac{1}{4}\pi$$

٢٧ - استخدم قانون القيمة المتوسطة الموسع (VIII) لتبرهن أنه :

(١) يمكن تقريب  $\sin x$  إلى  $x$  مع خطأ لا يزيد عن 0.005 وذلك عندما تكون  $x < 0.31$

ارشاد : عند  $n=3$  لدينا  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 \cos x_0$  . ضع  $\frac{1}{6}|x^3 \cos x_0| \leq \frac{1}{6}|x^3| < 0.005$ .

(ب) يمكن تقريب  $\sin x$  إلى  $x - x^3/6$  مع خطأ لا يزيد عن 0.000 05 عندما تكون  $x < 0.359$  .

## الفصل الثاني والعشرون

### الصيغ غير المحددة

**عند إيجاد المشتقة :** لدالة قابلة للاشتقاق في الفصل الرابع قادنا الأمر إلى النظر في :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(\Delta x)}{G(\Delta x)} \quad (1)$$

وبما أن نهاية كل من البسط والمقام لهذا الكسر مساوية للصفر فلقد جرت المادة أن ندمو (1) صيغة غير محددة من النمط  $0/0$ . وفي الفصل الثاني ، المسألة الخامسة ، وجدنا أمثلة أخرى من هذا النمط .

ولقد جرت المادة ، بشكل مماثل أن ندمو  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{9x+7}$  ( انظر المسألة ٦ من الفصل الثاني ) صيغة غير محددة من النمط  $\infty/\infty$  . ينبغي أن لانفهم هذين الرمز  $0/0$  و  $\infty/\infty$  ورموزاً أخرى (  $0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty - \infty, \infty, \infty$  ) ستزد فيما بعد ، بأشكالها الحرفية إذ أنها مجرد مصطلحات تمييز بين أنماط الصيغ المحددة .

### النمط $0/0$ :

قاعدة لوبيتال . إذا كان  $a$  عدداً ما وكانت الدالتان  $f(x)$  و  $g(x)$  قابلتين للاشتقاق و  $g(x) \neq 0$  لجميع قيم  $x$  في الفترة  $0 < |x - a| < \delta$  وإذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  فنحن نكتب :  
بشرط أن توجد النهاية  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  أو أن تكون غير منتهية .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**مثال ١ :** أن  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$  صيغة غير محددة من النمط  $0/0$  ، وبما أن :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = 108 \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{d}{dx}(x^4 - 81)}{\frac{d}{dx}(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{1} = 108,$$

( انظر المسائل ١ - ٧ )

يلاحظ أن قاعدة لوبيتال تقتضي أن يكون  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$  . ولكننا في بعض المسائل ( المسألة ٨ مثلا ) منجز الحالة التي يوجد فيها نهاية واحدة دون الأخرى من هاتين النهايتين .

### النمط $\infty/\infty$ :

لاكتبر نتائج قاعدة لوبيتال إذا أجرينا التغيرين التاليين أو كليهما في فروض القاعدة .

(i) نستبدل  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  و  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty(8)$  بـ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

(ii) نستبدل  $a$  إذا كان  $a$  عدداً ما بـ " $a = +\infty, -\infty$  أو  $\infty$ "

ونستبدل " $0 < |x - a| < \delta$ " بـ " $|x| > M$ ".

مثال ٢ : أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$  صيغة غير محددة من النمط  $\infty/\infty$  . لذلك :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

أنظر المسائل ٩ - ١١

التمطان  $0 \cdot \infty$  و  $\infty - \infty$  :

لمعالجة هذين النمطين نبدأ بتحويلهما إلى أحد النمطين  $0/0$  أو  $\infty/\infty$  فمثلاً أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} \text{ من النمط } 0 \cdot \infty \text{ بينما } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \text{ من النمط } \infty/\infty$$

$$\text{وأن } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \csc x - \frac{1}{x} \right) \text{ من النمط } \infty/\infty \text{ بينما } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) \text{ من النمط } 0/0$$

أنظر المسائل ١٢ - ١٦

الأنماط :  $0^0, \infty^0, 1^\infty$  :

إذا كان  $\lim y$  واحداً من هذه الأنماط فإن  $\lim (\ln y)$  من النمط  $0 \cdot \infty$  .

مثال ٣ : احسب قيمة  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sec^2 2x)^{\cot^2 3x}$  .

إن هذه النهاية من النمط  $1^\infty$  لنفرض  $y = (\sec^2 2x)^{\cot^2 3x}$  ، فيكون  $\ln y = \cot^2 3x \ln \sec^2 2x = \frac{3 \ln \sec 2x}{\tan^2 3x}$

وتكون النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y$  من النمط  $0/0$  .

$$\text{وعلى هذا فإن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln \sec 2x}{\tan^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \tan 2x}{6 \tan 3x \sec^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x}$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 3x = 1 \text{ وبالتالي فإن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 2x}{3 \sec^2 3x} = \frac{2}{3}$$

$$\text{وبما أن } \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 2/3 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (\sec^2 2x)^{\cot^2 3x} = e^{2/3}$$

أنظر المسائل ١٧ - ١٩

### مسائل محلولة

١ - برهن قاعدة لوبيتال : إذا كان  $a$  عدداً وكانت الدالتان  $f(x)$  و  $g(x)$  قابلتين للاشتقاق و  $g(x) \neq 0$  لجميع قيم  $x$

في الفترة  $0 < |x - a| < \delta$  وإذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

$$\text{وإذا وجدت } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



إذا وضعنا في القانون العام للقيمة المتوسطة ( الفصل ٢١ ) بدلا من  $x$  وبملاحظة  $f(a) = g(a) = 0$  فإننا نجد أن :

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حيث  $x_0$  تقع بين  $a$  و  $x$  وحيث أن  $x_0 \rightarrow a$  عندما  $x \rightarrow a$  . إذن :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ exists, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

٢ - احسب قيمة  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$  . نلاحظ أن كلا من البسط والمقام يزول إلى الصفر . إذن فالقاعدة

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{2x} = \frac{5}{4} . \quad \text{قابلة للتطبيق ومنها ينتج أن}$$

٣ - احسب قيمة  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x}$  . نلاحظ أن كلا من البسط والمقام يزول إلى الصفر . إذن فالقاعدة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos 2x}{1 - 2 \cos 2x} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3 . \quad \text{قابلة للتطبيق ومنها ينتج أن}$$

$$4 - \text{احسب قيمة } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} . \quad \text{أن : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x} = \infty .$$

$$5 - \text{احسب قيمة } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^3 x - x^3} .$$

إن كلا من البسط والمقام يزول إلى الصفر عندما  $x \rightarrow 0$  . إذن فالقاعدة قابلة للتطبيق ومنها ينتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^3 x - x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin 2x - 2x}$$

وحيث أن الدالة الناتجة غير محددة من النمط  $0/0$  فإننا نطبق القاعدة ثانية فنحصل على :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^3 x - x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin 2x - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2 \cos 2x - 2}$$

ومرة أخرى نجد أن الدالة الناتجة غير محددة من النمط  $0/0$  وهكذا فإننا ، وبعد أن نبرر كل تسوى ، نحصل على :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^3 x - x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin 2x - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2 \cos 2x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{-4 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{-8 \cos 2x} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$6 - \text{ابحث في : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x^2 - x - 2}{x^2 - 2x^2 + 2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 2}{6x - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{6} = 1 .$$

إن الدالة المقروضة غير محددة من النمط  $0/0$  . إذن فالقاعدة قابلة للتطبيق غير أن الدالة الناتجة ليست من المصغ غير المحددة ( النهاية تسوى 7/3 ) ولذلك فإن التطبيقات المتتالية للقاعدة ليست صحيحة وهذا خطأ شائعاً .

$$7 - \text{ابحث في : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x^2 + x} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 4x + 1} = \frac{6x - 2}{6x - 4} = 2 .$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x^2 - x + 1}{x^2 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 1x - 1}{2x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 2}{6x - 4} = 2 .$$

إن القيمة الصحيحة هنا هي ٢ .

وكون النهاية صحيحة لا يبرر سلسلة المصغ المتتالية التي أدت إليها .

٨ - احسب قيمة  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x - \pi}}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x - \pi}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{\frac{1}{2}(x - \pi)^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} 2(x - \pi)^{1/2} \cos x = 0$$

حيث ينبغي أن يكون اقترابنا هنا من الصفر وإلا فإن  $(x - \pi)^{1/2}$  تنحل .

٩ - احسب قيمة  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

إن البسط والمقام يزولان إلى  $+\infty$  عندما  $x \rightarrow +\infty$  لذلك فإن

١٠ - احسب قيمة  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x}$ .  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x / \sin x}{\sec^2 x / \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos^2 x = 1.$

١١ - احسب قيمة  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{\cot 2x}$ .  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc^2 x}{2 \csc^2 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc^2 x \cot x}{4 \csc^2 2x \cot 2x}$

إن كل تطبيق للقاعدة هنا ينتج عنه صيغة غير محددة من النمط  $\infty / \infty$  لذلك فإننا نلجأ إلى التعويض المثلثي التالي :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{\cot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 2x}{\sec^2 x} = 2$$

١٢ - بفرض أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  . برهن أنه إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$  ،

فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

بفرض  $x = 1/y$  . إذن عندما  $x \rightarrow +\infty$  فإن  $y \rightarrow 0^+$  و  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

إذن :

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-f'(1/y) \cdot y^{-2}}{-g'(1/y) \cdot y^{-2}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dy} f(1/y)}{\frac{d}{dy} g(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

١٣ - احسب قيمة  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x)$ .

عندما  $x \rightarrow 0^+$  فإن  $x^2 \rightarrow 0$  و  $\ln x \rightarrow -\infty$  ولذلك فإن  $\frac{\ln x}{1/x^2}$  صيغة غير محددة من النمط  $\infty / \infty$  .

إذن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\frac{1}{2}x^2) = 0$

١٤ -  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (1 - \tan x) \sec 2x = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\sec^2 x}{-2 \sin 2x} = 1.$

١٥ -  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{xe^x + 2e^x} = \frac{1}{2}.$

١٦ -  $\lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$

١٧ - احسب قيمة  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$ . ( هذه النهاية من النمط  $1^\infty$  )

لنضع  $y = x^{1/(x-1)}$  فيكون  $y = \frac{\ln x}{x-1}$  صيغة غير محددة من النمط  $0/0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

إذن :  $\ln y \rightarrow 1$  عندما  $x \rightarrow 1$  فإن  $y \rightarrow e$  والنهاية المطلوبة هي  $e$ .

١٨ - احسب قيمة  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tan x)^{\cos x}$ . ( هذه النهاية من النمط  $\infty^0$  )

لنضع  $y = (\tan x)^{\cos x}$  إذن  $\ln y = \cos x \ln \tan x = \frac{\ln \tan x}{\sec x}$  وهي صيغة غير محددة من النمط  $\frac{\infty}{\infty}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \ln y = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \tan x}{\sec x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec^2 x / \tan x}{\sec x \tan x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$$

وبما أن  $\ln y \rightarrow 0$  عندما  $x \rightarrow \pi/2$  فإن  $y \rightarrow 1$  والنهاية المطلوبة هي  $1$ .

١٩ - احسب قيمة  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ . ( هذه النهاية من النمط  $0^0$  )

لنضع  $y = x^{\sin x}$  إذن  $\ln y = \sin x \ln x = \frac{\ln x}{\csc x}$  وهي صيغة غير محددة من النمط  $\frac{\infty}{\infty}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\csc x \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{-x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin x \cos x}{x \sin x - \cos x} = 0$$

وبما أن  $\ln y \rightarrow 0$  عندما  $x \rightarrow 0^+$  فإن  $y \rightarrow 1$  والنهاية المطلوبة هي  $1$ .

٢٠ - احسب قيمة  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$  ، لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2+x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{x^2} + 1} = 1.$$

٢١ - إذا أثرت قوة دافعة كهربائية ثابتة مقدارها  $E$  على ملف مقاومته  $R$  وسامل حثه  $L$  فإن التيار المار

في الملف عند أية لحظة  $t$  يعطى بالمعادلة  $i = \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L})$  استنتج الصيغة التي يمكن استخدامها عندما تكون  $R$

صغيرة جداً .

$$\lim_{R \rightarrow 0} i = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{E(1 - e^{-Rt/L})}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} E \frac{t}{L} e^{-Rt/L} = \frac{Et}{L}$$

### مسائل إضافية

احسب ما يلي :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = 1$$

- ٢٥

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 256}{x - 4} = 256$$

- ٢٦

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{1 - e^x} = -1$$

- ٢٦

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 256}{x^2 - 16} = 32$$

- ٢٧

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\tan 2x} = 1/2$$

- ٢٧

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = 1/2$$

- ٢٨

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \csc x &= 1 - ٤٤ \\ \lim_{x \rightarrow 1} \csc x \ln x &= -1/x - ٤٥ \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} e^{-\tan x} \sec^2 x &= 0 - ٤٦ \\ \lim_{x \rightarrow 0} (x - \arcsin x) \csc^3 x &= -1/6 - ٤٧ \\ \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right) &= -1/4 - ٤٨ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= 0 - ٤٩ \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} (\sec^2 x - \tan^2 x) &= \infty - ٥٠ \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) &= -1/2 - ٥١ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4}{x^3} - \frac{2}{1-\cos x} \right) &= -1/3 - ٥٧ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) &= 0 - ٥٢ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= 1 - ٥٤ \\ \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x} &= 1 - ٥٥ \\ \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{1/x} &= e^3 - ٥٦ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x})^{e^x} &= 1/e - ٥٧ \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} (\sin x - \cos x)^{\tan x} &= 1/e - ٥٨ \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} (\tan x)^{\cot x} &= 1 - ٥٩ \\ \lim_{x \rightarrow 1} x^{\tan \frac{1}{2}x} &= e^{-2/e} - ٦٠ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x &= e - ٦١ \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(2+x)}{x+1} &= 1 - ٧٨ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\cos 2x - 1} &= 1/4 - ٧٩ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin x} &= 4 - ٨٠ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 2^x}{4x} &= \frac{1}{2} \ln 2 - ٨١ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - x}{2x - \arcsin x} &= 1 - ٨٢ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sec 2x}{\ln \sec x} &= 4 - ٨٣ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} &= -1/2 - ٨٤ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x} &= -3/2 - ٨٥ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} &= 0 - ٨٦ \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{\csc 6x}{\csc 2x} &= 1/3 - ٨٧ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 2 \ln x}{x + 3 \ln x} &= 5 - ٨٨ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^3}{e^x + 1} &= 0 - ٨٩ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{e^{\cot^2 x}} &= 0 - ٩٠ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x^3}{4e^x + 2x^3} &= 1/4 - ٩١ \\ \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \cot x &= 1 - ٩٧ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x &= 0 - ٩٨ \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-e^x)}{(1+x) \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1+x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\ln(1-x)} = 1, \quad (١) \text{ - احسب :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2/x}}{x^2} = 0 \quad (ج) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{3^{x^2}} = 0, \quad (ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{\infty} x}{x^3} \quad \text{و كذلك} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 x}{x^3} = 0. \quad (٦٢ - احسب :)$$

## الفصل الثالث والعشرون

### التفاضلات

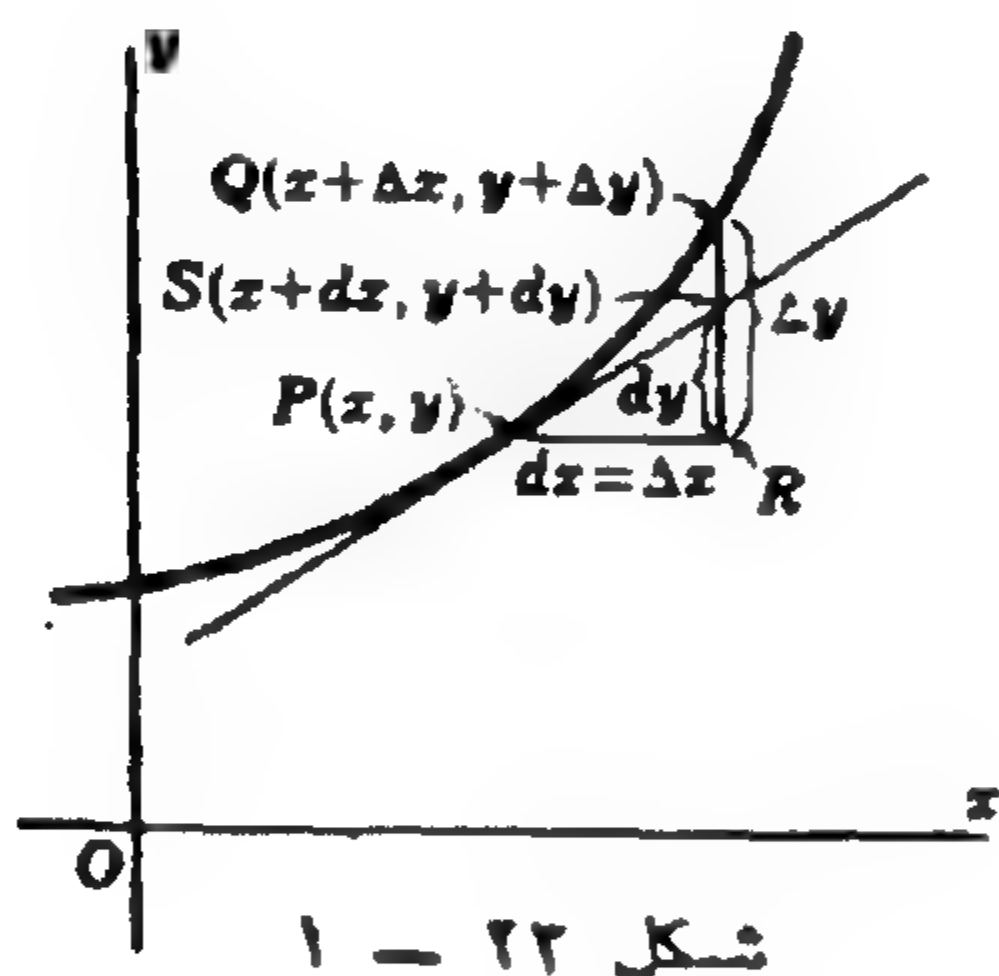
التفاضلات : ... لـ  $y = f(x)$  نعرف ما يلي :

- (أ) تعلى  $dx$  ، المسافة تفاضل  $x$  ، بالملقة  $dx = \Delta x$  .  
 (ب) تعلى  $dy$  ، المسافة تفاضل  $y$  ، بالملقة  $dy = f'(x) dx$  .

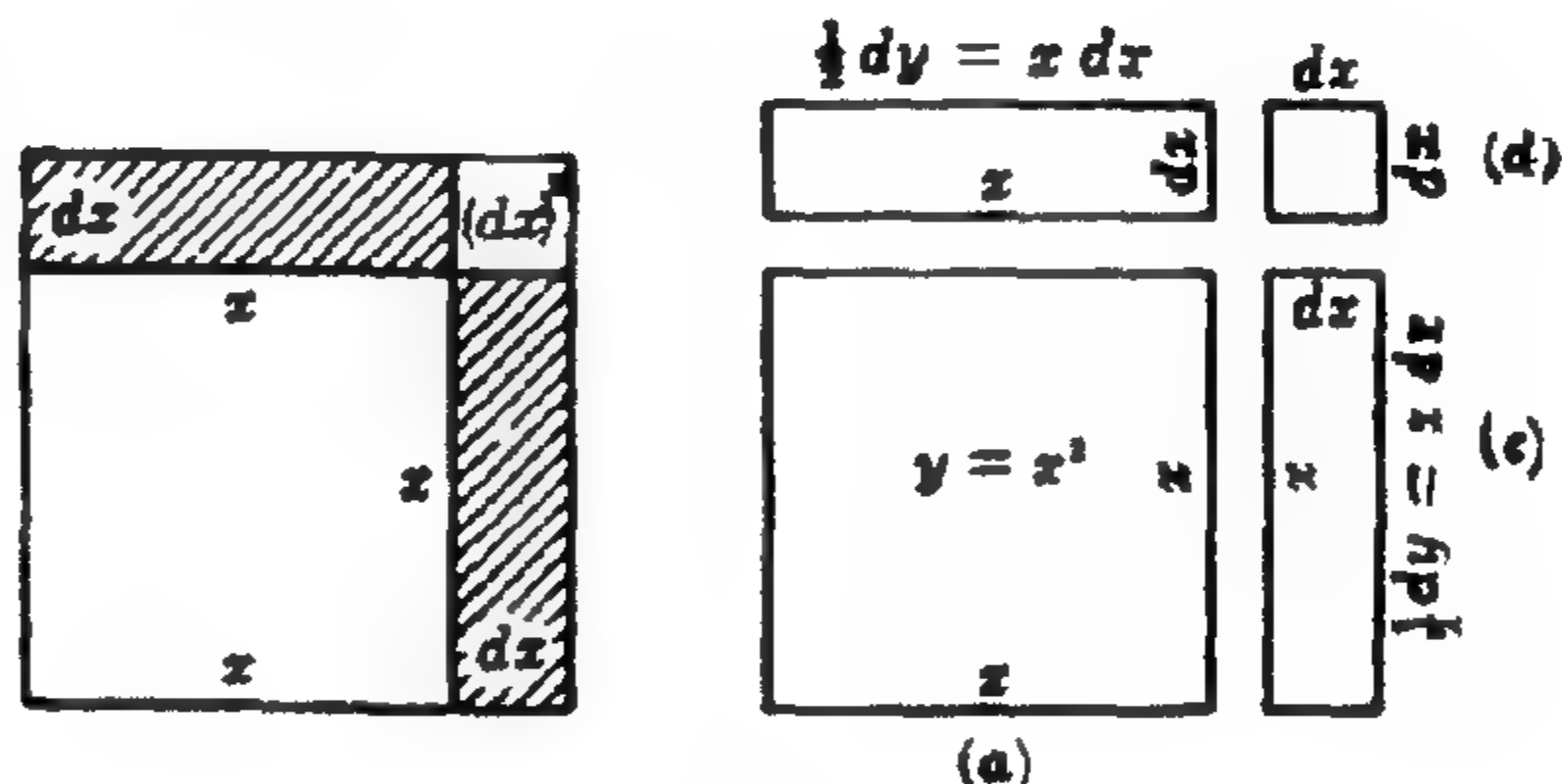
وتفاضل المتغير المستقل ، وفق التعريف ، يساوى تزايد المتغير ولكن تفاضل المتغير غير المستقل لا يساوى تزايد المتغير . انظر الشكل ٢٣ - ١

مثال ١ :

متى  $y = x^2$  فإن  $dy = 2x \cdot dx$  في حين  $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 = 2x dx + (dx)^2$  .  
 والشكل ٢٣ - ٢ يبين التوضيح الهندسى لذلك . ومن نرى أن  $\Delta y$  تختلف عن  $dy$  بالمربع الصغير الذى مساحته  $(dx)^2$  .



شكل ٢٣ - ١



شكل ٢٣ - ٢

نحصل :  $dy$  يمكن أن نحصل عليه من التعريف  $dy = f'(x) dx$  مباشرة أو باستخدام قواعد يمكن الحصول عليها من قواعد إيجاد حساب المشتقات . وبعض هذه القواعد هى :

$$d(c) = 0, \quad d(cu) = c du, \quad d(uv) = u dv + v du, \\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, \quad d(\sin u) = \cos u du, \quad d(\ln u) = \frac{du}{u}, \quad \dots \text{إلخ}$$

مثال ٢ : أوجد  $dy$  لكل ما يلي :

$$y = x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad (1)$$

$$dy = d(x^3) + d(4x^2) - d(5x) + d(6) = (3x^2 + 8x - 5) dx$$



$$y = (2x^3 + 5)^{2/3}$$

$$dy = \frac{2}{3}(2x^3 + 5)^{-1/3} d(2x^3 + 5) = \frac{2}{3}(2x^3 + 5)^{-1/3} \cdot 6x^2 dx = 4x^2(2x^3 + 5)^{-1/3} dx \quad (ب)$$

انظر المثال ١ - ٥

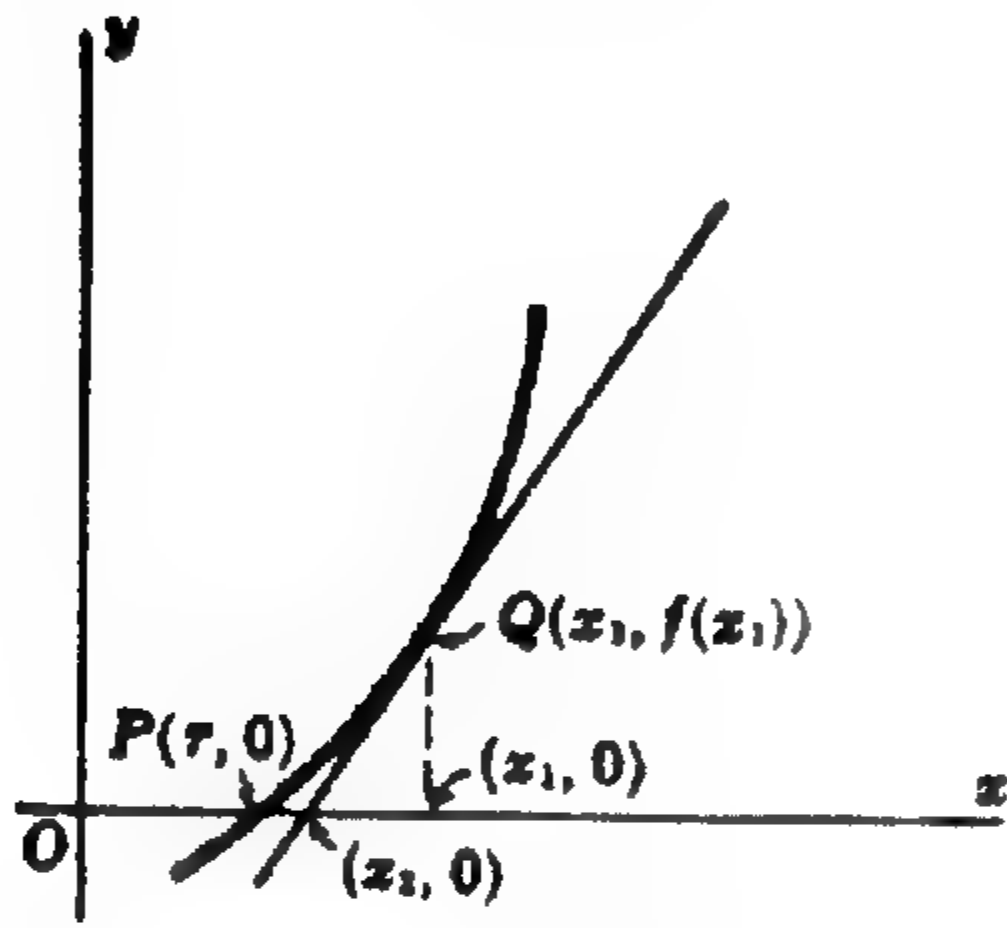
**التقريب بالتفاضل :** إذا كان  $dx = \Delta x$  صغيرا نيبا إذا ما قورن بـ  $x$  فإن  $dy$  تقريبا جيد ومناسب لـ  $\Delta y$ .

**مثال ٣ :**

ليكن  $y = x^2 + x + 1$  وبفرض أن  $x$  تغير من  $x = 2$  إلى  $x = 2.01$  إذن التغير الحقيقي في  $y$  هو  $\Delta y = \{(2.01)^2 + 2.01 + 1\} - \{2^2 + 2 + 1\} = .0501$ .

$$dy = f'(x) dx = (2x + 1) dx = \{2(2) + 1\} .01 = .05. \quad \text{ف نجد}$$

انظر المثال ٦ - ١٠



شكل ٢٢ - ٣

**تقريب جذور المعادلات :** ليكن  $x = x_1$  تقريبا مناسباً لجذر  $r$  للمعادلة

$y = f(x) = 0$  وليكن  $f(x_1) = y_1 \neq 0$  أي أن  $y_1$  لا تختلف عن

الصفر ، إلا بمقدار طفيف ، فإذا تغيرت الآن  $x_1$  إلى  $r$  فإن التغير المقابل

الذي يطرأ على  $f(x)$  هو  $\Delta y_1 = -y_1$  ونحصل على التقريب في هذا

التغير في  $x_1$  من  $f'(x_1) dx_1 = -y_1$  أو  $dx_1 = -\frac{y_1}{f'(x_1)}$  وهذا

نحصل على تقريب ثان أفضل لجذر  $r$  وهو :

$$x_2 = x_1 + dx_1 = x_1 - \frac{y_1}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

والتقريب الثالث هو  $x_3 = x_2 + dx_2 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$  وهكذا .

أما إذا كانت  $x_1$  ليست تقريبا مناسباً تماماً لجذر فإننا نجد أن  $x_2$  تختلف اختلافا واضحا عن  $x_1$  . ولكن على الرغم من أن هذه الطريقة تصح نفسها أثناء إجرائها ، إلا أنه من المستحسن أن نختار تقريبا أولا جديدا .

انظر المسألين ١١ - ١٢

## مسائل محلولة

١ - أوجد  $dy$  لكل مما يلي :

$$y = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 8} \quad (١)$$

$$dy = \frac{(x^2 + 8) \cdot d(x^3 + 2x + 1) - (x^3 + 2x + 1) \cdot d(x^2 + 8)}{(x^2 + 8)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 8)(3x^2 + 2) dx - (x^3 + 2x + 1)(2x) dx}{(x^2 + 8)^2} = \frac{x^4 + 7x^2 - 2x + 6}{(x^2 + 8)^2} dx$$

$$y = \cos^2 2x + \sin 3x. \quad (ب)$$

$$dy = 2 \cos 2x d(\cos 2x) + d(\sin 3x) = 2 \cos 2x(-2 \sin 2x dx) + 3 \cos 3x dx$$

$$= -4 \sin 2x \cos 2x dx + 3 \cos 3x dx = (-2 \sin 4x + 3 \cos 3x) dx$$

$$dy = (3e^{2x} + 2/\sqrt{1-4x^2}) dx$$

$$y = e^{2x} + \arcsin 2x. \quad (ج)$$

اشتق كل من حوال المسائل ٢ - ٥ مستخدما التفاضلات للحصول على  $dy/dx$ .

$$xy + x - 2y = 5. \quad - ٢$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y+1}{x-2}. \quad \text{ومن} \quad (x-2)dy + (y+1)dx = 0 \quad \text{أو} \quad \begin{aligned} d(xy) + d(x) - d(2y) &= d(5). \\ xdy + ydx + dx - 2dy &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2y^3 - 2x^2y + 3xy^3 - 8xy = 6. \quad - ٣$$

$$2x^2y dy + 3x^2y^3 dx - 2x^2 dy - 4xy dx + 6xy dy + 3y^3 dx - 8x dy - 8y dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3y^3 + 4xy - 3x^2y^3}{2x^2y - 2x^2 + 6xy - 8x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y + 3y^3}{3xy^3 + 2x^2} \quad \text{ومن} \quad 2\left(\frac{y dx - x dy}{y^2}\right) - 3\left(\frac{x dy - y dx}{x^2}\right) = 0, \quad \frac{2x}{y} - \frac{3y}{x} = 8. \quad - ٤$$

$$x = 3 \cos \theta - \cos 3\theta, \quad y = 3 \sin \theta - \sin 3\theta. \quad - ٥$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \theta - \cos 3\theta}{-\sin \theta + \sin 3\theta} \quad \text{ومن} \quad dx = (-3 \sin \theta + 3 \sin 3\theta) d\theta, \quad dy = (3 \cos \theta - 3 \cos 3\theta) d\theta,$$

٦ - استظم التفاضلات لحساب قيمة تقريبية لـ  $\sqrt[3]{124}$  (أ)  $\sin 60^\circ 1'$  (ب)

$$(أ) \quad \text{عندما} \quad y = x^{1/3}, \quad \text{يكون} \quad dy = \frac{1}{3x^{2/3}} dx. \quad \text{وبأخذ} \quad x = 125 = 5^3 \quad \text{و} \quad dx = -1, \quad \text{إذن}$$

$$\sqrt[3]{124} = y + dy = 5 - 0.0133 = 4.9867. \quad dy = \frac{1}{3(125)^{2/3}}(-1) = \frac{-1}{75} = -0.0133$$

$$(ب) \quad \text{عندما} \quad x = 60^\circ \quad \text{و} \quad dx = 1' = 0.0003 \text{ rad.} \quad \text{يكون} \quad y = \sin x = \sqrt{3}/2 = 0.86603$$

$$\text{و} \quad dy = \cos x dx = \frac{1}{2}(0.0003) = 0.00015. \quad \text{و عندئذ يكون التقريب}$$

$$\sin 60^\circ 1' = y + dy = 0.86603 + 0.00015 = 0.86618.$$

٧ - احسب  $\Delta y - dy$  و  $dy$  و  $\Delta y$  بفرض أن  $x = 2$  و  $dx = 0.5$  و  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x$ .

$$\Delta y = \left\{ \frac{1}{2}(2.5)^2 + 3(2.5) \right\} - \left\{ \frac{1}{2}(2)^2 + 3(2) \right\} = 2.625.$$

$$dy = (x+3)dx = (2+3)(0.5) = 2.5 \quad \Delta y - dy = 2.625 - 2.5 = 0.125.$$

٨ - أوجد التغير التقريبي في حجم مكعب طول ضلعه  $x$  cm الناتج عن زيادة أطوال أضلاعه بـ 1%.

$$\text{إن} \quad V = x^3 \quad \text{و} \quad dV = 3x^2 dx \quad \text{و عندما يكون} \quad dx = 0.01x \quad \text{فإن} \quad dV = 3x^2(0.01x) = 0.03x^3 \text{ cm}^3$$

٩ - أوجد الكتلة التقريبية لأتربة من النحاس طولها 2 m وقطرها الداخل 2.5 cm وسمكها 0.25 cm علما بأن كثافة النحاس  $8800 \text{ kgm}^{-3}$ .

نجد أولا التغير في الحجم عندما يتغير نصف القطر  $r = 1/80 \text{ m}$  بالمقدار  $dr = 1/400 \text{ m}$ .

$$V = 2\pi r^3 \quad \text{and} \quad dV = 4\pi r^2 dr = 4\pi(1/80)(1/400) = \pi/8000 \text{ m}^3$$

والكتلة المطلوبة هي:  $8800(\pi/8000) = 3.46 \text{ kg}$

١٠ - لأية قيمة لـ  $x$  يمكن استخدام  $\sqrt[3]{x}$  بدلا من  $\sqrt[3]{x+1}$  إذا كان الخطأ المسوح به أقل من 0.001 ؟

$$\text{عندما يكون } y = x^{1/3} \text{ و } dx = 1 \text{ فإن } dy = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx = \frac{1}{3}x^{-2/3}. \text{ وإذا كان } \frac{1}{3}x^{-2/3} < 10^{-3}, \text{ فإن } x^{-2/3} < 3 \cdot 10^{-3}, \text{ ومنه } x^{-4} < 9 \cdot 10^{-6}.$$

$$\text{وإذا كان } x^{-4} < 10 \cdot 9 \cdot 10^{-6}, \text{ فإن } x^4 > \frac{10^{10}}{81 \cdot 250} = 752.1. \text{ ومنه } x > \sqrt[4]{31250}.$$

١١ - احسب بالتقريب الجذور الحقيقية لـ  $x^3 + 2x - 5 = 0$  أو  $x^3 = 5 - 2x$ .

(أ) ارسم على نفس المحاور المنحنيان  $y = x^3$  و  $y = 5 - 2x$  إن الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين هي جذور المعادلة المفروضة ويبدو من الرسم أن هناك جذرا واحدا قيمة التقريبية  $x_1 = 1.3$ .

(ب) والتقريب الثاني للجذر هو

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.3 - \frac{(1.3)^3 + 2(1.3) - 5}{3(1.3)^2 + 2} = 1.3 - \frac{-2.03}{7.07} = 1.3 + .03 = 1.33$$

لقد تم إجراء القسمة بحيث نحصل على رقبين عشرين ، لأن هناك صفرا واحدا فقط يل الفاصلة العشرية مباشرة . وهذا يتفق مع النظرية القائلة إنه إذا حدث أن حصلنا عند إجراء قسمة ما على  $k$  صفرا تل الفاصلة العشرية مباشرة في حاصل القسمة فإنه يمكن إجراء القسمة بحيث نحصل على  $2k$  رقما عشريا .

(ج) التقريبان الثالث والرابع هما

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.33 - \frac{(1.33)^3 + 2(1.33) - 5}{3(1.33)^2 + 2} = 1.33 - .0017 = 1.3283$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.3283 - .00003114 = 1.32826886$$

١٢ - أوجد القيم التقريبية لجذور المعادلة  $2 \cos x - x^2 = 0$ .

(أ) إن المنحنيين  $y = 2 \cos x$  و  $y = x^2$  يتقاطعان في نقطتين واحداتهما السيني هما 1 و -1 تقريبا . لاحظ أنه إذا كان  $r$  جذرا فإن  $-r$  هو الجذر الآخر .

$$(ب) \text{ بأخذ } x_1 = 1 \text{ نجد } x_2 = 1 - \frac{2 \cos 1 - 1}{-2 \sin 1 - 2} = 1 + \frac{2(.5403) - 1}{2(.8415) + 2} = 1 + .02 = 1.02.$$

$$(ج) x^3 = 1.02 - \frac{2 \cos (1.02) - (1.02)^2}{-2 \sin (1.02) - 2(1.02)} = 1.02 + \frac{.0064}{3.7442} = 1.02 + .0017 = 1.0217.$$

وهكذا فإن الجذرين مقربين لأربعة أرقام عشرية هما 1.0217، -1.0217 .

### مسائل إضافية

١٣ - أوجد  $dy$  لكل من السوال التالية :

$$(أ) y = (5-x)^3 : \text{ ج } -3(5-x)^2 dx \quad (ب) y = \cos bx^3 : \text{ ج } -2bx \sin bx^3 dx$$

$$(ج) y = e^{ax^2} : \text{ ج } 2axe^{ax^2} dx \quad (د) y = \arccos 2x : \text{ ج } \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$(هـ) y = (\sin x)/x : \text{ ج } \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx \quad (و) y = \ln \tan x : \text{ ج } \frac{2 dx}{\sin 2x}$$

١٤ - أوجد  $dy/dx$  كافي المائل ٢ - هـ

$$\begin{aligned} & \frac{2x+y}{x-2y} : \text{ح } \arctan \frac{y}{x} = \ln(x^2+y^2) \text{ (ج) } - \frac{2y(y^2+3x)}{3x(2y^2+x)} : \text{ح } 2xy^3+3x^2y=1 \text{ (أ)} \\ & - \frac{(2x^3 \ln y + y^3)y}{(2y^3 \ln x + x^3)x} : \text{ح } x^3 \ln y + y^3 \ln x = 2 \text{ (د) } \frac{\cos(x-y)-y}{\cos(x-y)+x} : \text{ح } xy = \sin(x-y) \text{ (ب)} \end{aligned}$$

١٥ - استخدم التفاضلات لحساب القيم التقريبية لـ (أ)  $\sqrt[3]{17}$ , (ب)  $\sqrt[3]{1020}$ , (ج)  $\cos 59^\circ$ , (د)  $\tan 44^\circ$ .

ج : (أ) 2.0312, (ب) 3.99688, (ج) 0.5151, (د) 0.9651

١٦ - استخدم التفاضل لحساب القيمة التقريبية لتغير في (أ)  $x^3$  عندما تتغير  $x$  من 5 إلى 5.01 (ب)  $1/x$  عندما تتغير  $x$  من 1 إلى 0.98.

ج : (أ) 0.75 (ب) 0.02

١٧ - تتمدد صفيحة دائرية تحت تأثير الحرارة بحيث يزداد نصف القطر من 12.5 cm إلى 12.65 cm. أوجد الزيادة التقريبية في المساحة. ج :  $11.79 \text{ cm}^2 - 3.75\pi$ ١٨ - يتقلص نصف قطر كرة من الثلج من 10 cm إلى 9.8 cm. احسب القيمة التقريبية لتناقص في (أ) الحجم (ب) مساحة السطح. ج : (أ)  $80 \pi \text{ cm}^3$  (ب)  $16 \pi \text{ cm}^2$ ١٩ - تعطى السرعة ( $v \text{ ms}^{-1}$ ) التي يكتبها جسم يسقط طليقا مسافة قدرها  $h \text{ m}$  بـ  $v = \sqrt{19.6h}$ . أوجد الخطأ في السرعة نتيجة خطأ في القياس قدره 0.15 m، عندما كانت قيمة  $h$  المقاسة هي 30 m. ج :  $0.061 \text{ ms}^{-1}$ 

٢٠ - إذا طار طيار بورة كاملة حول الكرة الأرضية على ارتفاع 2 km فوق خط الاستواء. كم تزيد المسافة التي يقطعها عن المسافة التي يقطعها رجل يتحرك على خط الاستواء؟ ج : 12.6 km

٢١ - إذا كان المطلوب قياس نصف قطر دائرة وحساب مساحتها. وإذا كان نصف القطر يمكن قياسه إلى 0.001 cm وكان الخطأ المسموح به في حساب المساحة لا يتجاوز  $0.1 \text{ cm}^2$ ، فأوجد أقصى نصف قطر يمكن استخدام هذه الطريقة به. ج : 16 cm تقريبا.٢٢ - إذا كانت  $pV = 20$  وقيست  $p$  فوجدت  $5 \pm 0.02$  فأوجد  $V$  ج :  $4 \pm 0.016$ ٢٣ - إذا كانت  $F = 1/r^2$  وقيست  $F$  فوجدت  $4 \pm 0.05$  فأوجد  $r$ . ج :  $0.5 \pm 0.003$ 

٢٤ - أوجد التغير الذي يطرأ على المساحة الكلية لقروط دائري قائم عندما (أ) يبقى نصف القطر ثابتا بينما يتغير الارتفاع بمقدار طفيف (ب) يبقى الارتفاع ثابتا بينما يتغير نصف القطر بمقدار طفيف.

$$\text{ج : (أ) } \frac{\pi r h dh}{\sqrt{r^2 + h^2}} \text{ (ب) } \left\{ \frac{h^2 + 2r^2}{\sqrt{r^2 + h^2}} + 2r \right\} dr$$

٢٥ - أوجد بالتقريب إلى أربعة أرقام عشرية (أ) الجذر الحقيقي للمعادلة  $x^3 + 3x + 1 = 0$  (ب) أصغر جذر للمعادلة  $e^{-x} = \sin x$  (ج) جذر المعادلة  $2 - \ln x = x^2$  (د) جذر المعادلة  $x - \cos x = 0$ .

ج : (أ) -0.3222 (ب) 0.5885 (ج) 1.3141 (د) 0.7391

## الفصل الرابع والعشرون

### رسم المنحنيات

**المنحنى الجبري المستوى :** هو منحنى يمكن أن تكتب معادته بالشكل

$$ay^n + (bx + c)y^{n-1} + (dx^2 + ex + f)y^{n-2} + \dots + u_1(x) = 0$$

حيث  $u_1(x)$  كثير حدود في  $x$  من الدرجة  $n$  . وفيما يلي مناقشة خواص المنحنيات الجبرية .

**التمثيل :** يكون المنحنى متماثلاً بالنسبة لـ :

- ( ١ ) محور السينات إذا لم تتغير معادته عندما نبدل  $y$  بـ  $-y$  .
- ( ٢ ) محور الصادات إذا لم تتغير معادته عندما نبدل  $x$  بـ  $-x$  .
- ( ٣ ) نقطة الأصل إذا لم تتغير معادته عندما نبدل  $x$  بـ  $-x$  و  $y$  بـ  $-y$  في آن واحد .
- ( ٤ ) المستقيم  $y = x$  إذا لم تتغير معادته عندما نبادل بين  $x$  و  $y$  .

**التقاطع مع المحاور :** نحصل على نقط التقاطع مع المحور  $x$  بأن نضع  $y = 0$  في المعادلة ثم نحل المعادلة بالنسبة لـ  $x$  . ونحصل على نقط التقاطع مع المحور  $y$  بأن نضع  $x = 0$  ونحل المعادلة بالنسبة لـ  $y$  .

**الحيز :** يطل الحيز الأفقي على  $x$  أي بفترة  $x$  التي يوجد فيها المنحنى . ويطل الحيز الرأسي للمنحنى على  $y$  . ونقول عن نقطة  $(x_0, y_0)$  إنها نقطة منزلة بالنسبة للمنحنى إذا حقق احداثياتها معادلة المنحنى في الوقت الذي لا تتحقق فيه المعادلة باحداثيات النقط المجاورة لها .

**نقط النهاية المظلمة والصفرى :** ونقط الانعطاف وجهة تقعر المنحنى . لقد تم مناقشة هذه النقط في الفصل الثامن .

**المستقيمت المقاربة :** المستقيم المقارب لمنحنى لا نهائى في الامتداد هو مستقيم يقترب وضعه في النهاية ، من مستقيم قاطع للمنحنى عندما تذهب نقطتين من نقط تقاطعه مع المنحنى إلى اللانهاية .

ويكون المنحنى ، الذي معادته على الشكل المذكور أعلاه ، مستقيمت مقاربة رأسية إذا كان معامل أهل قوة في  $y$  عبارة عن دالة غير ثابتة في  $x$  لها مضروب خطي ( حقيقى ) واحد أو أكثر . ويوافق كل مضروب منها مستقيم مقارب رأسى .

ويكون المنحنى ، الذي معادته على الشكل  $ax^n + (by + c)x^{n-1} + (dy^2 + ey + f)x^{n-2} + \dots = 0$  ، مستقيمت مقاربة أفقية إذا كان معامل أهل قوة في  $x$  عبارة عن دالة غير ثابتة في  $y$  ولها مضروب خطي ( حقيقى ) واحد أو أكثر . ويوافق كل مضروب منها مستقيم مقارب أفقى .



ولاحصول على معادلات المستقيمات المقاربة المائلة :

( ١ ) نبدل  $y$  بـ  $mx + b$  في معادلة المنحنى ونرتب النتيجة على الشكل :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

( ٢ ) نحل المعادلتين  $a_0 = 0$  و  $a_1 = 0$  آنيا بالنسبة لـ  $m$  و  $b$  .

( ٣ ) لكل زوج من الحلول  $m$  و  $b$  نكتب معادلة المستقيم المقارب  $y = mx + b$  .

إذا صادف أن كانت  $a_1 = 0$  مستقلة عن قيمة  $b$  فإنه ينبغي استخدام المعادلتين  $a_0 = 0$  و  $a_2 = 0$  في الخطوة ( ٣ ) .

**النقط المفردة :** النقطة المفردة لمنحنى جبرى هي النقطة التي يكون عندها قيمة  $dy/dx$  غير محددة من النمط  $0/0$  .

ولتعيين مواضع النقط المفردة لمنحنى فإنه يجب الحصول على  $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(x)}$  دون إجراء أى اختصار لأى عوامل مشتركة ، ثم نوجد الجذور المشتركة للمعادلتين  $g(x) = 0$  و  $h(x) = 0$  .

وإذا كانت  $(x_0, y_0)$  نقطة مفردة لمنحنى ، فإنه يمكن تبسيط أية دراسة إضافية للمنحنى بإجراء التحويض  $x = x' + x_0$  ،  $y = y' + y_0$  حيث تصبح النقطة المفردة هي النقطة  $(0,0)$  في الإحداثيات الجديدة .

**التقط المفردة عند نقطة الأصل :** عندما تقع نقطة الأصل على منحنى فإنه يمكن وضع معادلة هذا المنحنى بالشكل .

$$(a_1 x + b_1 y) + (a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2) + (a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 xy^2 + d_3 y^3) + \dots = 0$$

فإذا كان  $a_1 = b_1 = 0$  فإن نقطة الأصل هي نقطة مفردة للمنحنى .

وإذا كان  $a_1 = b_1 = 0$  ولكن لم تكن جميع  $a_2, b_2, c_2$  أصفارا فإننا نسمى النقطة المفردة نقطة ثنائية .

أما إذا كان  $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$  ولكن لم تكن جميع  $a_3, b_3, c_3, d_3$  أصفارا فإننا نسمى النقطة المفردة نقطة ثلاثية وهكذا .

**تصنيف النقطة الثنائية عند نقطة الأصل :**

( ١ ) الحالة :  $c_2 \neq 0$  .

( ١ ) نضع  $mx$  بدلا من  $y$  في الحدود  $a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2$  فنحصل على  $(c_2 m^2 + b_2 m + a_2)x^2$  .

( ٢ ) نحل المعادلة  $c_2 m^2 + b_2 m + a_2 = 0$  بالنسبة لـ  $m$  .

إذا كان الجذران  $m_1, m_2$  حقيقيين ومختلفين فإن المنحنى مماسين مختلفين  $y = m_1 x$  و  $y = m_2 x$  عند نقطة الأصل والنقطة الثنائية في هذه الحالة عقدة .

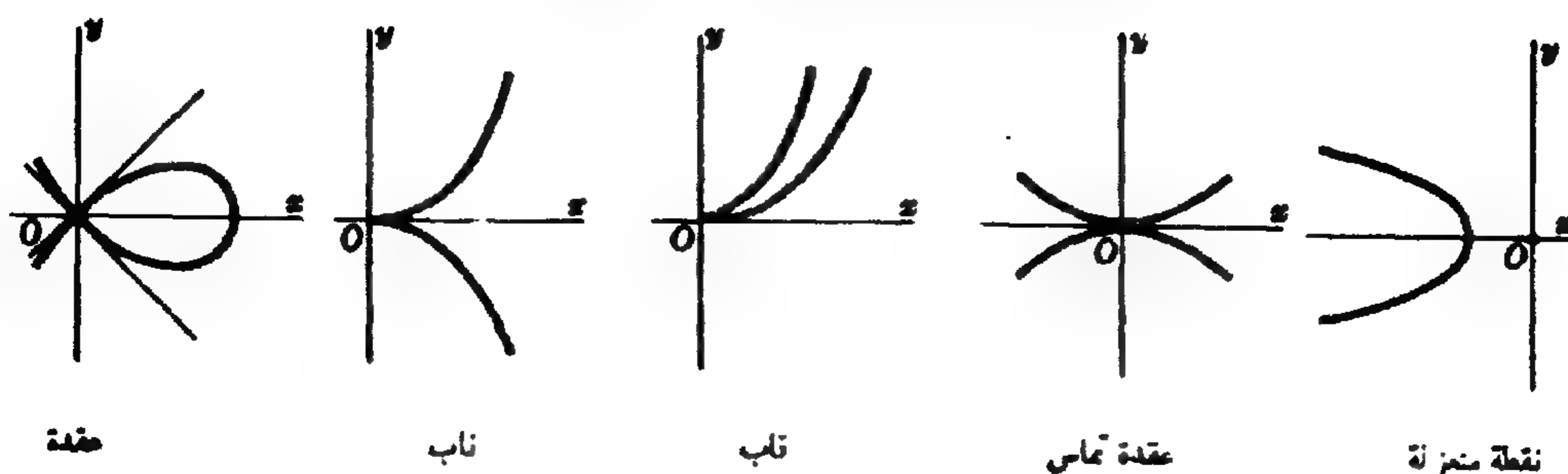
وإذا كان الجذران حقيقيين ومتساويين فنحن إذًا يكون المنحنى مماس واحد عند نقطة الأصل ونسمى النقطة الثنائية :

( ١ ) ناب المنحنى إذا لم يستمر المنحنى مارا بنقطة الأصل .

( ٢ ) عقدة تماس إذا استمر المنحنى مارا بنقطة الأصل .

وقد تكون نقطة الأصل في حالات استثنائية نقطة منزلة .

وإذا كانت الجذور تخيلية فإن نقطة الأصل نقطة منزلة ثنائية .



شكل ٢٤ - ١

(ب) الحالة :  $c_2 = 0, a_2 \neq 0$ .

نضع  $ny$  بدلا من  $x$  في الحدود  $a_2x^2 + b_2xy$  ونجرب الخطوات كافي (١).

(ج) الحالة :  $a_2 = c_2 = 0, b_2 \neq 0$ .

نقطة الأصل عقدة والماسان هناك هما المحوران الاحداثيان.

### مسائل محلولة

#### المستقيمات المقاربة :

١- أوجد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى  $y^2(1+x) = x^2(1-x)$ .  
إن معامل أهل قوة  $y$  هو  $(1+x)$  ولذلك فالمستقيم  $x+1=0$  خط مقارب رأسى . وحيث أن معامل أهل قوة  $x$  ثابت فإنه لا يوجد خطوط مقاربة أفقية .

ولاحصول على المستقيمات المقاربة المائلة نضع  $mx+b$  بدلا من  $y$  فنحصل على

$$(m^2+1)x^3 + (m^2+2mb-1)x^2 + b(b+2m)x + b^2 = 0 \quad (١)$$

وحل المعادلتين الناتجتين من مساواة كل من معامل أهل قوتين  $x$  بالصفر ، آتيا

$$m^2+1=0 \quad \text{و} \quad m^2+2mb-1=0$$

تخيل وبالتالي ليس هناك مستقيمات مقاربة مائلة ( انظر الشكل ٢٤ - ٢ ) .

$$٢- \text{أوجد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى} \quad x^2+y^2-6x^2=0$$

ليس هناك خطوط مقاربة رأسية أو أفقية لأن معاملات أهل قوة لكل من  $x$  و  $y$  ثابت . ولحصول على المستقيمات المقاربة المائلة فإننا نضع  $mx+b$  بدلا من  $y$  فنحصل على :

$$(١) \quad (m^2+1)x^3 + 3(m^2b-2)x^2 + 3mb^2x + b^2 = 0$$

وحل المعادلتين  $m^2+1=0$  و  $m^2b-2=0$  آتيا فنجد أن  $b=2$  ،  $m=-1$  إذن معادلة المستقيم المقارب هي  $y = -x + 2$  .

وإذا عوضنا بالقيم  $m=-1$  و  $b=2$  في المعادلة (١) فإن المعادلة تأخذ الشكل  $-12x+8=0$  فهناك إذن نقطة تقاطع جديدة للمنحنى مع خطه المقارب احداثياتها السني  $x=2/3$  . ( انظر الشكل ٢٤ - ٣ )

$$٣ - \text{أوجد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى} \quad y^2(x-1) - x^2 = 0$$

حيث أن معامل أعلى قوة  $y$  هو  $(x-1)$  إذن فالمستقيم  $x-1=0$  مستقيم مقارب رأسي ولا يوجد مستقيمتان مقاربتان أفقية .

ولاحصول على المستقيمتان المقاربتان المائلة نضع  $mx+b$  بدلا من  $y$  فنحصل على :

$$(m^2-1)x^3 + m(2b-m)x^2 + b(b-2m)x - b^2 = 0$$

وبحل المعادلتين  $m^2-1=0$  و  $m(2b-m)=0$  آتيا فإننا نجد  $b=-1/2$  و  $m=1$  ،  $b=1/2$  ،  $m=-1$  . إذن معادلتى المستقيمين المقاربين هما  $y = x + 1/2$  و  $y = -x - 1/2$  .

ويقطع المستقيم المقارب  $y = x + 1/2$  المنحنى في نقطة محددة واحداتها السيني يعطى بـ  $x-1/4=0$   $(1/2-2)$  أى أن  $x = -1/3$  . والاحداثى السيني لنقطة التقاطع المحددة للمنحنى مع المستقيم المقارب  $y = -x - 1/2$  . ( انظر الشكل ٢٤ - ١ ) هو أيضا  $-1/3$

#### النقط المفردة :

$$٤ - \text{ابحث في النقط المفردة للمنحنى} \quad y^2(1+x) = x^2(1-x)$$

إن حدود الدرجة الأدنى هي من الدرجة الثانية إذن فنقطة الأصل نقطة ثنائية . وبما أن  $c_2 \neq 0$  أى أن حد ذو قوة موجود وبوضع  $mx$  بدلا من  $y$  في الحدين  $x^2 - y^2$  ومساواة معامل  $x^2$  بالصفر نحصل على  $m^2 - 1 = 0$  إذن  $m = \pm 1$  والمستقيمان  $y = x$  و  $y = -x$  هما من المنحني عند نقطة الأصل ، ونقط الأصل هي عقدة . ( انظر الشكل ٢٤ - ٢ )

$$٥ - \text{ابحث في النقط الشاذة للمنحنى} \quad x^3 + y^3 - 6x^2 = 0$$

إن حدود الدرجة الأدنى هي من الدرجة الثانية إذن فنقطة الأصل نقطة ثنائية . وبما أن  $c_2 = 0$  وبوضع  $ny$  بدلا من  $x$  في حدود الدرجة الأدنى ومساواة معامل  $y^2$  بالصفر فنحصل على  $n^2 = 0$  لذلك فإنه يوجد تماس وحيد  $x=0$  للمنحنى عند نقطة الأصل . ونقطة الأصل هي نقطة ناب للمنحنى لأنه إذا وضعنا  $y = -x$  فإن المعادلة  $0 = 6x^3 - 6x^2 - 6x^3$  هي استنادا إلى قاعدة ديكارت في الإشارات ، جذرا موجبا واحدا وجذرين تخيليين وبالتالي فإن المنحنى لا يستر مارا بنقطة الأصل . ( انظر الشكل ٢٤ - ٣ )

$$٦ - \text{ابحث في النقط المفردة للمنحنى} \quad y^2(x-1) - x^2 = 0$$

إن حدود الدرجة الأدنى هي من الدرجة الثانية إذن فنقطة الأصل نقطة ثنائية . وبما أن  $c_2 \neq 0$  وبوضع  $mx$  بدلا من  $y$  في حدود الدرجة الأدنى ثم مساواة معامل  $x^2$  بالصفر فنحصل على  $m^2 = 0$  ونقطة الأصل هي نقطة ناب لأن  $y$  معرفة عندما  $x < 0$  وتخيلية عندما  $0 < x < 1$  . ( انظر الشكل ٢٤ - ١ )

$$٧ - \text{ابحث ( أ ) في النقط الشاذة (ب) في المستقيمتان المقاربتان للمنحنى} \quad y^2(x^2-4) = x^2$$

( أ ) إن نقطة الأصل نقطة ثنائية . وبما أن  $a_2 = b_2 = 0$  و  $c_2 \neq 0$  فإن النتيجة التي نحصل عليها من وضع  $y = mx$  والمساواة بالصفر هي  $m^2 = 0$  . ونقطة الأصل التي نحصل عليها نقطة ثنائية منزلة لأن  $y$  تخيلية عندما يكون  $x$  قريبة من 0 .

(ب) المستقيمان  $x = 2$  و  $x = -2$  خطان مقاربان رأسيان .

ولاحصول على المستقيمتان المقاربتان المائلة نضع  $mx+b$  بدلا من  $y$  فنحصل على :

$$(m^2-1)x^4 + 2mbx^3 + (b^2-4m^2)x^2 - 8mbx - 4b^2 = 0$$

وبحل المعادلتين  $m^2 - 1 = 0$  و  $mb = 0$  آتينا نجد  $m = 1 : b = 0$  و  $m = -1 : b = 0$  ومعادلتى المنحنيين المقاربتين هما  $y = x$  و  $y = -x$  .  
والمنحنيين المقاربين يقطعان المنحنى عند نقطة الأصل . ( انظر الشكل ٢٥ - ٥ ) .

### رسم المنحنيات :

٨ - ادرس المنحنى  $y^2(1+x) = x^2(1-x)$  وارسمه .

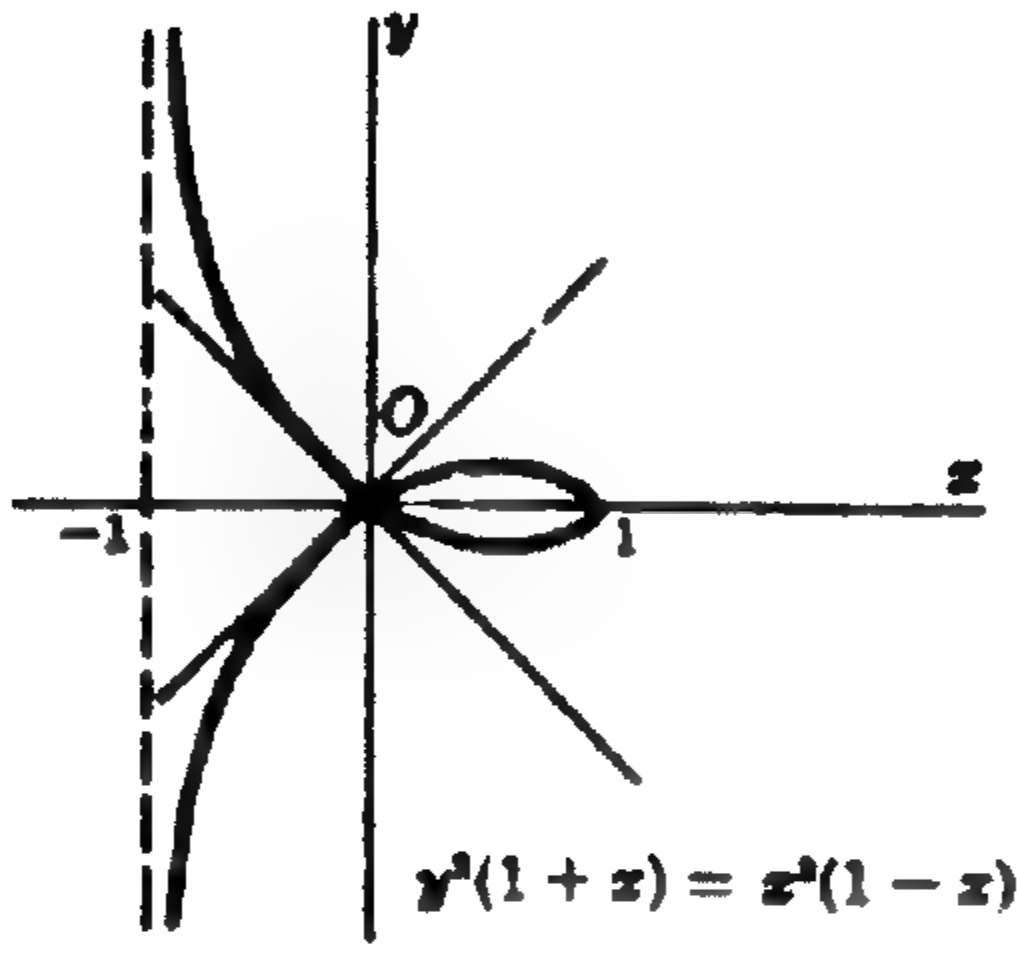
التماثل : إن المنحنى متماثل بالنسبة لمحور السينات .

التقاطع مع المحاور : إن المنحنى يقطع المحور السينى  $x$  في  $x = 0$  و  $x = 1$  و يقطع المحور الصادى في  $y = 0$  .

الحيز : إن المنحنى موجود في الفترة  $-1 < x \leq 1$  و لجميع قيم  $y$  .

القيم العظمى والصغرى الخ : يتكون المنحنى من فرعين هما

$$y = \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \text{ و } y = -\frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \text{ والفرع الأول يكون}$$



شكل ٢٤ - ٢

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x-2}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{3/2}} \text{ و } \frac{dy}{dx} = \frac{1-x-x^2}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}}$$

والقيم الحرجة هي  $x = 1$  و  $x = (-1 + \sqrt{5})/2$  والنقطة  $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, -\frac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2})$  نقطة نهاية عظمى . ولا يوجد نقطة انعطاف والفرع مقعر لأسفل .

ويوجد ، بالتماثل ، نقطة نهاية صغرى عند  $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2})$  والفرع الثانى مقعر لأعلى .

الخطوط المقاربة : من المسألة (١) نجد أن المستقيم  $x = -1$  هو مستقيم مقارب .

النقط المفردة : من المسألة ٤ نجد أن نقطة الأصل هي عقدة وأنه يوجد مماسان ( النقطة الثنائية أو نقطة العقدة ) هما  $y = x$  و  $y = -x$  .

( انظر الشكل ٢٤ - ٢ )

٩ - ادرس المنحنى  $y^2 - x^2(6-x) = 0$  وارسمه .

التماثل : لا يوجد تماثل .

التقاطع مع المحاور : نقطة التقاطع هي  $y = 0$  و  $x = 6$  و  $x = 0$  .

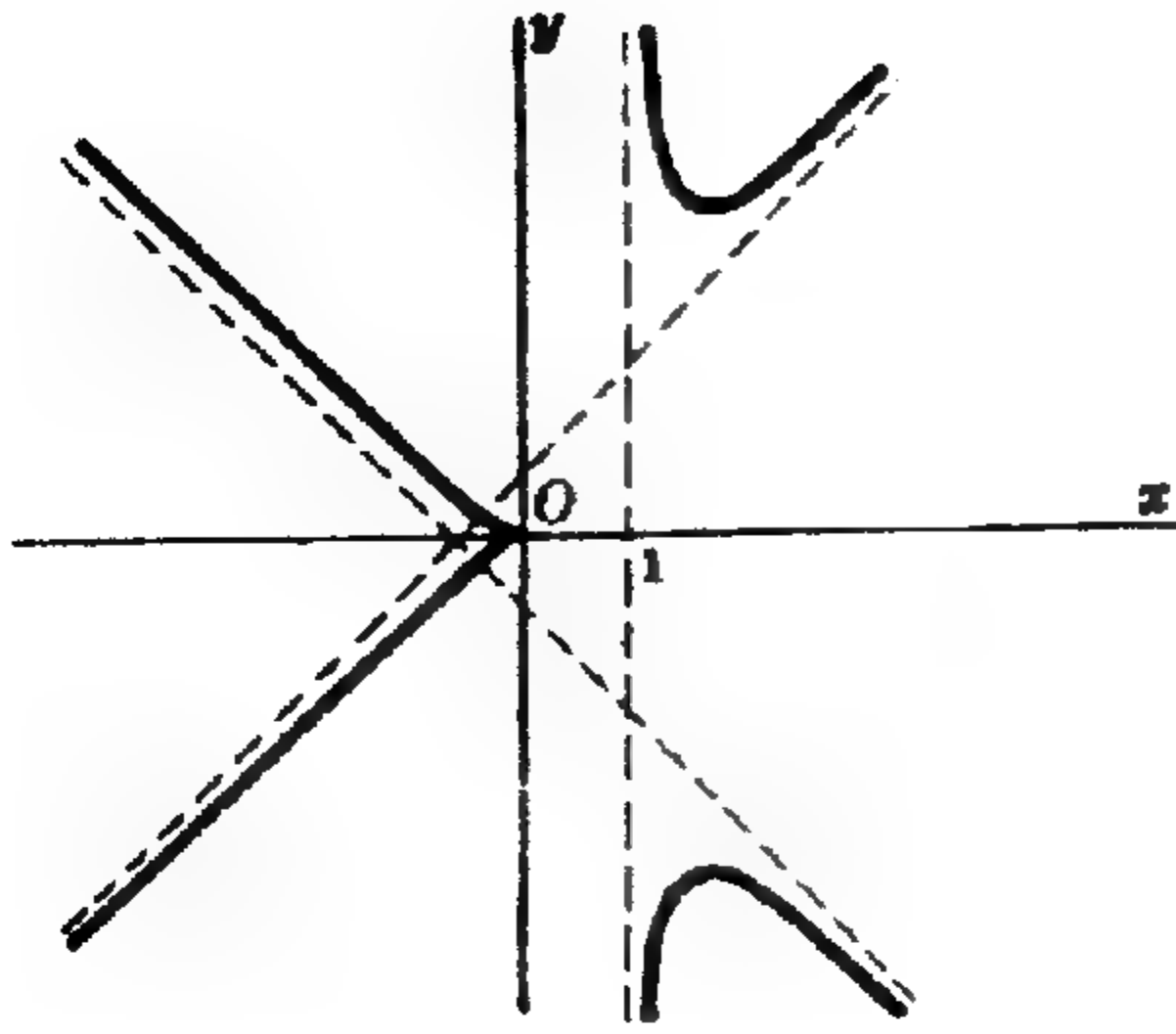
الحيز : المنحنى معرف وموجود لجميع قيم  $x$  و  $y$  .

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{4/3}} \text{ و } \frac{dy}{dx} = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \text{ إن}$$

والقيم الحرجة هي  $x = 0, 4, 6$  والنقطة  $(0,0)$  نقطة نهاية صغرى والنقطة  $(4, 2\sqrt[3]{4})$  نقطة نهاية عظمى ، والنقطة  $(6, 0)$  نقطة انعطاف والمنحنى مقعر لأسفل إلى اليسار ومقعر لأعلى إلى اليمين .

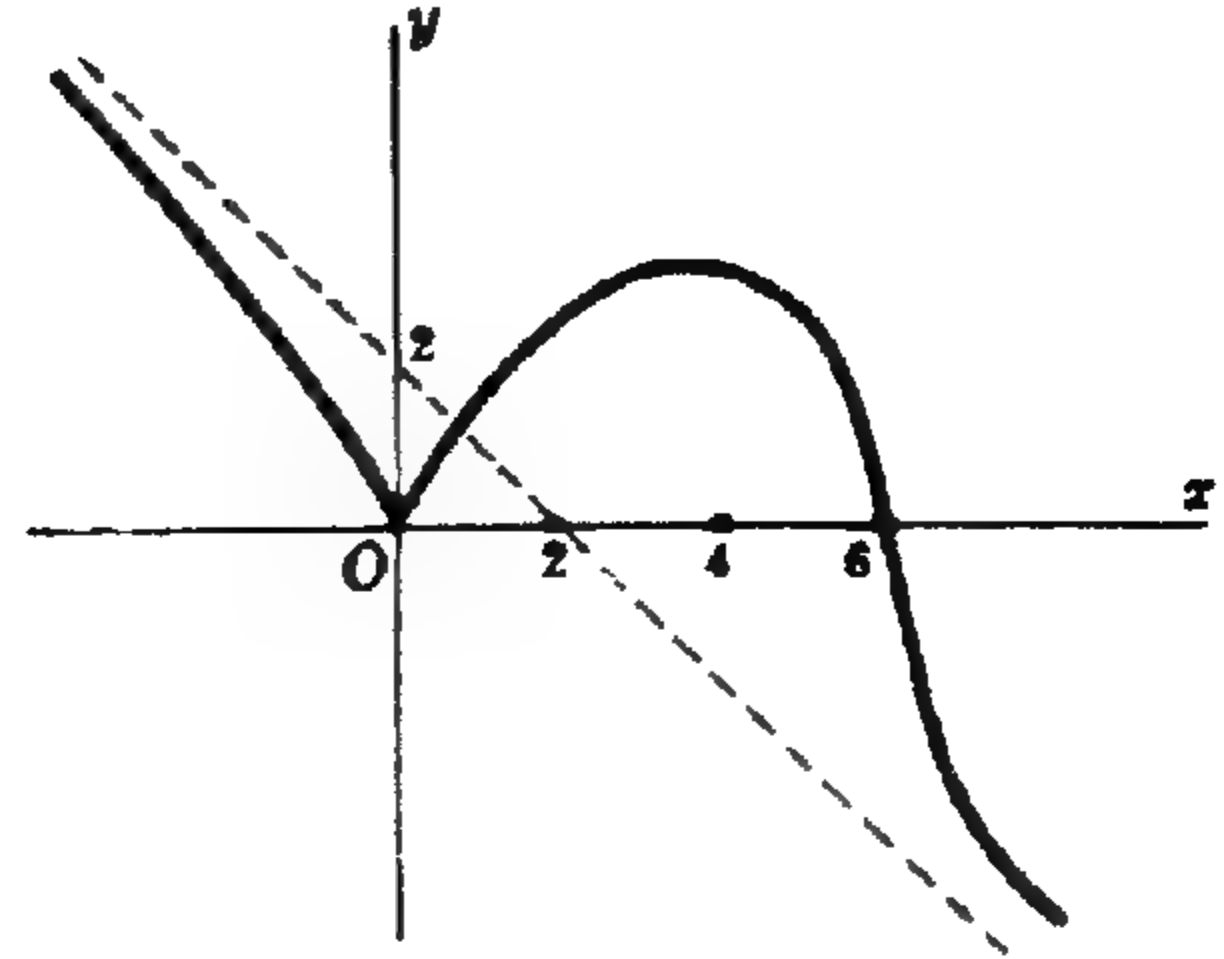
المسطحات المقاربة : من المسألة (٢) نجد أن  $y = -x + 2$  هو خط مقارب .

النقطة المفردة : من المسألة (٥) نجد أن نقطة الأصل نقطة قمة للمنحنى والمماس عندنا هو المحور الصادى .



$$y^2(x-1) - x^3 = 0$$

شكل ٢٤ - ٤



$$x^3 + y^2 - 6x^2 = 0$$

شكل ٢٤ - ٣

١٠ - ادرس المنحنى  $y^2(x-1) - x^3 = 0$  وارسمه . ( انظر الشكل ٢٤ - ٤ ) .

التماثل : إن المنحنى متماثل بالنسبة للمحور السيني .

التقاطع مع المحاور : نقطة التقاطع مع المحاور هي  $x=0$  و  $y=0$  .

الحيز : المنحنى موجود في الفترتين  $-\infty < x \leq 0$  و  $x > 1$  ولجميع قيم  $y$  .

القيم العظمى والصغرى : الخ : إذا أخذنا الفرع  $y = x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$  .

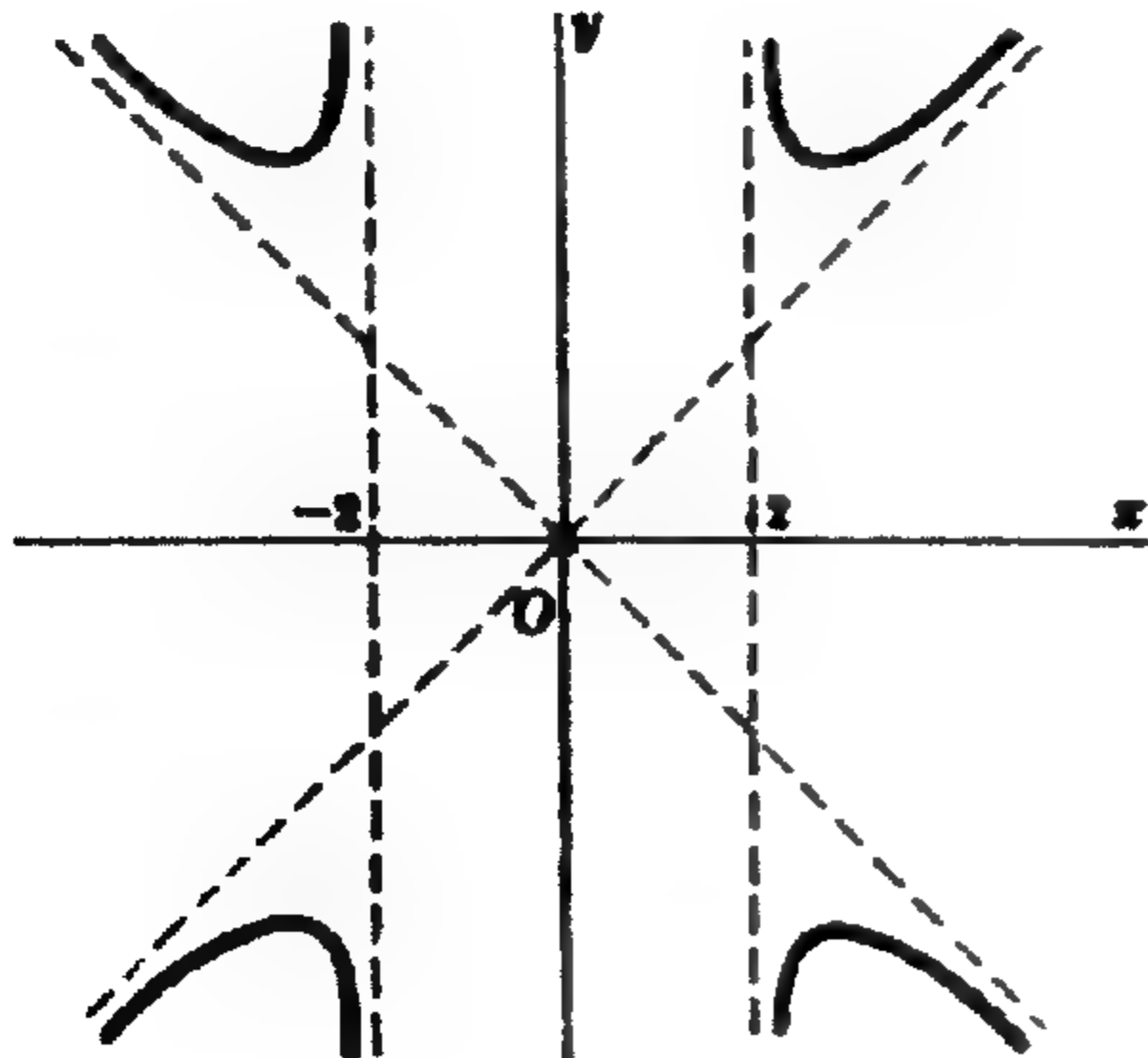
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-3)x^{1/2}}{2(x-1)^{3/2}} \quad \text{و} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4x^{3/2}(x-1)^{5/2}}$$

والقيم الحرجة هي  $x=0, 3/2$  والنقطة  $(3/2, 3\sqrt{3}/2)$  نقطة نهاية صغرى . ولا يوجد نقطة انعطاف والفرع

منفر لأعلى . ومن التماثل يكون للفرع  $y = -x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$  نقطة نهاية عظمى هي  $3\sqrt{3}/2$  و  $3/2$  والمنحنى منفر لأسفل .

الخطوط المقاربة : من المسألة (٣) نجد أن المستقيمتين  $y = -x - 1/2$  و  $y = x + 1/2$  هي مستقيمتان مقاربة .

النقط المفردة : من المسألة (٦) نجد أن نقطة الأصل هي نقطة ناب للمنحنى والمستقيم  $y=0$  هو المماس للمنحنى عندها .



$$y^2(x^2-4) = x^4$$

شكل ٢٤ - ٥

١١ - ادرس المنحنى  $y^2(x^2-4) = x^4$  وارسمه .

التماثل : إن المنحنى متماثل بالنسبة لمحوري الإحداثيات وبالنسبة لنقطة الأصل .

التقاطع مع المحاور : إن المنحنى يقطع المحورين في :

$$x=0 \text{ و } y=0$$

الحيز : المنحنى موجود في الفترة  $-2 < x < 2$  و  $-x < y < x$  و

$$-4 \leq y < +\infty \text{ و } -\infty < y \leq -4 \text{ وفي الفترتين } 2 < x < +\infty \text{ و } -\infty < x < -2$$

والنقطة  $(0,0)$  نقطة منزلة .

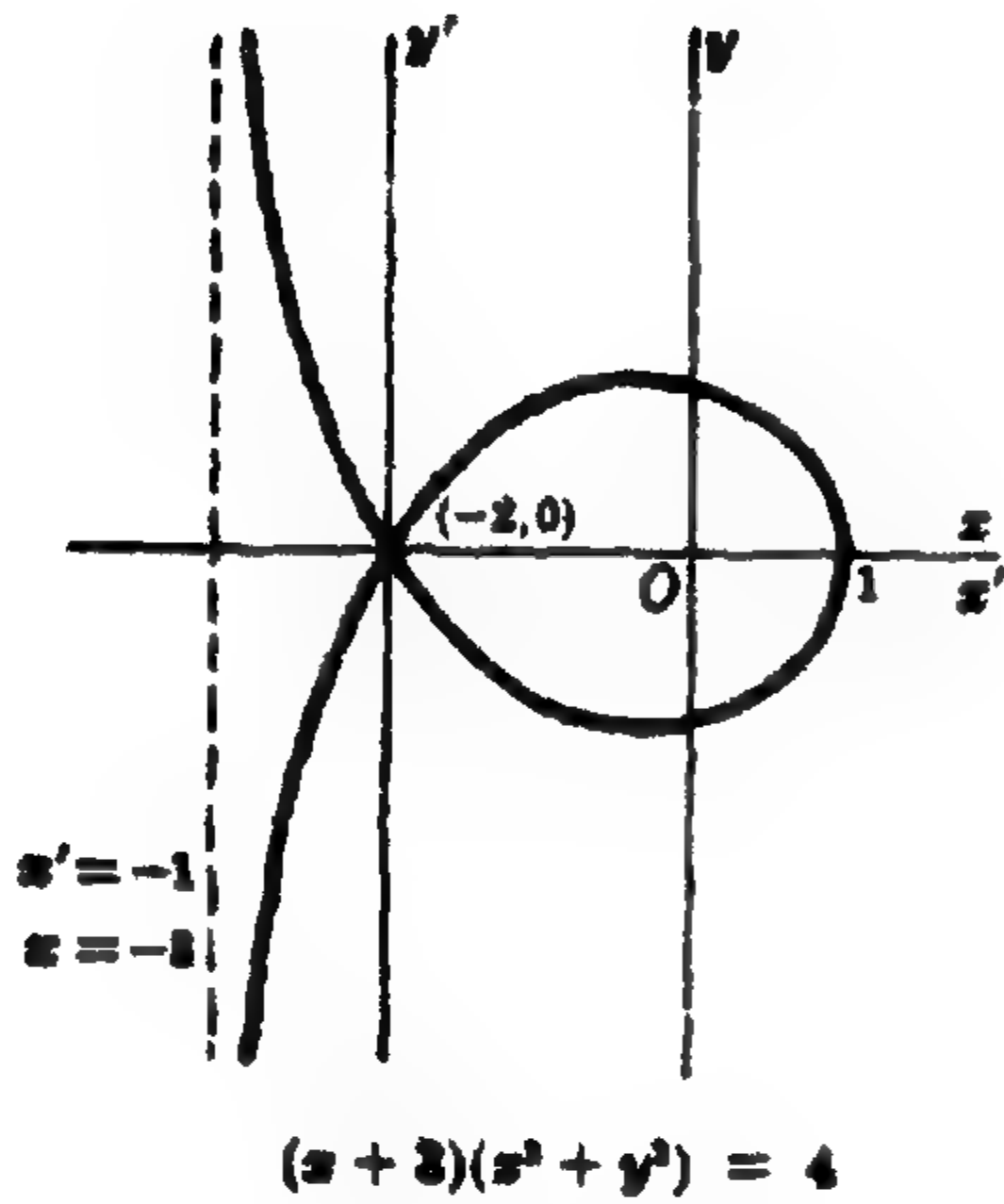
القيم العظمى والصغرى الخ : بالنسبة لجزء

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, x > 2.$$



نجد أن :  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 8x}{(x^2 - 4)^{3/2}}$  و  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4x^2 + 32}{(x^2 - 4)^{5/2}}$  والقيمة الحرجة هي  $x = 2\sqrt{2}$  والمنحنى مقعر لأعلى في هذا الجزء والنقطة  $(2\sqrt{2}, 4)$  نقطة نهاية صغرى ، ومن التماثل نجد أن النقطة  $(-2\sqrt{2}, 4)$  هي نقطة نهاية صغرى وأن  $(2\sqrt{2}, -4)$  و  $(-2\sqrt{2}, -4)$  نقطتا نهاية عظمى .

المتطابقات المقاربة : الخط المفردة . ( انظر المسألة ٧ )



شكل ٢١ - ٦

١٢ - ادرس المنحنى  $(x+3)(x^2+y^2)=4$  وارسمه .

قبل دراسة هذا المنحنى سنبين أولاً موضع النقطة المفردة إن وجدت ثم نقل المحاور إلى هذه النقطة باعتبارها نقطة أصل جديدة .

إن  $\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+2)(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{(x+3)^2y}$  ومنه نرى أن عندما  $x = -2$  و  $y = 0$  يكون  $dy/dx$  صيغة غير محددة من النمط  $0/0$  والنقطة  $(-2, 0)$  نقطة مفردة .

وإذا أجرينا التحويل  $y = y'$  و  $x = x' - 2$  .

فإن معادلة المنحنى تأخذ الشكل  $y'^2(x'+1) + x'^3 - 3x'^2 = 0$  .

التماثل : إن المنحنى متماثل بالنسبة لمحور  $x'$  .

التقاطع مع المحاور : إن المنحنى يقطع المحاور الاحداثية في :

$y' = 0$  و  $x' = 3$  و  $x' = 0$  .

الجزء : إن المنحنى معرف في الفترة  $-1 < x' \leq 3$  ولجميع قيم  $y'$  .

القيم العظمى والصغرى : الخ : بالنسبة لفرع  $y' = \frac{x'\sqrt{3-x'}}{\sqrt{x'+1}}$

نجد أن :  $\frac{dy'}{dx'} = \frac{3-x'^2}{(3-x')^{3/2}(x'+1)^{3/2}}$  و  $\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{-12}{(3-x')^{5/2}(x'+1)^{5/2}}$

والقيم الحرجة هي  $3$  ;  $x' = \sqrt{3}$  والنقطة  $(\sqrt{3}, \sqrt{6\sqrt{3}-9})$  نقطة نهاية عظمى والفرع مقعر لأسفل .

ومن التماثل نجد أن النقطة  $(\sqrt{3}, \sqrt{6\sqrt{3}-9})$  هي نقطة نهاية صغرى وأن الفرع الآخر مقعر لأعلى .

المتطابقات المقاربة : إن المستقيم  $x' = -1$  مستقيم مقارب رأسى .. والبحث عن المتطابقات المقاربة المائلة نضع  $mx' + b$  بدلا من  $y'$  فنحصل على المعادلة  $(m^2+1)x'^3 + \dots = 0$  . ولا يوجد خطوط مقاربة مائلة . لماذا ؟

الخط المفردة : إن نقطة الأصل نقطة ثنائية . وإذا عوضنا بـ  $mx'$  بدلا من  $y'$  في حدود الدرجة الأدنى  $3x'^2 - 3x'^2 = 0$  نجد أن  $(m^2-2)x'^2$  ومن المعادلة  $m^2-3=0$  نجد  $m = \pm\sqrt{3}$  والمماسان ( عند القمة )

ما  $y' = \pm\sqrt{3}x'$  وبالعودة إلى الاحداثيات الأصلية نجد أن  $(\sqrt{3}-2, \sqrt{6\sqrt{3}-9})$  نقطة نهاية عظمى وأن

$(\sqrt{3}-2, -\sqrt{6\sqrt{3}-9})$  نقطة نهاية صغرى . وأن المستقيم  $x = -3$  مستقيم مقارب رأسى والنقطة  $(-2, 0)$

قمة وإن معادلتى المماسين ( عند القمة ) هما  $y = \pm\sqrt{3}(x+2)$  .

## مسائل اختيارية

أدرس كلا من المنحنيات التالية وارسمه :

$$\begin{array}{lll}
 (x^2 + y^2)^2 = 8xy - 44 & x(x-1)y = x^2 - 4 - 44 & (x-2)(x-6)y = 2x^2 - 14 \\
 (x^2 + y^2)^2 = 4x^2y^2 - 44 & (x+1)(x+4)^2y^2 = x(x^2-4) - 44 & x(3-x^2)y = 1 - 14 \\
 y^4 - 4xy^2 = x^2 - 44 & y^2 = 4x^2(4-x^2) - 44 & (1-x^2)y = x^2 - 14 \\
 (x^2 + y^2)^2 = 4xy(x^2 - y^2) - 44 & y^2 = 5x^4 + 4x^2 - 44 & xy = (x^2 - 9)^2 - 14 \\
 y^2 = x(x-3)^2 - 44 & y^2 = x^2(8-x^2) - 44 & 2xy = (x^2 - 1)^2 - 14 \\
 y^2 = x(x-2)^2 - 44 & y^2 = x^2(3-x) - 44 & x(x^2-4)y = x^2 - 6 - 14 \\
 3y^4 = x(x^2-9)^2 - 44 & (x^2-1)y^2 = x^2 - 44 & y^2 = x(x^2-4) - 14 \\
 x^2y^2 = (x-3)^2 - 44 & (x-3)y^2 = x^2 - 44 & y^2 = (x^2-1)(x^2-4) - 44 \\
 (x-6)y^2 = x^2(x-4) - 44 & & xy^2 = x^2 + 8x + 2 - 44 \\
 (x^2-16)y^2 = x^2(x-2) - 44 & & (x^2-2x-3)y^2 = 2x+3 - 44
 \end{array}$$

## الفصل الخامس والعشرون

### الصيغ الأساسية للتكامل

إذا كانت  $F(x)$  دالة مشتقتها في فترة معينة من المحور السيني هي  $f(x) = F'(x)$  فإننا ندعو  $F(x)$  مضاد المشتقة أو التكامل غير المحدود لـ  $f(x)$ . والتكامل غير المحدود لدالة مفروضة ليس وحيداً. فمثلاً سبيل المثال : الدوال  $x^2 - 4$ ,  $x^2 + 5$ ,  $x^2$  هي تكاملات غير محددة لـ  $f(x) = 2x$  لأن  $\frac{d}{dx}(x^2 - 4) = 2x$ ,  $\frac{d}{dx}(x^2 + 5) = 2x$ ,  $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ . على ذلك فإن جميع التكاملات غير المحددة لـ  $f(x) = 2x$  متضمنة في  $x^2 + C$  حيث  $C$  التي نسميها ثابت التكامل. هو أي ثابت اختياري.

ويتمثل الرمز  $\int f(x) dx$  للإشارة إلى أن المطلوب هو التكامل غير المحدود لـ  $f(x)$  وهكذا نكتب

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

**الصيغ الأساسية للتكامل :** إن عدداً من الصيغ الواردة أدناه تنتج مباشرة من صيغ الاشتقاق القياسية الواردة في الفصول السابقة. ويمكننا، على سبيل المثال، أن نتحقق من الصيغة ٢٥ على النحو التالي :

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{u}{a} + C \right\} = \sqrt{a^2 - u^2}$$

وقد تظهر إشارة القيمة المطلقة في بعض الصيغ، مثل -سبيل المثال نكتب :

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C \quad - ٥$$

بدلاً من

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C, \quad u > 0 \quad (١) \quad \int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C, \quad u < 0 \quad (ب) \quad - ٥$$

ونكتب

$$\int \tan u du = \ln |\sec u| + C, \quad - ١٠$$

بدلاً من

$$\int \tan u du = \ln |\sec u| + C \quad (١) \quad \text{لجميع قيم } u \text{ التي تحقق العلاقة } |u| \geq \frac{\pi}{2}.$$

$$\int \tan u du = \ln(-\sec u) + C, \quad (ب) \quad \text{لجميع قيم } u \text{ التي تحقق العلاقة } u \leq -\frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\int \csc^2 u \, du &= -\cot u + C \quad - ١٥ & \int \frac{d}{dx}[f(x)] \, dx &= f(x) + C \quad - ١ \\
\int \sec u \tan u \, du &= \sec u + C \quad - ١٦ & \int (u+v) \, dx &= \int u \, dx + \int v \, dx \quad - ٢ \\
\int \csc u \cot u \, du &= -\csc u + C \quad - ١٧ & \int au \, dx &= a \int u \, dx, \quad \text{حيث } a \text{ ثابت} \quad - ٣ \\
\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} &= \arcsin \frac{u}{a} + C \quad - ١٨ & \int u^m \, du &= \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1 \quad - ٤ \\
\int \frac{du}{a^2 + u^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C \quad - ١٩ & \int \frac{du}{u} &= \ln|u| + C \quad - ٥ \\
\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} &= \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + C \quad - ٢٠ & \int a^u \, du &= \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1 \quad - ٦ \\
\int \frac{du}{u^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \quad - ٢١ & \int e^u \, du &= e^u + C \quad - ٧ \\
\int \frac{du}{a^2 - u^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C \quad - ٢٢ & \int \sin u \, du &= -\cos u + C \quad - ٨ \\
\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} &= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \quad - ٢٣ & \int \cos u \, du &= \sin u + C \quad - ٩ \\
\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} &= \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C \quad - ٢٤ & \int \tan u \, du &= \ln|\sec u| + C \quad - ١٠ \\
\int \sqrt{a^2 - u^2} \, du &= \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{u}{a} + C \quad - ٢٥ & \int \cot u \, du &= \ln|\sin u| + C \quad - ١١ \\
\int \sqrt{u^2 + a^2} \, du &= \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C \quad - ٢٦ & \int \sec u \, du &= \ln|\sec u + \tan u| + C \quad - ١٢ \\
\int \sqrt{u^2 - a^2} \, du &= \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C \quad - ٢٧ & \int \csc u \, du &= \ln|\csc u - \cot u| + C \quad - ١٣ \\
& & \int \sec^2 u \, du &= \tan u + C \quad - ١٤
\end{aligned}$$

## مسائل محلولة

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{x} \, dx &= \int x^{1/3} \, dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} x^{4/3} + C \quad - ٢ & \int x^2 \, dx &= \frac{x^3}{3} + C \quad - ١ \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int x^{-1/2} \, dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2x^{1/2} + C \quad - ٣ & \int \frac{dx}{x^2} &= \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C \quad - ٢ \\
\int (2x^2 - 5x + 3) \, dx &= 2 \int x^2 \, dx - 5 \int x \, dx + 3 \int dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C \quad - ٤ \\
\int (1-x)\sqrt{x} \, dx &= \int (x^{1/2} - x^{3/2}) \, dx = \int x^{1/2} \, dx - \int x^{3/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} + C \quad - ٥ \\
\int (3x^2 + 4)^3 \, dx &= \int (9x^2 + 24x + 16) \, dx = 9(\frac{1}{3} x^3) + 24(\frac{1}{2} x^2) + 16x + C = 3x^3 + 12x^2 + 16x + C \quad - ٦ \\
\int \frac{x^2 + 5x^2 - 4}{x^2} \, dx &= \int (x + 5 - 4x^{-2}) \, dx = \frac{1}{2} x^2 + 5x - \frac{4x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{2} x^2 + 5x + \frac{4}{x} + C \quad - ٨ \\
\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 + 2}} \quad (أ) & \int \frac{8x^2 \, dx}{(x^2 + 2)^3} \quad (ب) & \int (x^2 + 2)^3 \cdot 3x^2 \, dx \quad (ج) & - ٩
\end{aligned}$$

نضع  $u = x^2 + 2$  فيكون  $du = 2x \, dx$

$$\int (x^2 + 2)^2 \cdot 3x^2 dx = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} (x^2 + 2)^3 + C \quad (1)$$

$$\int (x^2 + 2)^{1/2} x^3 dx = \frac{1}{3} \int (x^2 + 2)^{1/2} \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int u^{1/2} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9} (x^2 + 2)^{3/2} + C \quad (2)$$

$$\int \frac{8x^3 dx}{(x^2 + 2)^2} = 8 \cdot \frac{1}{3} \int (x^2 + 2)^{-2} 3x^2 dx = \frac{8}{3} \int u^{-2} du = -\frac{8}{3} \left( \frac{1}{2} u^{-1} \right) + C = -\frac{4}{3(x^2 + 2)} + C \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \frac{1}{3} \int (x^2 + 2)^{-1/2} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} u^{3/2} + C = \frac{4}{9} (x^2 + 2)^{3/2} + C \quad (4)$$

١٠ - احسب  $\int 3x\sqrt{1-2x^2} dx$  مع  $u = 1 - 2x^2$  فيكون  $du = -4x dx$

$$\begin{aligned} \int 3x\sqrt{1-2x^2} dx &= 3 \left( -\frac{1}{4} \right) \int (1-2x^2)^{1/2} (-4x dx) = -\frac{3}{4} \int u^{1/2} du \\ &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = -\frac{1}{2} (1-2x^2)^{3/2} + C \end{aligned}$$

١١ - احسب  $\int \frac{(x+3) dx}{(x^2+6x)^{1/3}}$  مع  $u = x^2 + 6x$  فيكون  $du = (2x+6) dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+3) dx}{(x^2+6x)^{1/3}} &= \frac{1}{2} \int (x^2+6x)^{-1/3} (2x+6) dx = \frac{1}{2} \int u^{-1/3} du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} u^{2/3} + C = \frac{3}{4} (x^2+6x)^{2/3} + C \end{aligned}$$

$$\int \sqrt[3]{1-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{1/3} (-2x dx) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (1-x^2)^{4/3} + C = -\frac{3}{8} (1-x^2)^{4/3} + C \quad 12$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-2x^4} dx &= \int (1-2x^2)^{1/2} x dx = -\frac{1}{4} \int (1-2x^2)^{1/2} (-4x dx) \quad 13 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1-2x^2)^{3/2} + C = -\frac{1}{6} (1-2x^2)^{3/2} + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x^{1/2}} dx = \int (x^{-1/2} + 2x^{1/2} + x^{3/2}) dx = 2x^{1/2} + \frac{4}{3} x^{3/2} + \frac{2}{5} x^{5/2} + C \quad 14$$

$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} dx = \int \left\{ 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx = x + \frac{1}{x+1} + C' = \frac{x^2}{x+1} + 1 + C' = \frac{x^2}{x+1} + C \quad 15$$

## الصيغ ٥-٧

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2| + C \quad 16 \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad 17$$

$$\text{لـ } du = 2dx, u = 2x-3 \text{ حيث } \int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C \quad 18$$

$$\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-3)}{2x-3} = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C$$

$$\int \frac{x dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \ln c = \ln c \sqrt{|x^2-1|} \quad 19$$

$$\int \frac{x^2 dx}{1-2x^3} = -\frac{1}{6} \int \frac{-6x^2 dx}{1-2x^3} = -\frac{1}{6} \ln|1-2x^3| + C = \ln \frac{c}{\sqrt[3]{1-2x^3}} \quad 20$$

$$\int \frac{x+2}{x+1} dx = \int \left( 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = x + \ln|x+1| + C \quad 21$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{3} \int e^{2x} (3 dx) = \frac{e^{2x}}{3} + C \quad 22 \quad \int e^{-x} dx = -\int e^{-x} (-dx) = -e^{-x} + C \quad 23$$

$$\int \frac{e^{1/x} dx}{x^2} = -\int e^{1/x} \left( -\frac{dx}{x^2} \right) = -e^{1/x} + C \quad 24 \quad \int a^{2x} dx = \frac{1}{2} \int a^{2x} (2 dx) = \frac{1}{2} \left( \frac{a^{2x}}{\ln a} \right) + C \quad 25$$



$$! du = e^x dx, u = e^x + 1 \text{ حيث } \int (e^x + 1)^2 e^x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(e^x + 1)^3}{3} + C \quad ٢٦$$

$$\int (e^x + 1)^2 e^x dx = \int (e^x + 1)^2 d(e^x + 1) = \frac{(e^x + 1)^3}{3} + C$$

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} = - \int \frac{-e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} = - \ln(1 + e^{-x}) + C = \ln \frac{e^x}{1 + e^x} + C \quad ٢٧$$

$$= x - \ln(1 + e^x) + C$$

ولمنا في حاجة إلى تحديد إشارة القيمة المطلقة لأن  $1 + e^{-x} > 0$  مهما كانت قيمة  $x$ .

#### الصيغ ٨ - ١٧

$$\int \sin \frac{1}{2} x dx = 2 \int \sin \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{2} dx = -2 \cos \frac{1}{2} x + C - ٢٨$$

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x \cdot 3 dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C - ٢٩$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x (\cos x dx) = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C - ٣٠$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C = \ln |\sec x| + C - ٣١$$

$$\int \tan 2x dx = \frac{1}{2} \int \tan 2x \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \ln |\sec 2x| + C - ٣٢$$

$$\int x \cot x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cot x^2 \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \ln |\sin x^2| + C - ٣٣$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} dx = \ln |\sec x + \tan x| + C - ٣٤$$

$$\int \sec \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int \sec x^{1/2} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} dx = 2 \ln |\sec \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}| + C - ٣٥$$

$$\int \sec^2 2ax dx = \frac{1}{2a} \int \sec^2 2ax \cdot 2a dx = \frac{\tan 2ax}{2a} + C - ٣٦$$

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} dx = \int (\tan x + 1) dx = \ln |\sec x| + x + C - ٣٧$$

$$\int \frac{\sin y dy}{\cos^2 y} = \int \tan y \sec y dy = \sec y + C - ٣٨$$

$$\int (1 + \tan x)^2 dx = \int (1 + 2 \tan x + \tan^2 x) dx = \int (\sec^2 x + 2 \tan x) dx - ٣٩$$

$$= \tan x + 2 \ln |\sec x| + C$$

$$\int e^x \cos e^x dx = \int \cos e^x \cdot e^x dx = \sin e^x + C - ٤٠$$

$$\int e^{3 \cos 2x} \sin 2x dx = -\frac{1}{6} \int e^{3 \cos 2x} (-6 \sin 2x dx) = -\frac{e^{3 \cos 2x}}{6} + C - ٤١$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx = \int (\csc^2 x - \cot x \csc x) dx - ٤٢$$

$$= -\cot x + \csc x + C$$

$$\int (\tan 2x + \sec 2x)^2 dx = \int (\tan^2 2x + 2 \tan 2x \sec 2x + \sec^2 2x) dx - ٤٣$$

$$= \int (2 \sec^2 2x + 2 \tan 2x \sec 2x - 1) dx = \tan 2x + \sec 2x - x + C$$

$$\int \csc u dx = \int \frac{dx}{\sin u} = \int \frac{du}{2 \sin \frac{1}{2} u \cos \frac{1}{2} u} = \int \frac{\sec^2 \frac{1}{2} u \cdot \frac{1}{2} du}{\tan \frac{1}{2} u} = \ln |\tan \frac{1}{2} u| + C - ٤٤$$

$$\int (\sec 4x - 1)^2 dx = \int (\sec^2 4x - 2 \sec 4x + 1) dx = \frac{1}{4} \tan 4x - \frac{1}{4} \ln |\sec 4x + \tan 4x| + x + C - 10$$

$$\int \frac{\sec x \tan x dx}{a + b \sec x} = \frac{1}{b} \int \frac{\sec x \tan x \cdot b dx}{a + b \sec x} = \frac{1}{b} \ln |a + b \sec x| + C - 11$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\csc 2x - \cot 2x} &= \int \frac{\sin 2x dx}{1 - \cos 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x \cdot 2 dx}{1 - \cos 2x} = \frac{1}{2} \ln (1 - \cos 2x) + C' - 12 \\ &= \frac{1}{2} \ln (2 \sin^2 x) + C' = \frac{1}{2} (\ln 2 + 2 \ln |\sin x|) + C' = \ln |\sin x| + C \end{aligned}$$

الصيغة ١٨ - ٢٠

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C - 13, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C - 14$$

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C - 15, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C - 16$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{4 dx}{\sqrt{5^2-(4x)^2}} = \frac{1}{4} \arcsin \frac{4x}{5} + C - 17, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C - 18$$

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{(2x)^2+3^2} = \frac{1}{6} \arctan \frac{2x}{3} + C - 19$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{2 dx}{2x\sqrt{(2x)^2-3^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arcsec} \frac{2x}{3} + C - 20$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^3 dx}{\sqrt{1-(x^2)^3}} = \frac{1}{3} \arcsin x^3 + C - 21$$

$$\int \frac{x dx}{x^4+3} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{(x^2)^2+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C = \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan \frac{x^2\sqrt{3}}{3} + C - 22$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2\sqrt{(x^2)^2-1}} = \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} x^2 + C = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{x^2} + C - 23$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \arctan e^x + C - 24, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+2)^2}} = \arcsin \frac{x+2}{2} + C - 25$$

$$\int \frac{3x^2-4x+8}{x^2+1} dx = \int \left( 3x - 4 + \frac{4}{x^2+1} \right) dx = \frac{3x^2}{2} - 4x + 4 \arctan x + C - 26$$

$$\int \frac{\sec x \tan x dx}{9+4 \sec^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{2 \sec x \tan x dx}{3^2 + (2 \sec x)^2} = \frac{1}{6} \arctan \frac{2 \sec x}{3} + C - 27$$

$$\int \frac{(x+3) dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + 3 \arcsin x + C - 28$$

$$\int \frac{(2x-7) dx}{x^2+9} = \int \frac{2x dx}{x^2+9} - 7 \int \frac{dx}{x^2+9} = \ln(x^2+9) - \frac{7}{3} \arctan \frac{x}{3} + C - 29$$

$$\int \frac{dy}{y^2+10y+30} = \int \frac{dy}{(y^2+10y+25)+5} = \int \frac{dy}{(y+5)^2+5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan \frac{(y+5)\sqrt{5}}{5} + C - 30$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x^2-8x+16)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-4)^2}} = \arcsin \frac{x-4}{6} + C - 31$$

$$\int \frac{dx}{2x^2+2x+5} = \int \frac{2 dx}{4x^2+4x+10} = \int \frac{2 dx}{(2x+1)^2+9} = \frac{1}{3} \arctan \frac{2x+1}{3} + C - 32$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-4)+6}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-4) dx}{x^2-4x+8} + 3 \int \frac{dx}{x^2-4x+8} - 33$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-4) dx}{x^2-4x+8} + 3 \int \frac{dx}{(x-2)^2+4} = \frac{1}{2} \ln(x^2-4x+8) + \frac{3}{2} \arctan \frac{x-2}{2} + C$$

ولسنا في حاجة إلى تحديد إشارة القيمة المطلقة لأن  $x^2 - 4x + 8 > 0$  مهما كانت قيمة  $x$ .

$$\int \frac{dx}{\sqrt{28 - 12x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64 - (x^2 + 12x + 36)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64 - (x+6)^2}} = \arcsin \frac{x+6}{8} + C - \text{٧٩}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-6}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2x-4)-2}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx - \text{٧٠} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} \\ &= -\sqrt{5-4x-x^2} + \arcsin \frac{x+2}{3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{9x^2-12x+8} dx &= \frac{1}{9} \int \frac{18x+27}{9x^2-12x+8} dx = \frac{1}{9} \int \frac{(18x-12)+39}{9x^2-12x+8} dx - \text{٧١} \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{18x-12}{9x^2-12x+8} dx + \frac{13}{8} \int \frac{dx}{(3x-2)^2+4} \\ &= \frac{1}{9} \ln(9x^2-12x+8) + \frac{13}{18} \arctan \frac{3x-2}{2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-4}{\sqrt{4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2x+4)-8}{\sqrt{4x-x^2}} dx - \text{٧٢} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} dx + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 4 \arcsin \frac{x-2}{2} + C \end{aligned}$$

### الصيغ ٢١ - ٢٤

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{9-x^2} &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3+x}{3-x} \right| + C - \text{٧٦} & \int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C - \text{٧٧} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C - \text{٧٧} & \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C - \text{٧٨} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C - \text{٧٨} & \int \frac{dx}{x^2-4} &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C - \text{٧٩} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{\sqrt{(2x)^2+3^2}} = \frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{4x^2+9}) + C - \text{٧٩}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-25}} = \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{\sqrt{9x^2-25}} = \frac{1}{3} \ln|3x + \sqrt{9x^2-25}| + C - \text{٨٠}$$

$$\int \frac{dx}{9x^2-16} = \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{(3x)^2-16} = \frac{1}{24} \ln \left| \frac{3x-4}{3x+4} \right| + C - \text{٨١}$$

$$\int \frac{dy}{25-16y^2} = \frac{1}{4} \int \frac{4dy}{25-(4y)^2} = \frac{1}{40} \ln \left| \frac{5+4y}{5-4y} \right| + C - \text{٨٢}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+3)-1}{(x+3)+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x+4} \right| + C - \text{٨٣}$$

$$\int \frac{dx}{4x-x^2} = \int \frac{dx}{4-(x-2)^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+(x-2)}{2-(x-2)} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{4-x} \right| + C - \text{٨٤}$$

$$\int \frac{ds}{\sqrt{4s+s^2}} = \int \frac{ds}{\sqrt{(s+2)^2-4}} = \ln|s+2 + \sqrt{4s+s^2}| + C - \text{٨٥}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+9}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2+9}} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} \quad - ٨٦ \\ &= \sqrt{x^2+9} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2+9}) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-3}{4x^2-11} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{8x-12}{4x^2-11} dx = \frac{1}{4} \int \frac{8x dx}{4x^2-11} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{4x^2-11} \quad - ٨٧ \\ &= \frac{1}{4} \ln |4x^2-11| - \frac{3\sqrt{11}}{44} \ln \left| \frac{2x-\sqrt{11}}{2x+\sqrt{11}} \right| + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}} \quad - ٨٨ \\ &= \sqrt{x^2+2x-3} + \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x-3}| + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2-x}{4x^2+4x-3} dx &= -\frac{1}{8} \int \frac{8x-16}{4x^2+4x-3} dx = -\frac{1}{8} \int \frac{8x+4}{4x^2+4x-3} dx + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{(2x+1)^2-4} \quad - ٨٩ \\ &= -\frac{1}{8} \ln |4x^2+4x-3| + \frac{5}{16} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+3} \right| + C\end{aligned}$$

الصيغ ٢٥ - ٢٧

$$\int \sqrt{25-x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} + C - ٩٠$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3-4x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{3-4x^2} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{2} \sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}} \right) + C - ٩١ \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{4} \arcsin \frac{2x\sqrt{3}}{3} + C\end{aligned}$$

$$\int \sqrt{x^2-36} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-36} - 18 \ln |x + \sqrt{x^2-36}| + C - ٩٢$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3x^2+5} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sqrt{3x^2+5} \cdot \sqrt{3} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} x \sqrt{3x^2+5} + \frac{5}{2} \ln (\sqrt{3} x + \sqrt{3x^2+5}) \right] + C - ٩٣ \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{3x^2+5} + \frac{5\sqrt{3}}{6} \ln (\sqrt{3} x + \sqrt{3x^2+5}) + C\end{aligned}$$

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2} dx = \frac{x+1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{2} + C - ٩٤$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4x^2-4x+5} dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{(2x-1)^2+4} \cdot 2 dx \quad - ٩٥ \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2x-1}{2} \sqrt{4x^2-4x+5} + 2 \ln (2x-1 + \sqrt{4x^2-4x+5}) \right] + C \\ &= \frac{2x-1}{4} \sqrt{4x^2-4x+5} + \ln (2x-1 + \sqrt{4x^2-4x+5}) + C\end{aligned}$$

### مسائل إضافية

أبهر طلبات التكامل التالية :

$$\int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 5) dx = x^4 + x^3 + x^2 + 5x + C - ٩٦$$

$$\int (3 - 2x - x^2) dx = 3x - x^2 - x^3/3 + C - ٩٧$$

$$\int (x^2 - 1)^2 dx = x^5/5 - 2x^3/3 + x + C - 99 \quad \int (2 - 3x + x^2) dx = 2x - 3x^2/2 + x^3/3 + C - 98$$

$$\int (\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + 2/\sqrt{x}) dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 4x^{1/2} + C - 100$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^{1/2}} = \frac{3}{2b}(a+bx)^{3/2} + C - 101$$

$$\int (a+x)^2 dx = \frac{1}{3}(a+x)^3 + C - 101$$

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3 + C - 102$$

$$\int (x-2)^{2/3} dx = \frac{3}{5}(x-2)^{5/3} + C - 102$$

$$\int \sqrt{x}(3-5x) dx = 2x^{3/2}(1-x) + C - 103$$

$$\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C - 103$$

$$\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} - 4x^{1/2} + C - 104$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C - 104$$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C - 105$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = 2\sqrt{x+3} + C - 105$$

$$\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C - 106$$

$$\int \sqrt{3x-1} dx = \frac{2}{5}(3x-1)^{5/2} + C - 106$$

$$\int \frac{3x dx}{x^2+2} = \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + C - 107$$

$$\int \sqrt{2-3x} dx = -\frac{2}{5}(2-3x)^{5/2} + C - 107$$

$$\int \frac{x^2 dx}{1-x^2} = -\frac{1}{3}\ln|1-x^2| + C - 108$$

$$\int (2x^2+3)^{1/2} x dx = \frac{2}{15}(2x^2+3)^{3/2} + C - 108$$

$$\int \frac{x-1}{x+1} dx = x - 2\ln|x+1| + C - 109$$

$$\int (x-1)^2 x dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C - 109$$

$$\int \frac{x^2+2x+2}{x+2} dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x+2| + C - 110$$

$$\int (x^2-1)x dx = \frac{1}{4}(x^2-1)^2 + C - 110$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C - 111$$

$$\int \sqrt{1+y^2} y^2 dy = \frac{1}{8}(1+y^2)^{3/2} + C - 111$$

$$\int \left( \frac{dx}{2x-1} - \frac{dx}{2x+1} \right) = \ln \sqrt{\left| \frac{2x-1}{2x+1} \right|} + C - 112$$

$$\int (x^2+3)x^2 dx = \frac{1}{8}(x^2+3)^3 + C - 112$$

$$\int a^{4x} dx = \frac{1}{4} \frac{a^{4x}}{\ln a} + C - 113$$

$$\int (4-x^2)^2 x^2 dx = \frac{13}{8}x^5 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{2}x + C - 113$$

$$\int e^{4x} dx = \frac{1}{4}e^{4x} + C - 114$$

$$\int \frac{dy}{(2-y)^2} = \frac{1}{2(2-y)} + C - 114$$

$$\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx = -\frac{1}{2}e^{1/x^2} + C - 115$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2+4)^2} = -\frac{1}{4(x^2+4)} + C - 115$$

$$\int e^{-x^2+1} x dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2+1} + C - 116$$

$$\int (1-x^2)^2 dx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + C - 116$$

$$\int x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C - 117$$

$$\int (1-x^2)^2 x dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 + C - 117$$

$$\int (e^x+1)^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C - 118$$

$$\int (1-x^2)^2 x^2 dx = -\frac{1}{8}(1-x^2)^3 + C - 118$$

$$\int (e^x - x^2) dx = e^x - \frac{x^{n+1}}{n+1} + C - 119$$

$$\int (x^2-x)^2(2x-1) dx = \frac{1}{8}(x^2-x)^3 + C - 119$$

$$\int (e^x+1)^2 e^x dx = \frac{1}{3}(e^x+1)^3 + C - 120$$

$$\int \frac{3t dt}{\sqrt{t^2+3}} = \frac{9}{4}(t^2+3)^{3/2} + C - 120$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3) + C - 121$$

$$\int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \sqrt{x^2+2x-4} + C - 121$$



$$\int \frac{dx}{1 - \sin \frac{1}{2}x} = 2(\tan \frac{1}{2}x + \sec \frac{1}{2}x) + C - 162$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos 3x} = \frac{1 - \cos 3x}{3 \sin 3x} + C - 163$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sec ax} = x + \frac{1}{a}(\cot ax - \csc ax) + C - 164$$

$$\int \sec^2 \frac{x}{a} \tan \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} a \tan^2 \frac{x}{a} + C - 165$$

$$\int \frac{\sec^2 3x}{\tan 3x} dx = \frac{1}{3} \ln |\tan 3x| + C - 166$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\csc x} dx = \frac{1}{4} \sec^4 x + C - 167$$

$$\int e^{\tan 2x} \sec^2 2x dx = \frac{1}{2} e^{\tan 2x} + C - 168$$

$$\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{\sin 2x} + C - 169$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \arcsin \frac{x\sqrt{5}}{5} + C - 170$$

$$\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan \frac{x\sqrt{5}}{5} + C - 171$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arcsec} \frac{x\sqrt{5}}{5} + C - 172$$

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \arcsin e^x + C - 173$$

$$\int \frac{e^{2x} dx}{1+e^{4x}} = \frac{1}{2} \arctan e^{2x} + C - 174$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C - 175$$

$$\int \frac{dx}{9x^2+4} = \frac{1}{6} \arctan \frac{3x}{2} + C - 176$$

$$\int \frac{\sin 8x}{9 + \sin^2 4x} dx = \frac{1}{12} \arctan \frac{\sin^2 4x}{3} + C - 177$$

$$\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1-4 \tan^2 x}} = \frac{1}{2} \arcsin (2 \tan x) + C - 178$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-9 \ln^2 x}} = \frac{1}{3} \arcsin \ln x^{3/2} + C - 179$$

$$\int \frac{2x^2-x^3}{2x^3+1} dx = \frac{1}{3} x^3 - x + \frac{\sqrt{2}}{3} \arctan x\sqrt{2} + C - 180$$

$$\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 2x + 8} = \frac{\sqrt{2}}{8} \arctan \frac{\sin 2x}{2\sqrt{2}} + C - 181$$

$$\int \frac{(2x-3) dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{(2x+6) dx}{x^2+6x+13} - 9 \int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \ln (x^2+6x+13) - \frac{9}{2} \arctan \frac{x+3}{2} + C - 182$$

$$\int \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx = \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2e^{2x}} + C - 183$$

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx = \ln (e^x+1)^2 - x + C - 184$$

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3} dx = \ln (e^{2x}+3)^{1/2} - \frac{1}{3}x + C - 185$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \ln \frac{C}{(1-\sqrt{x})^2}, C > 0 - 186$$

$$147. \int \frac{dx}{x+x^{1/3}} = \frac{3}{2} \ln C(x^{2/3}+1), C > 0 - 187$$

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C - 188$$

$$\int \cos \frac{1}{2}x dx = 2 \sin \frac{1}{2}x + C - 189$$

$$\int \sec 3x \tan 3x dx = \frac{1}{3} \sec 3x + C - 190$$

$$\int \csc^2 2x dx = -\frac{1}{2} \cot 2x + C - 191$$

$$\int x \sec^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \tan x^2 + C - 192$$

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C - 193$$

$$\int \tan \frac{1}{2}x dx = 2 \ln |\sec \frac{1}{2}x| + C - 194$$

$$\int \csc 3x dx = \frac{1}{3} \ln |\csc 3x - \cot 3x| + C - 195$$

$$\int b \sec ax \tan ax dx = \frac{b}{a} \sec ax + C - 196$$

$$\int (\cos x - \sin x)^2 dx = x + \frac{1}{2} \cos 2x + C - 197$$

$$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax + C - 198$$

$$= -\frac{1}{2a} \cos^2 ax + C = -\frac{1}{4a} \cos 2ax + K$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C - 199$$

$$\int \cos^2 x \sin x dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C - 200$$

$$\int \tan^2 x \sec^2 x dx = \frac{1}{3} \tan^3 x + C - 201$$

$$\int \cot^2 3x \csc^2 3x dx = -\frac{1}{18} \cot^3 3x + C - 202$$

$$\int \frac{(x-1) dx}{3x^3-4x+3} = \frac{1}{6} \int \frac{(6x-4) dx}{3x^3-4x+3} - \int \frac{dx}{9x^3-12x+9} = \frac{1}{6} \ln(3x^3-4x+3) - \frac{\sqrt{5}}{15} \arctan \frac{3x-2}{\sqrt{5}} + C - ١٨٤$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{27+6x-x^3}} = -\sqrt{27+6x-x^3} + 8 \arcsin \frac{x-8}{6} + C - ١٨٥$$

$$\int \frac{(5-4x) dx}{\sqrt{12x-4x^3-8}} = \sqrt{12x-4x^3-8} - \frac{1}{2} \arcsin(2x-8) + C - ١٨٦$$

$$\int \frac{dx}{25-9x^2} = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{3x+5}{3x-5} \right| + C - ١٨٧$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C - ١٨٧$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+4}} = \ln(x+\sqrt{x^3+4}) + C - ١٨٨$$

$$\int \frac{dx}{4x^3-9} = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{2x-3}{2x+3} \right| + C - ١٨٨$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3-25}} = \frac{1}{2} \ln |2x+\sqrt{4x^3-25}| + C - ١٨٩$$

$$\int \frac{dx}{9-x^3} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+3}{x-3} \right| + C - ١٨٩$$

$$\int \sqrt{16-9x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{16-9x^2} + \frac{8}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C - ١٩٠$$

$$\int \sqrt{x^2-16} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-16} - 8 \ln |x+\sqrt{x^2-16}| + C - ١٩١$$

$$\int \sqrt{4x^3+9} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{4x^3+9} + \frac{3}{4} \ln(2x+\sqrt{4x^3+9}) + C - ١٩٢$$

$$\int \sqrt{x^3-2x-3} dx = \frac{1}{2} (x-1) \sqrt{x^3-2x-3} - 2 \ln |x-1+\sqrt{x^3-2x-3}| + C - ١٩٣$$

$$\int \sqrt{12+4x-x^3} dx = \frac{1}{2} (x-2) \sqrt{12+4x-x^3} + 8 \arcsin \frac{1}{2} (x-2) + C - ١٩٤$$

$$\int \sqrt{x^3+4x} dx = \frac{1}{2} (x+2) \sqrt{x^3+4x} - 2 \ln |x+2+\sqrt{x^3+4x}| + C - ١٩٥$$

$$\int \sqrt{x^3-8x} dx = \frac{1}{2} (x-4) \sqrt{x^3-8x} - 8 \ln |x-4+\sqrt{x^3-8x}| + C - ١٩٦$$

$$\int \sqrt{6x-x^3} dx = \frac{1}{2} (x-3) \sqrt{6x-x^3} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x-3}{3} + C - ٢٠٠$$

## الفصل السادس والعشرون

### التكامل بالتجزئة

**التكامل بالتجزئة :** إذا كانت  $u$  و  $v$  دالتين قابلتين للاشتقاق فإن :

$$\begin{aligned} d(uv) &= u dv + v du \\ u dv &= d(uv) - v du \\ \int u dv &= uv - \int v du \end{aligned} \quad (1)$$

ولإستخدام (i) في حساب تكامل مطلوب ، ينبغي فصل التكامل المعطى إلى جزئين أحدهما  $u$  والآخر مع  $dx$  هو  $dv$  . ولهذا السبب فإن التكامل باستخدام المعادلة (i) يسمى التكامل بالتجزئة . وهناك قاعدتان عامتان هما :  
(أ) ينبغي أن يكون الجزء الذى اخترناه  $dv$  قابلاً للتكامل مباشرة .

(ب) ينبغي أن لا يكون  $\int v du$  أكثر تعقيداً من  $\int u dv$  .

**مثال ١ :** أوجد  $\int x^2 e^{x^2} dx$  .

لنضع  $u = x^2$  و  $dv = e^{x^2} dx$  فيكون  $du = 2x dx$  و  $v = \frac{1}{2} e^{x^2}$  .

واستناداً إلى القاعدة يكون :

$$\int x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

**مثال ٢ :** أوجد  $\int \ln(x^2 + 2) dx$  .

لنأخذ  $u = \ln(x^2 + 2)$  و  $dv = dx$  فيكون  $du = \frac{2x dx}{x^2 + 2}$  و  $v = x$  واستناداً إلى القاعدة يكون

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 2) dx &= x \ln(x^2 + 2) - \int \frac{2x^2 dx}{x^2 + 2} = x \ln(x^2 + 2) - \int \left( 2 - \frac{4}{x^2 + 2} \right) dx \\ &= x \ln(x^2 + 2) - 2x + 2\sqrt{2} \arctan x/\sqrt{2} + C \end{aligned}$$

أنظر المسائل ١ - ١٠

**صيغ الإختزال :** يمكن بالإستفادة من صيغ الإختزال تقليل الجهد الذى يبذل في تكرار عملية التكامل بالتجزئة لحساب قيمة تكامل ما . وتقودنا صيغ الإختزال ، بوجه عام إلى تكامل جديد له شكل التكامل الأصل ذاته بأُس أصغر أو أكبر . ونكون صيغ الإختزال ناجحة إذا نتج في آخر المطاف تكاملاً يمكن حسابه

وفيما يلي بعض صيغ الإختزال :

$$\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^m} = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{u}{(2m-2)(a^2 \pm u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{m-1}} \right\}, \quad m \neq 1 \quad (أ)$$

$$\int (a^2 \pm u^2)^m du = \frac{u(a^2 \pm u^2)^m}{2m+1} + \frac{2ma^2}{2m+1} \int (a^2 \pm u^2)^{m-1} du, \quad m \neq -1/2 \quad (ب)$$

$$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^m} = -\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{u}{(2m-2)(u^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{m-1}} \right\}, \quad m \neq 1 \quad (ج)$$

$$\int (u^2 - a^2)^m du = \frac{u(u^2 - a^2)^m}{2m+1} - \frac{2ma^2}{2m+1} \int (u^2 - a^2)^{m-1} du, \quad m \neq -1/2 \quad (د)$$

$$\int u^m e^{au} du = \frac{1}{a} u^m e^{au} - \frac{m}{a} \int u^{m-1} e^{au} du \quad (هـ)$$

$$\int \sin^m u du = -\frac{\sin^{m-1} u \cos u}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} u du \quad (و)$$

$$\int \cos^m u du = \frac{\cos^{m-1} u \sin u}{m} + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} u du \quad (ز)$$

$$\begin{aligned} \int \sin^m u \cos^n u du &= \frac{\sin^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m u \cos^{n-2} u du \\ &= -\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m-1} + \frac{m-1}{m-1} \int \sin^{m-2} u \cos^n u du, \quad m \neq -n \end{aligned} \quad (ح)$$

$$\int u^m \sin bu du = -\frac{u^m}{b} \cos bu + \frac{m}{b} \int u^{m-1} \cos bu du \quad (ط)$$

$$\int u^m \cos bu du = \frac{u^m}{b} \sin bu - \frac{m}{b} \int u^{m-1} \sin bu du \quad (ي)$$

أنظر المسألة ١١

### مسائل محلولة

$$١ - أوجد : \int x \sin x dx.$$

لدينا الاختيارات التالية :

$$u = x, dv = \sin x dx. \quad (أ) \quad u = \sin x, dv = x dx; \quad (ب) \quad u = x \sin x, dv = dx; \quad (١)$$

$$(١) \quad \text{فإذا اخترنا } u = x \sin x, dv = dx, \text{ إذن } du = (\sin x + x \cos x) dx, v = x, \text{ وبالتالي}$$

$$\int x \sin x dx = x \cdot x \sin x - \int x(\sin x + x \cos x) dx$$

ولكن التكامل الناتج في هذه الحالة ليس بدرجة بساطة التكامل الأصل وبذلك فإننا نستبعد هذا الاختيار .

$$(ب) \quad \text{وإذا اخترنا } u = \sin x, dv = x dx, \text{ إذن } du = \cos x dx, v = \frac{1}{2} x^2, \text{ وبالتالي :}$$

$$\int x \sin x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \int \frac{1}{2} x^2 \cos x dx$$

ولكن التكامل الناتج في هذه الحالة أيضا ليس بدرجة بساطة التكامل الأصل ولذلك فإننا نستبعد هذا الاختيار .

(ج) وإذا اخترنا  $u = x$ ,  $dv = \sin x \, dx$ , إذن  $du = dx$ ,  $v = -\cos x$ , وبالتالى :

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

٢- أوجد :  $\int x e^x \, dx$ .

لنضع  $u = x$ ,  $dv = e^x \, dx$ , إذن  $du = dx$ ,  $v = e^x$ , ومنه

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C$$

٣- أوجد :  $\int x^3 \ln x \, dx$ .

لنضع  $u = \ln x$ ,  $dv = x^3 \, dx$ , إذن  $du = \frac{dx}{x}$ ,  $v = \frac{x^4}{4}$ , ومنه

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^3}{4} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^2 \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{12} x^3 + C$$

٤- أوجد :  $\int x \sqrt{1+x} \, dx$ .

لنضع  $u = x$ ,  $dv = \sqrt{1+x} \, dx$ , إذن  $du = dx$ ,  $v = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$ , ومنه

$$\int x \sqrt{1+x} \, dx = \frac{2}{3} x(1+x)^{3/2} - \frac{2}{3} \int (1+x)^{3/2} \, dx = \frac{2}{3} x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15} (1+x)^{5/2} + C$$

٥- أوجد :  $\int \arcsin x \, dx$ .

لنضع  $u = \arcsin x$ ,  $dv = dx$ , إذن  $du = dx/\sqrt{1-x^2}$ ,  $v = x$ , ومنه

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

٦- أوجد :  $\int \sin^3 x \, dx$ .

لنضع  $u = \sin x$ ,  $dv = \sin x \, dx$ , إذن  $du = \cos x \, dx$ ,  $v = -\cos x$ , ومنه

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

ونقل التكامل الناتج إلى الطرف الأيسر نجد :

$$\int \sin^3 x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad \text{ومن} \quad 2 \int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + x + C'$$

٧- أوجد :  $\int \sec^3 x \, dx$ .

لنضع  $u = \sec x$ ,  $dv = \sec^2 x \, dx$ , إذن  $du = \sec x \tan x \, dx$ ,  $v = \tan x$ , ومنه



$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx\end{aligned}$$

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \int \sec x \, dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C \quad \text{وبالتالي}$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C \quad \text{والخبر ٨}$$

$$\int x^2 \sin x \, dx. \quad \text{أوجد} \quad \text{٨}$$

$$\text{لنضع } u = x^2, \, dv = \sin x \, dx, \text{ إذن } du = 2x \, dx, \, v = -\cos x, \text{ ومنه}$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx$$

$$\text{لنضع في التكامل الأخير } u = x, \, dv = \cos x \, dx, \text{ إذن } du = dx, \, v = \sin x, \text{ ومنه}$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &= -x^2 \cos x + 2 \left\{ x \sin x - \int \sin x \, dx \right\} \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C\end{aligned}$$

$$\int x^3 e^{2x} \, dx. \quad \text{أوجد} \quad \text{٩}$$

$$\text{لنضع } u = x^3, \, dv = e^{2x} \, dx, \text{ إذن } du = 3x^2 \, dx, \, v = \frac{1}{2}e^{2x}, \text{ ومنه}$$

$$\int x^3 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} \int x^2 e^{2x} \, dx$$

$$\text{لنضع في التكامل الأخير } u = x^2, \, dv = e^{2x} \, dx, \text{ إذن } du = 2x \, dx, \, v = \frac{1}{2}e^{2x}, \text{ ومنه}$$

$$\int x^3 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} \, dx \right\} = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{2} \int x e^{2x} \, dx$$

$$\text{ولنضع في التكامل الأخير } u = x, \, dv = e^{2x} \, dx, \text{ إذن } du = dx, \, v = \frac{1}{2}e^{2x}, \text{ ومنه}$$

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{2x} \, dx &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{4} x e^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x} + C\end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2 \pm x^2)^m} \quad \text{أوجد} \quad \text{١٠}$$

$$(١) \quad \text{لنأخذ } u = x, \, dv = \frac{x \, dx}{(a^2 \pm x^2)^m}, \text{ إذن } du = dx, \, v = \frac{-1}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}}, \text{ ومنه}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2 \pm x^2)^m} = \frac{-x}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}} \pm \frac{1}{2m-2} \int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{m-1}}$$

$$(ب) \quad \text{لنأخذ } u = x, \, dv = \frac{x \, dx}{(a^2 \pm x^2)^{m-1}}, \text{ إذن } du = dx, \, v = \frac{-1}{2m-2} (a^2 \pm x^2)^{-(m-1)}, \text{ ومنه}$$

$$\int x^2 (a^2 \pm x^2)^{m-1} dx = \frac{-x}{2m-2} (a^2 \pm x^2)^{m-1} \pm \frac{1}{2m-2} \int (a^2 \pm x^2)^{m-1} dx$$

$$١١ - أوجد (١)  $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$  (ب)  $\int (9+x^2)^{3/2} dx$$$

(١) بما أن استخدام صيغة الاختزال (١) تنقص الأس في المقام بمقدار الوحدة . فإننا نجد باستخدام هذه الصيغة مرتين أن :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{1/2}} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{1/2}} + \frac{2}{3} \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} + C$$

(ب) باستخدام صيغة الاختزال (ب) نجد أن :

$$\begin{aligned} \int (9+x^2)^{3/2} dx &= \frac{1}{4} x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{4} \int (9+x^2)^{1/2} dx \\ &= \frac{1}{4} x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{8} \{x(9+x^2)^{1/2} + 9 \ln(x + \sqrt{9+x^2})\} + C \end{aligned}$$

### مسائل إضافية

$$\int x \sec^3 3x dx = \frac{x}{9} \tan 3x - \frac{1}{9} \ln |\sec 3x| + C - ١٧ \quad \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C - ١٧$$

$$\int \arccos 2x dx = x \arccos 2x - \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C - ١٨$$

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C - ١٩$$

$$\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C - ١٧ \quad \int x^3 \sqrt{1-x} dx = -\frac{2}{165} (1-x)^{3/2} (15x^3 + 12x + 8) + C - ١٦$$

$$\int x \arctan x dx = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan x - \frac{1}{2} x + C - ١٨$$

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} (x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}) + C - ١٩$$

$$\int \sin^3 x dx = -\frac{2}{3} \cos^3 x - \sin^3 x \cos x + C - ٢٠$$

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C - ٢١$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{15} (3x^3 - 4x + 8) \sqrt{1+x} + C - ٢٢ \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^3} + C - ٢٢$$

$$\int x \arcsin x^2 dx = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C - ٢٤$$

$$\int \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{4} \sin 3x \cos x - \frac{1}{4} \sin x \cos 3x + C - ٢٥$$

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} x (\sin \ln x - \cos \ln x) + C - ٢٦$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C - ٢٧$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C - ٢٨$$

$$٢٩ - (١) اكتب  $\int \frac{x^2 dx}{(a^2 \pm x^2)^n} = \int \frac{(a^2 \pm x^2) \mp x^2}{(a^2 \pm x^2)^n} dx = \int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}} \mp \int \frac{x^2 dx}{(a^2 \pm x^2)^n}$  واستخدم$$

نتيجة المسألة ١٠ (١) لحصل ل صيغة الاختزال (١) .

(ب) اكتب  $\int (a^2 \pm x^2)^n dx = a^2 \int (a^2 \pm x^2)^{n-1} dx \pm \int x^2 (a^2 \pm x^2)^{n-1} dx$  واستخدم نتيجة المسألة ١٠ (ب) لتحصل على الاختزال (ب).

٣٠ - استنتج صيغة الاختزال من (ج) إلى (د).

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4(4+x^2)^{1/2}} + C \quad - ٣١ \quad \int \frac{dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x(5-3x^2)}{8(1-x^2)^2} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$\int (4-x^2)^{3/2} dx = \frac{1}{4} x(10-x^2) \sqrt{4-x^2} + 6 \arcsin \frac{1}{2} x + C \quad - ٣٢$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-16)^2} = \frac{1}{2048} \left\{ \frac{x(3x^2-80)}{(x^2-16)^2} + \frac{3}{8} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| \right\} + C \quad - ٣٤$$

$$\int (x^2-1)^{3/2} dx = \frac{1}{48} x(8x^2-26x+33) \sqrt{x^2-1} - \frac{5}{16} \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C \quad - ٣٥$$

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3}{8} x - \frac{3}{8} \sin x \cos x - \frac{1}{8} \sin^3 x \cos x + C \quad - ٣٦$$

$$\int \cos^3 x dx = \frac{1}{16} (3 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 8) \sin x + C \quad - ٣٧$$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x dx = -\frac{1}{4} \cos^3 x (\sin^2 x + \frac{2}{3}) + C \quad - ٣٨$$

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \frac{1}{5} \sin^3 x (\cos^4 x + \frac{4}{3} \cos^2 x + \frac{8}{15}) + C \quad - ٣٩$$

وهناك طريقة بديلة تصلح لبعض المسائل الصعبة في هذا الفصل. ويمكن الحصول على هذه الطريقة بملاحظة أن (أنظر المسألة ٩).

$$\int x^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} x^2 e^{2x} + \frac{3}{2} x e^{2x} - \frac{3}{4} e^{2x} + C \quad (I)$$

حيث حدود الطرف الأيمن - بغض النظر عن المعاملات (الأمثلة) - هي الحدود المختلفة التي نحصل عليها باشتقاق متكررة للدالة الكاملة  $x^3 e^{2x}$  وبالتالي فإنه يمكننا أن نكتب مباشرة:

$$\int x^3 e^{2x} dx = Ax^3 e^{2x} + Bx^2 e^{2x} + Dxe^{2x} + Ee^{2x} + C \quad (II)$$

وبالاشتقاق نجد أن

$$x^3 e^{2x} = 2Ax^3 e^{2x} + (3A+2B)x^2 e^{2x} + (2B+2D)xe^{2x} + (D+2E)e^{2x}$$

وبمساواة المعاملات نجد أن

$$2A = 1, \quad 3A + 2B = 0, \quad 2B + 2D = 0, \quad D + 2E = 0$$

وبالتالي فإن  $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{3}{4}A = -\frac{3}{8}, D = -B = \frac{3}{8}, E = -\frac{1}{2}D = -\frac{3}{16}$ . وبالتعويض عن

$E, D, B, A$  في (ii) نحصل على (i).

يمكن استخدام هذه الطريقة للحصول على  $\int f(x) dx$  إذا كان الضايف المتكرر للدالة  $f(x)$  يعطى في كل

مرة عدد محدود من الحدود المختلفة

٤٠ - أوجد  $\int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{13} e^{2x} (3 \sin 3x + 2 \cos 3x) + C$  وذلك باستخدام :

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = A e^{2x} \sin 3x + B e^{2x} \cos 3x + C$$

٤١ - أوجد  $\int e^{4x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) \, dx = \frac{1}{25} e^{4x} (-14 \sin 4x - 23 \cos 4x) + C$  وذلك باستخدام :

$$\int e^{4x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) \, dx = A e^{4x} \sin 4x + B e^{4x} \cos 4x + C$$

٤٢ - أوجد  $\int \sin 3x \cos 2x \, dx = -\frac{1}{5} (2 \sin 3x \sin 2x + 3 \cos 3x \cos 2x) + C$  وذلك باستخدام

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx = A \sin 3x \sin 2x + B \cos 3x \cos 2x + D \cos 3x \sin 2x + E \sin 3x \cos 2x + C$$

٤٣ - أوجد  $\int e^{2x} x^2 \sin x \, dx$

$$= \frac{e^{2x}}{250} [25x^2 (3 \sin x - \cos x) - 10x (4 \sin x - 3 \cos x) + 9 \sin x - 13 \cos x] + C$$

## الفصل السابع والعشرون

### التكاملات المثلثية

نستخدم التطبيقات التالية للمحول على التكاملات المثلثية في هذا الفصل .

$$\begin{array}{ll}
 \sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)] & - \text{٧} \\
 \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] & - \text{٨} \\
 \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] & - \text{٩} \\
 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2}x & - \text{١٠} \\
 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2}x & - \text{١١} \\
 1 \pm \sin x = 1 \pm \cos(\frac{1}{2}\pi - x) & - \text{١٢} \\
 \sin^2 x + \cos^2 x = 1 & - \text{١} \\
 1 + \tan^2 x = \sec^2 x & - \text{٢} \\
 1 + \cot^2 x = \csc^2 x & - \text{٣} \\
 \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) & - \text{٤} \\
 \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) & - \text{٥} \\
 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x & - \text{٦}
 \end{array}$$

### مسائل بحلولة

الجواب وجواب التمام :

$$\begin{aligned}
 \int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad - \text{١} \\
 \int \cos^2 3x \, dx &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12} \sin 6x + C \quad - \text{٢} \\
 \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C \quad - \text{٣} \\
 \int \cos^3 x \, dx &= \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \quad - \text{٤} \\
 &= \int \cos x \, dx - 2 \int \sin^2 x \cos x \, dx + \int \sin^4 x \cos x \, dx \\
 &= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C \\
 \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \quad - \text{٥} \\
 &= \int \sin^2 x \cos x \, dx - \int \sin^4 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C \\
 \int \cos^3 2x \sin^2 2x \, dx &= \int \cos^2 2x \sin^2 2x \sin 2x \, dx = \int \cos^2 2x (1 - \cos^2 2x) \sin 2x \, dx \quad - \text{٦} \\
 &= \int \cos^2 2x \sin 2x \, dx - \int \cos^4 2x \sin 2x \, dx = -\frac{1}{10} \cos^5 2x + \frac{1}{14} \cos^7 2x + C \\
 \int \sin^3 3x \cos^3 3x \, dx &= \int (1 - \cos^2 3x) \cos^3 3x \sin 3x \, dx \quad - \text{٧} \\
 &= \int \cos^3 3x \sin 3x \, dx - \int \cos^5 3x \sin 3x \, dx = -\frac{1}{10} \cos^5 3x + \frac{1}{24} \cos^7 3x + C \quad - \text{٨} \\
 \int \sin^3 3x \cos^3 3x \, dx &= \int \sin^2 3x (1 - \sin^2 3x) \cos 3x \, dx \\
 &= \int \sin^2 3x \cos 3x \, dx - 2 \int \sin^4 3x \cos 3x \, dx + \int \sin^6 3x \cos 3x \, dx \\
 &= \frac{1}{12} \sin^3 3x - \frac{1}{8} \sin^5 3x + \frac{1}{24} \sin^7 3x + C
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \int \cos^2 \frac{x}{3} dx &= \int \left(1 - \sin^2 \frac{x}{3}\right) \cos \frac{x}{3} dx = 3 \sin \frac{x}{3} - \sin^3 \frac{x}{3} + C = A \\
 \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = 9 \\
 &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx \\
 &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx \\
 &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \\
 \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C = 1. \\
 \int \sin^4 3x \cos^2 3x dx &= \int (\sin^2 3x \cos^2 3x) \sin^2 3x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 6x (1 - \cos 6x) dx = 11 \\
 &= \frac{1}{8} \int \sin^2 6x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cos 6x dx \\
 &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 12x) dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cos 6x dx \\
 &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \sin 12x - \frac{1}{144} \sin^3 6x + C \\
 \int \sin 3x \sin 2x dx &= \int \frac{1}{2} \{\cos (3x - 2x) - \cos (3x + 2x)\} dx = \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 5x) dx = 12 \\
 &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C \\
 \int \sin 3x \cos 5x dx &= \int \frac{1}{2} \{\sin (3x - 5x) + \sin (3x + 5x)\} dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C = 12 \\
 \int \cos 4x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 6x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{12} \sin 6x + C = 11 \\
 \int \sqrt{1 - \cos x} dx &= \sqrt{2} \int \sin \frac{1}{2} x dx = -2\sqrt{2} \cos \frac{1}{2} x + C = 10 \\
 \int (1 + \cos 3x)^{3/2} dx &= 2\sqrt{2} \int \cos^2 \frac{3}{2} x dx = 2\sqrt{2} \int (1 - \sin^2 \frac{3}{2} x) \cos \frac{3}{2} x dx = 16 \\
 &= 2\sqrt{2} \left( \frac{2}{3} \sin \frac{3}{2} x - \frac{2}{15} \sin^3 \frac{3}{2} x \right) + C \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin 2x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \cos (\frac{1}{2} x - 2x)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\sin (\frac{1}{2} x - x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \csc (\frac{1}{2} x - x) dx = 17 \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln |\csc (\frac{1}{2} x - x) - \cot (\frac{1}{2} x - x)| + C
 \end{aligned}$$

الظلالي والقواطع وظلال التمام وقواطع التمام :

$$\begin{aligned}
 \int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx = 18 \\
 &= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int (\sec^2 x - 1) dx = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C \\
 \int \tan^5 x dx &= \int \tan^3 x \tan^2 x dx = \int \tan^3 x (\sec^2 x - 1) dx = 19 \\
 &= \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan^3 x dx = \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\sec x| + C \\
 \int \sec^4 2x dx &= \int \sec^2 2x \sec^2 2x dx = \int \sec^2 2x (1 + \tan^2 2x) dx = 7. \\
 &= \int \sec^2 2x dx + \int \tan^2 2x \sec^2 2x dx = \frac{1}{2} \tan 2x + \frac{1}{4} \tan^3 2x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \tan^3 3x \sec^3 3x \, dx &= \int \tan^2 3x (1 + \tan^2 3x) \sec^3 3x \, dx = ٢١ \\ &= \int \tan^2 3x \sec^3 3x \, dx + \int \tan^4 3x \sec^3 3x \, dx = \frac{1}{12} \tan^3 3x + \frac{1}{12} \tan^5 3x + C \\ \int \tan^3 x \sec^3 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \, dx = \int \sec^5 x \, dx - \int \sec^3 x \, dx = ٢٢ \\ &= \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x - \frac{1}{4} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \tan^3 2x \sec^3 2x \, dx &= \int \tan^2 2x \sec^3 2x \cdot \sec 2x \tan 2x \, dx = ٢٣ \\ &= \int (\sec^2 2x - 1) \sec^3 2x \cdot \sec 2x \tan 2x \, dx \\ &= \int \sec^4 2x \cdot \sec 2x \tan 2x \, dx - \int \sec^3 2x \cdot \sec 2x \tan 2x \, dx \\ &= \frac{1}{10} \sec^5 2x - \frac{1}{8} \sec^3 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cot^3 2x \, dx &= \int \cot 2x (\csc^2 2x - 1) \, dx = -\frac{1}{2} \cot^2 2x + \frac{1}{2} \ln |\csc 2x| + C = ٢٤ \\ \int \cot^3 3x \, dx &= \int \cot^3 3x (\csc^2 3x - 1) \, dx = \int \cot^3 3x \csc^2 3x \, dx - \int \cot^3 3x \, dx = ٢٥ \\ &= \int \cot^3 3x \csc^2 3x \, dx - \int (\csc^2 3x - 1) \, dx = -\frac{1}{3} \cot^3 3x + \frac{1}{3} \cot 3x + x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \csc^5 x \, dx &= \int \csc^3 x (1 + \cot^2 x) \, dx = ٢٦ \\ &= \int \csc^3 x \, dx + 2 \int \cot^2 x \csc^3 x \, dx + \int \cot^4 x \csc^3 x \, dx \\ &= -\cot x - \frac{2}{3} \cot^3 x - \frac{1}{3} \cot^5 x + C \\ \int \cot^3 x \csc^4 x \, dx &= \int \cot^3 x (1 + \cot^2 x) \csc^4 x \, dx = ٢٧ \\ &= \int \cot^3 x \csc^4 x \, dx + \int \cot^5 x \csc^4 x \, dx = -\frac{1}{3} \cot^3 x - \frac{1}{12} \cot^5 x + C \\ \int \cot^3 x \csc^5 x \, dx &= \int \cot^3 x \csc^4 x \cdot \csc x \cot x \, dx = \int (\csc^5 x - 1) \csc^4 x \cdot \csc x \cot x \, dx = ٢٨ \\ &= \int \csc^9 x \cdot \csc x \cot x \, dx - \int \csc^4 x \cdot \csc x \cot x \, dx \\ &= -\frac{1}{8} \csc^8 x + \frac{1}{6} \csc^3 x + C \end{aligned}$$

### مسائل إضافية

$$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C = ٢٩ \quad \int \sin^3 2x \, dx = \frac{1}{2} \cos^3 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C = ٣٠$$

$$\int \sin^5 2x \, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 8x + C = ٣١$$

$$\int \cos^5 \frac{1}{2}x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{16} \sin 2x + C = ٣٢$$

$$\int \sin^7 x \, dx = \frac{1}{2} \cos^7 x - \frac{3}{2} \cos^5 x + \cos^3 x - \cos x + C = ٣٣$$

$$\int \cos^4 \frac{1}{2} x dx = \frac{5}{16} x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{32} \sin 2x - \frac{1}{24} \sin^3 x + C \quad ٢٤$$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{3} \sin^2 x + \frac{1}{3} \sin x + C \quad ٢٥$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \cos^3 x - \frac{1}{8} \cos^2 x + C \quad ٢٦$$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x dx = \frac{1}{48} \cos^3 2x - \frac{1}{16} \cos 2x + C \quad ٢٧$$

$$\int \sin^4 x \cos^4 x dx = \frac{1}{128} (3x - \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x) + C \quad ٢٨$$

$$\int \sin 2x \cos 4x dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{12} \cos 6x + C \quad ٢٩$$

$$\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + C \quad ٣٠$$

$$\int \sin 5x \sin x dx = \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin 6x + C \quad ٣١$$

$$\int \frac{\cos^{5/3} x}{\sin^{2/3} x} dx = -\frac{3}{5} \cot^{5/3} x + C \quad ٣٢ \quad \int \frac{\cos^3 x dx}{1 - \sin x} = \sin x + \frac{1}{2} \sin^2 x + C \quad ٣٣$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx = \csc x - \frac{1}{3} \csc^3 x + C \quad ٣٤$$

$$\int x (\cos^2 x^2 - \sin^2 x^2) dx = \frac{1}{12} (\sin x^2 + \cos x^2)(4 + \sin 2x^2) + C \quad ٣٥$$

$$\int \tan^2 x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C \quad ٣٦$$

$$\int \tan^2 3x \sec 3x dx = \frac{1}{3} \sec^3 3x - \frac{1}{3} \sec 3x + C \quad ٣٧$$

$$\int \tan^{3/2} x \sec^4 x dx = \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + \frac{2}{3} \tan^{1/2} x + C \quad ٣٨$$

$$\int \csc^4 2x dx = -\frac{1}{2} \cot 2x - \frac{1}{2} \cot^3 2x + C \quad ٣٩ \quad \int \tan^4 x \sec^4 x dx = \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{3} \tan x + C \quad ٤٠$$

$$\int \left( \frac{\sec x}{\tan x} \right)^4 dx = -\frac{1}{3 \tan^3 x} - \frac{1}{\tan x} + C \quad ٤١ \quad \int \cot^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot^2 x - \ln |\sin x| + C \quad ٤٢$$

$$\int \frac{\cot^3 x}{\csc x} dx = -\sin x - \csc x + C \quad ٤٣ \quad \int \cot^3 x \csc^4 x dx = -\frac{1}{4} \cot^4 x - \frac{1}{4} \cot^2 x + C \quad ٤٤$$

$$\int \tan x \sqrt{\sec x} dx = 2\sqrt{\sec x} + C \quad ٤٥ \quad \int \cot^2 x \csc^3 x dx = -\frac{1}{3} \csc^3 x + \frac{1}{3} \csc x + C \quad ٤٦$$

٤٧ - استخدم طريقة التكامل بالتجزئة لتنتج صيغ الاغترال التالية :

$$\int \sec^m u du = \frac{1}{m-1} \sec^{m-2} u \tan u + \frac{m-2}{m-1} \int \sec^{m-4} u du \quad (أ)$$

$$\int \csc^m u du = -\frac{1}{m-1} \csc^{m-2} u \cot u + \frac{m-2}{m-1} \int \csc^{m-4} u du \quad (ب)$$

استخدم صيغ الاغترال في المسألة ٤٧ لحساب قيم المسائل ٤٨ - ٤٩

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C \quad ٤٨$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \csc x \cot x - \frac{1}{2} \csc x \cot x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| + C \quad ٤٩$$

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x dx &= \frac{1}{3} \sec^3 x \tan x + \frac{1}{3} \sec^2 x \tan x + \frac{1}{3} \tan x + C \quad ٥٠ \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{2}{3} \tan x + \tan x + C \end{aligned}$$

## الفصل الثامن والعشرون

### التعويضات المثلثية

يمكن تحويل دالة التكامل ، التي تحتوي على أحد الأشكال  $\sqrt{a^2 + b^2 u^2}$  ،  $\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$  ، أو  $\sqrt{b^2 u^2 - a^2}$  بشرط عدم احتوائها على أى مضروب غير قياسى آخر إلى دالة تكامل أخرى . تحتوى على دوال مثلثية لتغير جديد :

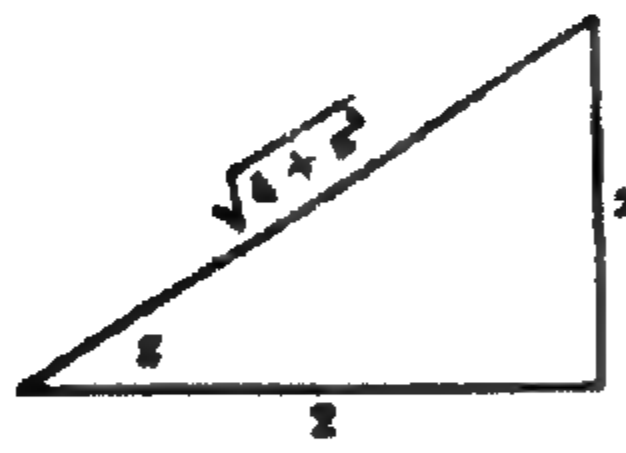
من أجل	استخدم	تتصل على
$\sqrt{a^2 - b^2 u^2}$	$u = \frac{a}{b} \sin z$	$a \sqrt{1 - \sin^2 z} = a \cos z$
$\sqrt{a^2 + b^2 u^2}$	$u = \frac{a}{b} \tan z$	$a \sqrt{1 + \tan^2 z} = a \sec z$
$\sqrt{b^2 u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{b} \sec z$	$a \sqrt{\sec^2 z - 1} = a \tan z$

وفى كل حالة بفقدنا التكامل إلى تعبير فى المتغير  $z$  . والحصول على التعبير المقابل فى المتغير الأصل نستخدم المثلث القائم كما هو مبين فى المسائل المحلولة التالية :

### مسائل محلولة

١- أوجد  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}}$

لنضع  $x = 2 \tan z$  ; ف يكون  $dx = 2 \sec^2 z dz$  و  $\sqrt{4+x^2} = 2 \sec z$  . وبالتالى فإن



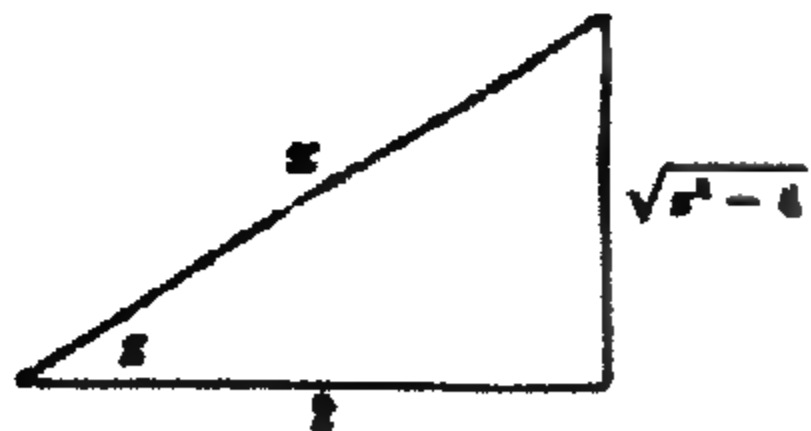
$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2 \sec^2 z dz}{(4 \tan^2 z)(2 \sec z)} = \frac{1}{4} \int \frac{\sec z}{\tan^2 z} dz$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^{-2} z \cos z dz = -\frac{1}{4 \sin z} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$

شكل ٢٨ - ١

٢- أوجد  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx$

لنضع  $x = 2 \sec z$  ; ف يكون  $dx = 2 \sec z \tan z dz$  . وبالتالى فإن  $\sqrt{x^2-4} = 2 \tan z$  .



$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx = \int \frac{4 \sec^2 z}{2 \tan z} (2 \sec z \tan z dz) = 4 \int \sec^3 z dz$$

$$= 2 \sec z \tan z + 2 \ln |\sec z + \tan z| + C'$$

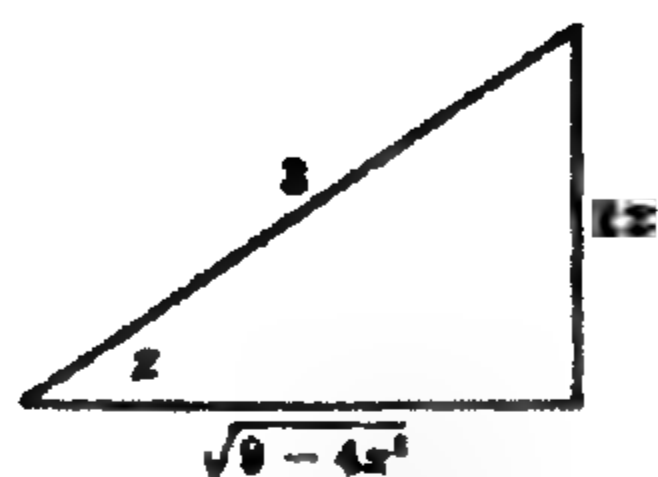
$$= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-4} + 2 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + C$$

شكل ٢٨ - ٢

٣- أوجد  $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx$ .

نضع  $x = \frac{3}{2} \sin z$ ; فيكون  $dx = \frac{3}{2} \cos z dz$  و  $\sqrt{9-4x^2} = 3 \cos z$  وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx &= \int \frac{3 \cos z}{\frac{3}{2} \sin z} \left( \frac{3}{2} \cos z dz \right) = 3 \int \frac{\cos^2 z}{\sin z} dz \\ &= 3 \int \frac{1 - \sin^2 z}{\sin z} dz = 3 \int \csc z dz - 3 \int \sin z dz \\ &= 3 \ln |\csc z - \cot z| + 3 \cos z + C' \\ &= 3 \ln \left| \frac{3 - \sqrt{9-4x^2}}{x} \right| + \sqrt{9-4x^2} + C \end{aligned}$$

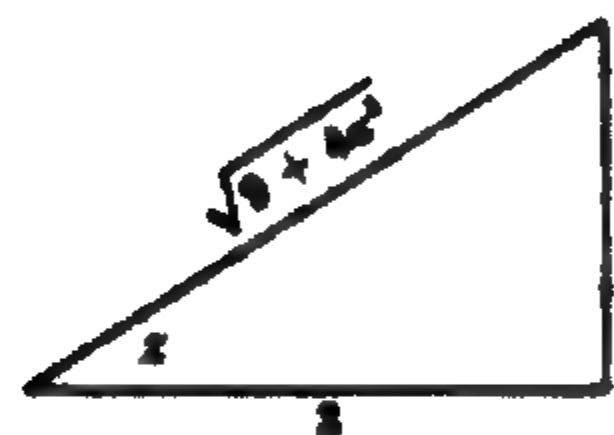


شكل ٢٨ - ٣

٤- أوجد  $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$ .

نضع  $x = \frac{3}{2} \tan z$ ; فيكون  $dx = \frac{3}{2} \sec^2 z dz$  و  $\sqrt{9+4x^2} = 3 \sec z$  وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} &= \int \frac{\frac{3}{2} \sec^2 z dz}{\frac{3}{2} \tan z \cdot 3 \sec z} = \frac{1}{3} \int \csc z dz \\ &= \frac{1}{3} \ln |\csc z - \cot z| + C' = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{9+4x^2} - 3}{x} \right| + C \end{aligned}$$

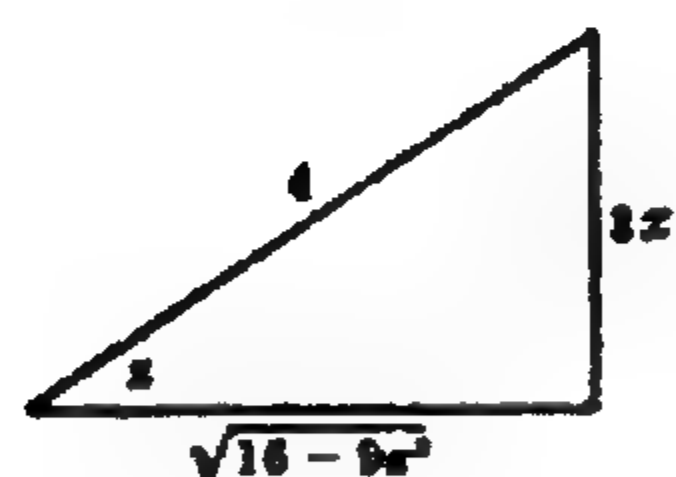


شكل ٢٨ - ٤

٥- أوجد  $\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^5} dx$ .

نضع  $x = \frac{4}{3} \sin z$ ; فيكون  $dx = \frac{4}{3} \cos z dz$  و  $\sqrt{16-9x^2} = 4 \cos z$  وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} \int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^5} dx &= \int \frac{64 \cos^3 z \cdot \frac{4}{3} \cos z dz}{\frac{1024}{243} \sin^5 z} = \frac{243}{16} \int \frac{\cos^4 z}{\sin^5 z} dz \\ &= \frac{243}{16} \int \cot^4 z \csc^2 z dz = -\frac{243}{80} \cot^3 z + C \\ &= -\frac{243}{80} \cdot \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{243x^4} + C = -\frac{1}{80} \cdot \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^4} + C \end{aligned}$$

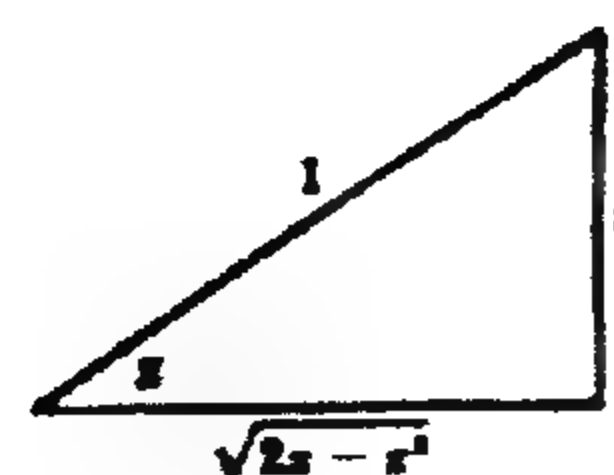


شكل ٢٨ - ٥

٦- أوجد  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ .

نضع  $x-1 = \sin z$ ; فيكون  $dx = \cos z dz$  و  $\sqrt{2x-x^2} = \cos z$  وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}} &= \int \frac{(1+\sin z)^2 \cos z dz}{\cos z} = \int (1+\sin z)^2 dz \\ &= \int \left( \frac{1}{2} + 2 \sin z - \frac{1}{2} \cos 2z \right) dz = \frac{1}{2} z - 2 \cos z - \frac{1}{4} \sin 2z + C \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(x-1) - 2\sqrt{2x-x^2} - \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + C \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(x-1) - \frac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2} + C \end{aligned}$$

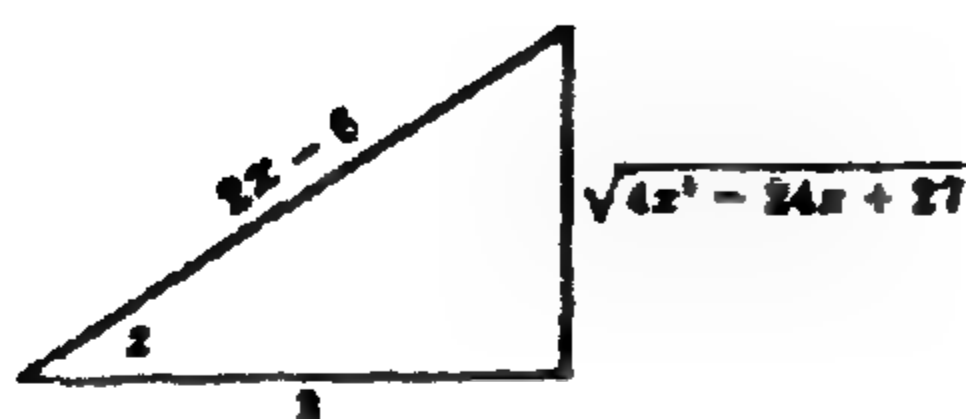


شكل ٢٨ - ٦



$$\int \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}} = \int \frac{dx}{(4(x-3)^2 - 9)^{3/2}} \quad \text{أوجد } \gamma$$

لنضع  $x-3 = \frac{3}{2} \sec z$  فيكون  $dx = \frac{3}{2} \sec z \tan z dz$  و  $\sqrt{4x^2 - 24x + 27} = 3 \tan z$  وبالتالى فإن :



شكل ٢٨ - ٧

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}} &= \int \frac{\frac{3}{2} \sec z \tan z dz}{27 \tan^3 z} \\ &= \frac{1}{18} \int \sin^{-2} z \cos z dz \\ &= -\frac{1}{18} \csc z + C \\ &= -\frac{1}{9} \frac{x-3}{\sqrt{4x^2 - 24x + 27}} + C \end{aligned}$$

مسائل إضافية

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}} &= \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C \quad - ٨ \\ \int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx &= 5 \ln \left| \frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x} \right| + \sqrt{25-x^2} + C \quad - ٩ \\ \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2-x^2}} &= -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 x} + C \quad - ١٠ \\ \int \sqrt{x^2+4} dx &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+4} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) + C \quad - ١١ \\ \int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} &= \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin \frac{x}{a} + C \quad - ١٢ \\ \int \sqrt{x^2-4} dx &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-4} - 2 \ln|x + \sqrt{x^2-4}| + C \quad - ١٣ \\ \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx &= \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+a^2}+a} + C \quad - ١٤ \\ \int \frac{x^2 dx}{(4-x^2)^{5/2}} &= \frac{x^3}{12(4-x^2)^{3/2}} + C \quad - ١٥ \\ \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} &= \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}} + C \quad - ١٦ \\ \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}} &= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C \quad - ١٧ \\ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-16}} &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-16} + 8 \ln|x + \sqrt{x^2-16}| + C \quad - ١٨ \\ \int x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx &= \frac{1}{6} (a^2-x^2)^{3/2} - \frac{a^2}{8} (a^2-x^2)^{1/2} + C \quad - ١٩ \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}} &= \ln(x-2 + \sqrt{x^2-4x+13}) + C \quad - ٢٠ \\ \int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}} &= \frac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}} + C \quad - ٢١ \\ \int \frac{dx}{(9+x^2)^2} &= \frac{1}{54} \arctan \frac{x}{3} + \frac{x}{18(9+x^2)} + C \quad - ٢٢ \end{aligned}$$

أجرى التكامل بالتجزئة في المسائل ٢١-٢٢ واستخدم الطريقة المتبعة في هذا الفصل.

$$\int x \arcsin x dx = \frac{1}{2} (2x^2-1) \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C \quad - ٢٣$$

$$\int x \arccos x dx = \frac{1}{2} (2x^2-1) \arccos x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C \quad - ٢٤$$

## الفصل التاسع والعشرون

### التكامل بالكسور الجزئية

**متعددة الحدود في  $x$  هي دالة من الشكل  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  حيث المعاملات  $a_n$  ثوابت و  $a_0 \neq 0$  و  $n$  عدد صحيح موجب أو صفر.**

إذا تساوت متعددات حدود من نفس الدرجة لجميع قيم المتغير فإن معاملات المتغير ذات القوة الواحدة في المتعددين تكون متساوية.

يمكن التعبير عن كل متعددة حدود ذات معاملات حقيقية (نظرياً على الأقل) بحاصل ضرب معاملات خطية حقيقية من الشكل  $2x + b$  ومعاملات تربيعية حقيقية، غير قابلة للتحويل إلى مضارب خطية، من الشكل  $ax^2 + bx + c$ .

تسمى الدالة  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  حيث  $f(x)$  و  $g(x)$  متعددات حدود بدالة جزئية.

وإذا كانت درجة  $f(x)$  أقل من درجة  $g(x)$  فإن  $F(x)$  تسمى كسراً حقيقياً وخلاف ذلك فإن  $F(x)$  تسمى كسراً غير حقيقياً.

يمكن التعبير عن كل كسر غير حقيقى بمجموع كثيرة حدود وكسر حقيقى. مثل  $\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$ . يمكن (نظرياً على الأقل) التعبير عن كل كسر قياسى بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية) مقاماتها من الشكل  $(ax+b)^n$  أو من الشكل  $(ax^2+bx+c)^n$  حيث  $n$  عدد صحيح موجب. وهناك أيضاً، حسب طبيعة معاملات المقام، أربع حالات:

#### الحالة I معاملات خطية متميزة:

يقابل كل معامل خطى  $ax+b$  يظهر مرة واحدة في مقام كسر قياسى حقيقى كسراً جزئياً وحيداً من الشكل  $\frac{A}{ax+b}$  حيث  $A$  ثابت يبنى تبعه.

أنظر المسألين ١ - ٢

#### الحالة II معاملات خطية متكررة:

يقابل كل معامل خطى  $ax+b$  يظهر  $n$  مرة في مقام كسر قياسى حقيقى مجموع  $n$  كسراً جزئياً من الشكل

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

حيث  $A_1$  ثوابت يبنى تبعها.

أنظر المسألين ٣ - ٤

#### الحالة III معاملات تربيعية متميزة:

يقابل كل معامل تربيعى  $ax^2+bx+c$ ، غير قابل للتحويل إلى معاملات خطية، يظهر مرة واحدة

في مقام كسر قياس حقيقي ، كسرا جزئيا وحيدا من الشكل  $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$  حيث  $A$  و  $B$  ثابتان ينبغي تعيينهما .  
أنظر المآتين ٥ - ٦

#### الحالة IV معاملات تربيعية مكررة :

يقابل كل معامل تربيعي  $ax^2+bx+c$  يظهر  $n$  مرة في مقام كسر قياس حقيقي ، مجموع  $n$  كسرا جزئيا من الشكل .

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

حيث  $A_i$  و  $B_i$  ثوابت ينبغي تعيينها .

أنظر المآتين ٧ - ٨

#### مسائل محلولة

١- أوجد  $\int \frac{dx}{x^2-4}$  .

(١) نحلل المقام إلى  $x^2-4 = (x-2)(x+2)$  .

ونكتب  $\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$  ونخلص من المقامات فنحصل على :

(١)  $1 = A(x+2) + B(x-2)$  أو (٢)  $1 = (A+B)x + (2A-2B)$

(ب) تعيين الثوابت

الطريقة العامة . تساوى بين معاملات الحدود متساوية القوى لـ  $x$  في (٢) ، ثم نحل المعادلات الناتجة آنفا لنحصل من الثوابت ، وهكذا نجد أن  $A+B=0$  و  $2A-2B=1$  ومنه  $A=\frac{1}{4}$  و  $B=-\frac{1}{4}$   
الطريقة المختصرة : بالتعويض من  $x=2$  في (١) نجد أن  $1=4A$  و  $1=-4B$  ومنه  $A=\frac{1}{4}$  و  $B=-\frac{1}{4}$  تماما كما وجدنا ( يلاحظ أن القيمتين اللتين اخترناهما لـ  $x$  هما القيمتان اللتان تجعلان مقام الكسرين الجزئيين مساويا للصفر ) .

(ج) وهكذا يكون لدينا مهما كانت الطريقة  $\frac{1}{x^2-4} = \frac{\frac{1}{4}}{x-2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+2}$  ومنه

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+2| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

٢- أوجد  $\int \frac{(x-1)dx}{x^3+x^2-6x}$  .

(١)  $x^3+x^2-6x = x(x-2)(x+3)$  إذن  $\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$  وبالتالى :

(١)  $x+1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$

أو (٢)  $x+1 = (A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x - 6A$

(ب) الطريقة العامة . نحل مجموعة المعادلات :

$$A + B + C = 0, \quad A + 3B - 2C = 1, \quad \text{و} \quad -6A = 1$$

$$C = -2/15, \quad B = 3/10, \quad A = -1/6$$

الطريقة المختصرة : لتعويض في (١) بالقيم  $x = 0$  و  $x = 2$  و  $x = -3$  فنحصل على  $1 = -6A$  ،  
 منه  $A = -1/6$  ، وعلى  $3 = 10B$  ومنه  $B = 3/10$  وعلى  $-2 = 15C$  ومنه  $C = -2/15$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x} &= -\frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{10} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15} \int \frac{dx}{x+3} \\ &= -\frac{1}{6} \ln|x| + \frac{3}{10} \ln|x-2| - \frac{2}{15} \ln|x+3| + C = \ln \frac{|x-2|^{3/10}}{|x|^{1/6} |x+3|^{2/15}} + C \quad (-) \end{aligned}$$

$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1} \quad \text{أوجد - ٢}$$

$$\text{و بالتالي} \quad \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad \text{إذن} \quad x^3-x^2-x+1 = (x+1)(x-1)^2$$

$$3x+5 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$$

وإذا وضعنا  $x = -1$  نجد  $2 = 4A$  ومنه  $A = 1/2$  ، وإذا وضعنا  $x = 1$  نجد  $8 = 2C$  ومنه  $C = 4$  ،  
 ولتحديد الثوابت الأخرى استخدم أية قيمة أخرى لـ  $x$  ، مثلاً  $x = 0$  فنجد  $5 = A - B + C$  ومنه  $B = -1/2$  إذن :

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C = -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} dx \quad \text{أوجد - ٣}$$

إن دالة التكامل كسر غير حقيقى . بالتقسيم نجد أن

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} = x - \frac{x+1}{x^3-x^2} = x - \frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

$$\text{نكتب} \quad \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \quad \text{إذن}$$

$$x+1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

نضع  $x = 0$  فنجد  $1 = -B$  ومنه  $B = -1$  ، ثم لنضع  $x = 1$  فنجد  $2 = C$  ، أما إذا وضعنا  $x = 2$  فإننا نجد  $3 = 2A + B + 4C$  ومنه  $A = -2$  وهكذا يكون :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} dx &= \int x dx + 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} - 2 \int \frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{1}{2} x^2 + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} - 2 \ln|x-1| + C = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{x} + 2 \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} dx \quad \text{أوجد - ٤}$$

$$\text{إن} \quad x^4+3x^2+2 = (x^2+1)(x^2+2) \quad \text{نكتب} \quad \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \quad \text{إذن} :$$

$$\begin{aligned} x^3+x^2+x+2 &= (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1) \\ &= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D) \end{aligned}$$

وبالتالى  $A=0, B=1, C=1, D=0$ . بالحل الآتى نجد أن  $A+C=1, B+D=1, 2A+C=1, 2B+D=2$ .

إذن

$$\int \frac{x^2 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{x dx}{x^2 + 2} = \arctan x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + C$$

٦- حل المعادلة  $\int \frac{x^2 dx}{a^2 - x^2} = \int k dt$  التى نورد فى الكيمياء الفيزيائية.

$$\text{لنكتب } \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x} + \frac{Cx+D}{a^2+x^2} \text{ إذن}$$

$$x^2 = A(a+x)(a^2+x^2) + B(a-x)(a^2+x^2) + (Cx+D)(a-x)(a+x)$$

إذا وضعنا  $x=a$  نجد  $a^2 = 4Aa^2$  ومنه  $A = \frac{1}{4}a$  وإذا وضعنا  $x=-a$  نجد  $a^2 = 4Ba^2$  ومنه  $B = \frac{1}{4}a$  وإذا وضعنا  $x=0$  نجد  $0 = Aa^2 + Ba^2 + Da^2 = a^2/2 + Da^2$  ومنه  $D = -1/2$  أما إذا وضعنا  $x=2a$  فإننا نجد  $4a^4 = 15Aa^3 - 5Ba^3 - 6Ca^3 - 8Da^3$  ومنه  $C=0$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{4a} \int \frac{dx}{a-x} + \frac{1}{4a} \int \frac{dx}{a+x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{a^2+x^2} \quad \text{إذن:} \\ &= -\frac{1}{4a} \ln|a-x| + \frac{1}{4a} \ln|a+x| - \frac{1}{2a} \arctan \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

$$\int k dt = kt = \frac{1}{4a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| - \frac{1}{2a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{وهو}$$

$$٧- \text{أوجد } \int \frac{x^4 - x^2 + 4x^2 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx.$$

$$\text{لنكتب } \frac{x^4 - x^2 + 4x^2 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3} \text{ إذن:}$$

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + 4x^2 - 4x^2 + 8x - 4 &= (Ax+B)(x^2+2)^2 + (Cx+D)(x^2+2) + Ex+F \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (4A+C)x^2 + (4B+D)x^2 \\ &\quad + (4A+2C+E)x + (4B+2D+F) \end{aligned}$$

ومن هنا نجد  $A=1, B=-1, C=0, D=0, E=4, F=0$ . وهكذا فإن التكامل يساوى :

$$\int \frac{x-1}{x^2+2} dx + 4 \int \frac{x dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + C$$

$$٨- \text{أوجد } \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} dx.$$

$$\text{لنكتب } \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} \text{ إذن:}$$

$$2x^2 + 3 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D)$$



ومنها نجد  $A=0, B=2, A+C=0, B+D=2$  إلى  $A=0, B=2, C=0, D=1$  وممكننا يكون :

$$\int \frac{2x^3+3}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{2dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

لحساب التكامل الثاني في الطرف الأيمن نضع  $x = \tan z$  فنجد

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\sec^2 z dz}{\sec^4 z} = \int \cos^2 z dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sin 2z + C$$

$$\int \frac{2x^3+3}{(x^2+1)^2} dx = 2 \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} + C = \frac{5}{2} \arctan x + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} + C$$

### مسائل إضافية

$$\int \frac{x^3+3x-4}{x^3-2x-8} dx = x + \ln |(x+2)(x-4)^2| + C - ١٧$$

$$\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C - ٩$$

$$\int \frac{x^3-3x-1}{x^3+x^2-2x} dx = \ln \left| \frac{x^{3/2}(x+2)^{3/2}}{x-1} \right| + C - ١٧$$

$$\int \frac{dx}{x^3+7x+6} = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x+1}{x+6} \right| + C - ١٠$$

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \ln |x-2| - \frac{2}{x-2} + C - ١٦$$

$$\int \frac{x dx}{x^3-8x-4} = \frac{1}{8} \ln |(x+1)(x-4)^2| + C - ١١$$

$$\int \frac{x^4}{(1-x)^2} dx = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \ln(1-x)^2 - \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + C - ١٥$$

$$\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+9)} dx = \ln \sqrt{x^2+8} + \arctan x + C - ١٧$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x} = \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + C - ١٦$$

$$\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x} dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}} \right| + C - ١٨$$

$$\int \frac{2x^3 dx}{(x^2+1)^2} = \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + C - ١٩$$

$$\int \frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2} dx = \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}x + \frac{4}{x^2+4} + C - ٢٠$$

$$\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2} dx = \ln \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+1} \right) + C - ٢١$$

$$\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^2+1)} dx = \ln \left| \frac{x^2-x^2+x}{(x+1)^2} \right| - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C - ٢٢$$

$$\int \frac{x^3+x^2-5x+16}{(x^2+5)(x^2+2x+3)} dx = \ln \sqrt{x^2+2x+3} + \frac{5}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{5} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C - ٢٣$$

$$\int \frac{x^5+7x^4+15x^3+32x^2+23x+25x-8}{(x^2+x+2)^2(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{x^2+x+2} - \frac{3}{x^2+1} + \ln \frac{x^2+1}{x^2+x+2} + C - ٢٤$$

$$(e^x = u \text{ ضع}) \int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{1}{2e^x} + \frac{1}{9} \ln \left| \frac{e^x-3}{e^x} \right| + C - ٢٥$$

$$(\cos x = u \text{ ضع}) \int \frac{\sin x dx}{\cos x (1+\cos^2 x)} = \ln \left| \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x} \right| + C - ٢٦$$

$$\int \frac{(2+\tan^2 \theta) \sec^2 \theta d\theta}{1+\tan^2 \theta} = \ln |1+\tan \theta| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \theta - 1}{\sqrt{3}} + C - ٢٧$$

# الفصل الثالث

## تعويضات متنوعة

إذا كانت دالة التكامل جذرية باستثناء جذر من الشكل :

$$- ١ \quad \sqrt[n]{au + b}, \quad \text{فإن التعويض } au + b = z^n \text{ يقودنا إلى دالة تكامل جذرية.}$$

$$- ٢ \quad \sqrt{q + pu + u^2}, \quad \text{فإن التعويض } q + pu + u^2 = (z - u)^2 \text{ يقودنا إلى دالة تكامل جذرية.}$$

$$- ٣ \quad \sqrt{q + pu - u^2} = \sqrt{(a + u)(\beta - u)}, \quad \text{فإن التعويض } z^2 = (a + u)(\beta - u) \text{ يقودنا إلى دالة تكامل جذرية.}$$

$$q + pu - u^2 = (\beta - u)^2 z^2$$

انظر المسائل ١ - ٥

التعويض  $u = 2 \arctan z$  يحول أى دالة جذرية في  $\sin u$  و  $\cos u$  إلى دالة

جذرية في  $z$  لأن :



$$\sin u = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \text{and} \quad du = \frac{2dz}{1+z^2}$$

نحصل على الملاحظة الأولى والثانية من الشكل المرافق ٢٠ - ١ أما الملاحظة الثالثة فنحصل

عليها بالاشتقاق .

شكل ٢٠ - ١

$$u = 2 \arctan z$$

وبعد إجراء التكامل نعوض بـ  $z = \tan \frac{1}{2} u$  لعودة إلى المتغير الأصل .

انظر المسائل ٦ - ١٠

وهناك تعويضات أخرى يجدر بها غالباً شكل دالة التكامل

انظر المسائل ١١ - ١٢

## مسائل محلولة

- لوجد  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$ . نضع  $1-x = x^2$ . إذن  $dx = -2x dx$ , و  $x = 1-x^2$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2x dx}{(1-x^2)x} = -2 \int \frac{dx}{1-x^2} = -\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C = \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} \right| + C$$

- لوجد  $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ . نضع  $x+2 = x^2$ . إذن  $dx = 2x dx$ , و  $x = x^2 - 2$

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2x dx}{x(x^2-4)} = 2 \int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2} \right| +$$

٣ - أوجد  $\int \frac{dx}{x^{1/3} - x^{1/4}}$  لنضع  $x = z^4$  إذن  $dx = 4z^3 dz$  ومنه :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^{1/3} - x^{1/4}} &= \int \frac{4z^3 dz}{z^4 - z} = 4 \int \frac{z^3}{z^4 - z} dz = 4 \int \left( z + 1 + \frac{1}{z-1} \right) dz \\ &= 4 \left( \frac{1}{4} z^4 + z + \ln |z-1| \right) + C = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + \ln (\sqrt[4]{x}-1)^4 + C \end{aligned}$$

٤ - أوجد  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3+x+2}}$  لنضع  $x^3+x+2 = (z-x)^2$  إذن :

ومن  $x = \frac{z^3-2}{1+2z}$ ,  $dx = \frac{2(z^3+z+2) dz}{(1+2z)^2}$ ,  $\sqrt{x^3+x+2} = \frac{z^3+z+2}{1+2z}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^3+x+2}} &= \int \frac{\frac{2(z^3+z+2)}{(1+2z)^2}}{\frac{z^3-2}{1+2z} \cdot \frac{z^3+z+2}{1+2z}} dz = 2 \int \frac{dz}{z^3-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^3+x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^3+x+2}+x+\sqrt{2}} \right| + C \end{aligned}$$

٥ - أوجد  $\int \frac{x dx}{(5-4x-x^3)^{3/2}}$  لنضع  $5-4x-x^3 = (5+x)(1-x) = (1-x)^2 z^4$  إذن :

ومن  $x = \frac{z^4-5}{1+z^4}$ ,  $dx = \frac{12z dz}{(1+z^4)^2}$ ,  $\sqrt{5-4x-x^3} = (1-x)z = \frac{6z}{1+z^4}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(5-4x-x^3)^{3/2}} &= \int \frac{\frac{z^4-5}{1+z^4} \cdot \frac{12z}{(1+z^4)^2}}{\frac{216z^3}{(1+z^4)^3}} dz = \frac{1}{18} \int \left( 1 - \frac{5}{z^4} \right) dz \\ &= \frac{1}{18} \left( z + \frac{5}{z} \right) + C = \frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^3}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x} &= \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{1 + \frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z(1+z)} = \ln |z| - \ln |1+z| + C \\ &= \ln \left| \frac{z}{1+z} \right| + C = \ln \left| \frac{\tan \frac{1}{2}x}{1 + \tan \frac{1}{2}x} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3-2\cos x} &= \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{3 - 2\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2 dz}{1+5z^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \arctan z\sqrt{5} + C \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \arctan (\sqrt{5} \tan \frac{1}{2}x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{1+z^2}{1-z^2} \cdot \frac{2 dz}{1+z^2} = 2 \int \frac{dz}{1-z^2} = \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + C = \ln \left| \frac{1+\tan \frac{1}{2}x}{1-\tan \frac{1}{2}x} \right| + C \\ &= \ln |\tan (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+\cos x} &= \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{2 + \frac{1-z^2}{1+z^2}} = 2 \int \frac{dz}{3+z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{z}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \tan \frac{1}{2}x \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5+4\sin x} &= \int \frac{\frac{2 dz}{1+z^2}}{5 + 4\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2 dz}{5+8z+5z^2} = \frac{2}{5} \int \frac{dz}{(z+\frac{4}{5})^2 + \frac{3}{25}} \\ &= \frac{2}{3} \arctan \frac{z+4/5}{3/5} + C = \frac{2}{3} \arctan \frac{5 \tan \frac{1}{2}x + 4}{3} + C \end{aligned}$$

١١ - استخدم التعويض  $1 - x^2 = z^2$  لتصل على  $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ . أن  $x^2 = 1 - z^2$  ومنه  $2x^2 dx = -2z dz$ ، وبالتالي :

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx &= \int x^2 \sqrt{1-x^2} \cdot x^2 dx = \int (1-z^2)z(-\frac{2}{3}z dz) = -\frac{2}{3} \int (1-z^2)z^3 dz \\ &= -\frac{2}{3} \left( \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{6} \right) + C = -\frac{2}{45} (1-x^2)^{3/2} (2+3x^2) + C \end{aligned}$$

١٢ - استخدم  $x = \frac{1}{z}$  لتصل على  $\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4} dx$ . أن  $\sqrt{x-x^2} = \frac{1}{z} \sqrt{z-1}$ ، ومنه  $dx = -\frac{dz}{z^2}$ ،

$$\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4} dx = \int \frac{\frac{1}{z} \sqrt{z-1} \left( -\frac{dz}{z^2} \right)}{1/z^4} = - \int z \sqrt{z-1} dz$$

لنضع  $z-1 = s^2$  إذن :

$$\begin{aligned} \int z \sqrt{z-1} dz &= - \int (s^2+1)s \cdot 2s ds = -2 \left( \frac{s^5}{5} + \frac{s^3}{3} \right) + C \\ &= -2 \left( \frac{(z-1)^{5/2}}{5} + \frac{(z-1)^{3/2}}{3} \right) + C = -2 \left( \frac{(1-x)^{5/2}}{5x^{5/2}} + \frac{(1-x)^{3/2}}{3x^{3/2}} \right) + C \end{aligned}$$

### مسائل إضافية

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C \quad ١٤ \quad \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + C \quad ١٧$$

$$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2} - 6 \ln(3+\sqrt{x+2}) + C \quad ١٥$$

$$\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}} dx = -x + \frac{4}{3} \left\{ \sqrt{3x+2} - \ln(1+\sqrt{3x+2}) \right\} + C \quad ١٦$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \ln|2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1| + C \quad ١٧$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} = 2 \arctan(\sqrt{x^2+x-1}+x) + C \quad ١٨$$

$$\int \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x^2} dx = -\frac{(4x-x^2)^{3/2}}{6x^3} + C \quad ١٩ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}} = \arcsin \frac{2x-1}{5} + C \quad ١٩$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^{1/3} + (x+1)^{2/3}} = 2(x+1)^{1/3} - 4(x+1)^{2/3} + 4 \ln(1+(x+1)^{1/3}) + C \quad ٢١$$

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{1}{2}x + 1}{\sqrt{3}} + C \quad ٢٢$$

$$\int \frac{dx}{1-2 \sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \frac{\tan \frac{1}{2}x - 2 - \sqrt{3}}{\tan \frac{1}{2}x - 2 + \sqrt{3}} \right| + C \quad ٢٢$$

$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x - 1} = \ln |\tan \frac{1}{2}x - 1| + C \quad ٢٥ \quad \int \frac{dx}{3+5 \sin x} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{3 \tan \frac{1}{2}x + 1}{\tan \frac{1}{2}x + 3} \right| + C \quad ٢٦$$

$$\int \frac{\sin x dx}{1+\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\tan^2 \frac{1}{2}x + 3 - 2\sqrt{2}}{\tan^2 \frac{1}{2}x + 3 + 2\sqrt{2}} \right| + C \quad ٢٧ \quad \int \frac{dx}{5+3 \sin x} = \frac{1}{2} \arctan \frac{5 \tan \frac{1}{2}x + 3}{4} + C \quad ٢٨$$

$$\int \frac{dx}{2-\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan \frac{1}{2}x) + C \quad ٢٩ \quad \int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x} = \ln |1+\tan \frac{1}{2}x| + C \quad ٢٨$$

$$\int \sin \sqrt{x} dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C \quad ٣٠$$

$$\text{ضع } x = 1/z \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}} = -\arcsin \frac{1-x}{2x} + C - ٢١$$

$$\text{ضع } z = 1 + e^x \quad \int \frac{(e^x-2)e^x}{e^x+1} dx = e^x - 3 \ln(e^x+1) + C - ٢٢$$

$$\text{ضع } \cos x = z \quad \int \frac{\sin x \cos x}{1-\cos x} dx = \cos x + \ln(1-\cos x) + C - ٢٣$$

$$\text{ضع } x = 2/z \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C - ٢٤$$

$$\int \frac{dx}{x^2(4+x^2)} = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{8} \arctan \frac{2}{x} + C - ٢٥$$

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{1/2} + C - ٢٦$$

$$\int \frac{dx}{3(1-x^2) - (5+4x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1+x}}{3\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + C - ٢٧$$



## الفصل الحادي والثلاثون

### تكامل الأحوال الزائدية

قواعد التكامل :

$$\int \sinh u \, du = \cosh u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\int \tanh u \, du = \ln \cosh u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \coth u \, du = \ln |\sinh u| + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \sinh^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad u^2 < a^2$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad u > a > 0$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C, \quad u^2 > a^2$$

### مسائل محلولة

$$\int \operatorname{sech}^2(2x-1) \, dx = \frac{1}{2} \tanh(2x-1) + C \quad - \quad \int \sinh \frac{1}{2}x \, dx = 2 \cosh \frac{1}{2}x + C \quad - \quad 1$$

$$\int \operatorname{csch} 3x \coth 3x \, dx = -\frac{1}{3} \operatorname{csch} 3x + C \quad - \quad \int \cosh 2x \, dx = \frac{1}{2} \sinh 2x + C \quad - \quad 2$$

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \int \frac{1}{\cosh x} \, dx = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} \, dx = \int \frac{\cosh x}{1 + \sinh^2 x} \, dx = \arctan(\sinh x) + C \quad - \quad 3$$

$$\int \sinh^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (\cosh 2x - 1) \, dx = \frac{1}{2} \sinh 2x - \frac{1}{2}x + C \quad - \quad 4$$

$$\int \tanh^2 2x \, dx = \int (1 - \operatorname{sech}^2 2x) \, dx = x - \frac{1}{2} \tanh 2x + C \quad - \quad 5$$

$$\int \cosh^3 \frac{1}{2}x \, dx = \int (1 + \sinh^2 \frac{1}{2}x) \cosh \frac{1}{2}x \, dx = 2 \sinh \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \sinh^3 \frac{1}{2}x + C \quad - \quad 6$$

$$\int \operatorname{sech}^3 x \, dx = \int (1 - \tanh^2 x) \operatorname{sech}^3 x \, dx = \tanh x - \frac{1}{2} \tanh^3 x + C \quad - \quad 7$$

$$\int e^x \cosh x \, dx = \int e^x \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int (e^{2x} + 1) \, dx = \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{2} x + C \quad - \quad 8$$

$$\int x \sinh x \, dx = \int x \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int x e^x \, dx - \frac{1}{2} \int x e^{-x} \, dx \quad - \quad 9$$

$$= \frac{1}{2} (x e^x - e^x) - \frac{1}{2} (-x e^{-x} - e^{-x}) + C = x \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) - \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$$

$$= x \cosh x - \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{9x^2 - 25} = -\frac{1}{15} \coth^{-1} \frac{3x}{5} + C \quad ١٣ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}} = \frac{1}{2} \cosh^{-1} \frac{2x}{3} + C \quad ١٤$$

١٤ — أوجد  $\int \sqrt{x^2 + 4} dx$ . لنضع  $x = 2 \sinh z$ . إذن  $\sqrt{x^2 + 4} = 2 \cosh z$ ,  $dx = 2 \cosh z dz$ , ومنه :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 4} dx &= 4 \int \cosh^2 z dz = 2 \int (\cosh 2z + 1) dz = \sinh 2z + 2z + C \\ &= 2 \sinh z \cosh z + 2z + C = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 4} + 2 \sinh^{-1} \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

١٥ — أوجد  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ . لنضع  $x = \operatorname{sech} z$ . إذن  $1 - x^2 = \tanh^2 z$ ,  $dx = -\operatorname{sech} z \tanh z dz$ , ومنه :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{\operatorname{sech} z \tanh z}{\operatorname{sech} z \tanh z} dz = -\int dz = -z + C = -\operatorname{sech}^{-1} x + C$$

### مسائل إضافية

$$\int \cosh^2 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} (\sinh x + x) + C \quad ١٢ \quad \int \sinh 3x dx = \frac{1}{3} \cosh 3x + C \quad ١٦$$

$$\int \coth^2 3x dx = x - \frac{1}{3} \coth 3x + C \quad ١٣ \quad \int \cosh \frac{1}{4} x dx = 4 \sinh \frac{1}{4} x + C \quad ١٧$$

$$\int \sinh^3 x dx = \frac{1}{3} \cosh^3 x - \cosh x + C \quad ١٤ \quad \int \coth \frac{3}{2} x dx = \frac{2}{3} \ln |\sinh \frac{1}{2} x| + C \quad ١٨$$

$$\int e^x \sinh x dx = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} x + C \quad ١٥ \quad \int \operatorname{csch}^2 (1+3x) dx = -\frac{1}{3} \coth (1+3x) + C \quad ١٩$$

$$\int e^{2x} \cosh x dx = \frac{1}{6} e^{3x} + \frac{1}{2} e^x + C \quad ١٦ \quad \int \operatorname{sech} 2x \tanh 2x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sech} 2x + C \quad ٢٠$$

$$\int x \cosh x dx = x \sinh x - \cosh x + C \quad ١٧ \quad \int \operatorname{csch} x dx = \ln \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} + C \quad ٢١$$

$$\int x^2 \sinh x dx = (x^2 + 2) \cosh x - 2x \sinh x + C \quad ٢٨$$

$$\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx = \frac{1}{8} \cosh^3 x - \frac{1}{8} \cosh^3 x + C \quad ٢٩$$

$$\int \sinh x \ln \cosh^2 x dx = \cosh x (\ln \cosh^2 x - 2) + C \quad ٢٠$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 17}} = \sinh^{-1} \frac{x-1}{4} + C \quad ٢١ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}} = \sinh^{-1} \frac{x}{3} + C \quad ٢١$$

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 12x + 5} = -\frac{1}{4} \coth^{-1} \left( x + \frac{3}{2} \right) + C \quad ٢٢ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} = \cosh^{-1} \frac{x}{5} + C \quad ٢٢$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^{3/2}} dx = \sinh^{-1} \frac{1}{2} x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + C \quad ٢٨ \quad \int \frac{dx}{4 - 9x^2} = \frac{1}{6} \tanh^{-1} \frac{3}{2} x + C \quad ٢٢$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} dx = \sinh^{-1} x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C \quad ٢٩ \quad \int \frac{dx}{16x^2 - 9} = -\frac{1}{12} \coth^{-1} \frac{4}{3} x + C \quad ٢٤$$

$$\int \sqrt{x^2 - 9} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 9} - \frac{9}{2} \cosh^{-1} \frac{x}{3} + C \quad ٢٥$$

## الفصل الثاني والثلاثون

### تطبيقات على التكامل غير المحدد

إذا كانت المعادلة  $y = f(x)$  لمنحنى مفروض فإن ميله  $m$  عند أية نقطة منه  $P(x, y)$  يعطى بـ  $m = f'(x)$  وبالعكس إذا كان ميل المنحنى عند نقطة منه  $P(x, y)$  يعطى بـ  $m = dy/dx = f'(x)$  يمكننا نحصل بالتكامل على مجموعة منحنيات  $y = f(x) + C$  . ولكي نحصل على منحنى خاص من هذه المجموعة ينبغي أن نعين أو أن نعطى قيمة معينة لـ  $C$  ويمكن أن يتم هذا الأمر بأن نشترط في المنحنى أن يمر بنقطة مفروضة .

انظر المسائل ١ - ٤

**ان المسألة :**  $s = f(t)$  ، حيث  $s$  بعد جسم ما عند اللحظة  $t$  عن نقطة ثابتة من مساره ( المستقيم ) ، نعين حركة الجسم تماما وتعطى سرعة الجسم وتسارعه عند اللحظة  $t$  بـ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t) , v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

وبالعكس إذا كانت السرعة ( التسارع ) معروفة عند الزمن  $t$  وإذا كان الموضع ( السرعة ) معروفا عند لحظة مفروضة ، عادة هي اللحظة  $t = 0$  فن الممكن عندئذ الحصول على معادلة الحركة .

انظر المسائل ٧ - ١٠

### مسائل محلولة

١ - أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي ميلها عند أية نقطة يساوى ضعف الإحداثى السينى للنقطة بإشارة مخالفة . أوجد ذلك المنحنى من المجموعة الذى يمر بالنقطة (1,1) .

بما أنه من المفروض أن  $dy/dx = -2x$  فإن  $dy = -2x dx$  ومنه  $\int dy = \int -2x dx$  وبالتالى  $y = -x^2 + C$  . وهذه معادلة مجموعة من القطاعات المكافئة .

وإذا وضعنا  $x=1, y=1$  في معادلة المجموعة نجد أن :  $1 = -1 + C$  ومنه  $C = 2$  .

ومعادلة منحنى المجموعة الذى يمر بالنقطة (1,1) هي  $y = -x^2 + 2$  .

٢ - أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي ميلها عند أية نقطة  $P(x, y)$  منها هو  $m = 3x^2y$  ومعادلة منحنى المجموعة الذى يمر بالنقطة (0,8)

$m = \frac{dy}{dx} = 3x^2y$  أو  $\frac{dy}{y} = 3x^2 dx$  وبالتالى  $y = x^3 + C = x^3 + \ln e$  ومنه  $y = ce^{x^3}$  . وعندما يكون  $x=0$  و  $y=8$  نجد  $8 = C = ce^0 = C$  . ومعادلة المنحنى المطلوب هي :  $y = 8e^{x^3}$  .

٣ - نفرض أن  $y'' = 1 - x^2$  عند كل نقطة من منحنى مفروض . أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (1,1) والذى يمر هناك المستقيم :  $x + 12y = 13$  .

إن  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = x^3 - 1$  إذن  $\int \frac{d}{dx}(y') dx = \int (x^3 - 1) dx$  ومنه  $y' = \frac{x^4}{4} - x + C_1$  .  
 وحيث أن الميل  $y'$  المنحني عند  $(1,1)$  يساوي  $-1/12$  وهو ميل المستقيم ، فإن  $C_1 = \frac{7}{12}$  ،  
 ومنه  $C_1 = \frac{7}{12}$  وبالتالي :  
 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^4 - x + \frac{7}{12}$  ،  $\int dy = \int (\frac{1}{4}x^4 - x + \frac{7}{12}) dx$  ،  $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + C_2$   
 ويكون عند النقطة  $(1,1)$  ،  $1 = \frac{1}{20} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + C_2$  ، ومنه  $C_2 = 5/6$  والمعادلة المطلوبة هي :  
 $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + \frac{5}{6}$ .

٤ - إن مجموعة المسارات المتعامدة لمجموعة معينة من المنحنيات هي مجموعة أخرى من المنحنيات يقطع كل منها كل منحني من منحنيات المجموعة المفروضة بزوايا قائمة . أوجد معادلات المسارات المتعامدة لمجموعة القطاعات الزائدة  $x^2 - y^2 = c$  .  
 إن ميل المثلث الزائد عند أية نقطة  $P(x,y)$  من يعطى بـ  $m_1 = x/y$  وميل المسار المتعامد المار بـ  $P$  هو  $m_2 = dy/dx = -y/x$  . إذن :

ومن  $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$  ، وبالتالى  $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C'$  ، وبالتالى  $|xy| = C'$  ،  
 والمعادلة المطلوبة هي  $xy = \pm C'$  أو ، اختصارا ،  $xy = C$  .

٥ - لنفرض أن كمية معينة  $q$  تزايد بمعدل متناسب مع الكمية نفسها . فإذا كانت  $q = 25$  عندما  $t = 0$  و  $q = 75$  عندما  $t = 2$  فما هي  $q$  عندما  $t = 6$  .

بما أن  $dq/dt = kq$  فإن  $dq/q = k dt$  ومنه  $\ln q = kt + \ln c$  أو  $q = ce^{kt}$  .

وعندما  $t = 0$  يكون  $q = 25 = ce^0 = c$  ، وبالتالى  $q = 25e^{kt}$  .

وعندما  $t = 2$  يكون  $q = 25e^{2k} = 75$  ، ومنه  $e^{2k} = 3 = e^{1.10}$  ، و  $k = .55$  .

وعندما  $t = 6$  يكون  $q = 25e^{6k} = 25e^{3.3} = 25(e^{1.1})^3 = 25(27) = 675$  .

٦ - تتحول مادة إلى أخرى بمعدل يتناسب مع الكمية غير المحولة . فإذا كانت الكمية الأصلية 50 وأصبحت 2: عندما  $t = 3$  فتي يبق 1/10 من المادة غير محول .  
 لنفرض أن  $q$  تمثل الكمية المحولة في اللحظة  $t$  . عندئذ :

$\frac{dq}{dt} = k(50 - q)$  ،  $\frac{dq}{50 - q} = k dt$  ، و  $\ln(50 - q) = -kt + \ln c$  ، and  $50 - q = ce^{-kt}$  .

وعندما  $t = 0$  ، يكون  $q = 0$  ومنه  $c = 50$  ، وبالتالى  $50 - q = 50e^{-kt}$  .

وعندما  $t = 3$  يكون  $50 - q = 25 = 50e^{-3k}$  ، وبالتالى  $e^{-3k} = .5 = e^{-1.10}$  ، ومنه  $k = .23$  ، و  $50 - q = 50e^{-.23t}$  .

وعندما تكون الكمية غير المحولة تساوى 5 يكون  $50 - q = 5$  ، ومنه  $e^{-.23t} = .1 = e^{-1.10}$  ، وبالتالى  $t = 10$  .

٧ - تتدحرج كرة على مستوى بسرعة ابتدائية  $8 \text{ ms}^{-1}$  . فإذا كانت السرعة تتناقص بسبب الاحتكاك ، بمعدل  $2 \text{ ms}^{-1}$  ، فما هي المسافة التي تقطعها الكرة ؟

إن  $\frac{dv}{dt} = -2$  ، ومنه  $v = -2t + C_1$  . وبما أن  $v = 8$  عندما  $t = 0$  إذن  $C_1 = 8$  ، ومنه  $v = -2t + 8$  .

ومن  $v = ds/dt = -2t + 8$  نجد  $s = -t^2 + 8t + C_2$  . وبما أن  $s = 0$  عندما  $t = 0$  إذن  $C_2 = 0$  .

ومنها  $s = -t^2 + 8t$  .

وعندما  $t = 4$  يكون  $v = 0$  أى أن الكرة تتدحرج على المرج مدة أربع ثوان قبل أن تقف .

وعندما  $t = 4$  يكون  $s = -16 + 32 = 16 \text{ m}$  .

٨ - رمي حجر من منطاد - كن يملو عن الأرض 3000 m لأسفل مباشرة بسرعة  $15 \text{ ms}^{-1}$  . أوجد موضع الحجر وسرعته بعد 20 seconds .

لنفرض أن الاتجاه الموجب لأعلى . وعندما يترك الحجر المنطاد يكون :

$$v = -9.8t + C_1 \quad \text{ومنه} \quad a = dv/dt = -9.8 \text{ ms}^{-2}$$

$$\text{وعندما } t = 0 \text{ يكون } v = -15 \text{ وبالتالي } C_1 = -15 \text{ إذن } v = dv/dt = -9.8t - 15 \text{ ومنه}$$

$$s = -4.9t^2 - 15t + C_2$$

$$\text{وعندما } t = 0 \text{ يكون } s = 3000 \text{ ومنه } C_2 = 3000 \text{ وبالتالي } s = -4.9t^2 - 15t + 3000$$

$$\text{وعندما } t = 20 \text{ يكون } s = -4.9(20)^2 - 15(20) + 3000 = 750 \text{ و } v = -9.8(20) - 15 = -211$$

إذن بعد 20 sec يكون الحجر على ارتفاع 750 m عن سطح الأرض وتكون سرعته  $211 \text{ ms}^{-1}$  .

٩ - تركت كرة تسقط من منطاد يملو 196 m عن الأرض . فإذا كان المنطاد يرتفع لأعلى بمعدل  $14.7 \text{ ms}^{-1}$  فأوجد :

(أ) أقصى ارتفاع عن الأرض تبلته الكرة .

(ب) الوقت الذي تقضيه الكرة في الجو .

(ج) سرعة الكرة عندما تصطدم بالأرض .

لنفرض أن الاتجاه الموجب لأعلى . عندئذ :

$$v = -9.8t + C_1 \quad \text{ومنه} \quad a = dv/dt = -9.8 \text{ ms}^{-2}$$

$$\text{وعندما } t = 0 \text{ يكون } v = 14.7 \text{ ومنه } C_1 = 14.7 \text{ إذن } v = dv/dt = -9.8t + 14.7 \text{ وبالتالي}$$

$$s = -4.9t^2 + 14.7t + C_2$$

$$\text{وعندما } t = 0 \text{ يكون } s = 196 \text{ ومنه } C_2 = 196 \text{ وبالتالي } s = -4.9t^2 + 14.7t + 196$$

$$(أ) \text{ وعندما } t = 3/2 \text{ يكون } v = 0 \text{ ومنه } s = -4.9(3/2)^2 + 14.7(3/2) + 196 = 207$$

الأرض تبلته الكرة هو 207 m .

$$(ب) \text{ وعندما } s = 0 \text{ يكون } -4.9t^2 + 14.7t + 196 = 0 \text{ ومنه } t = -5.8 \text{ والكرة تبقى في الجو } 8 \text{ sec} .$$

$$(ج) \text{ وعندما } t = 8 \text{ يكون } v = -9.8(8) + 14.7 = -63.7$$

الكرة تصطدم بالأرض بسرعة  $63.7 \text{ ms}^{-1}$  .

١٠ - ينسكب ماء بسرعة  $0.6\sqrt{2gh} \text{ ms}^{-1}$  من فتحة صغيرة تقع على عمق  $h \text{ m}$  تحت سطح السائل ، حيث  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  . احسب الزمن اللازم لتفريغ خزان اسطوانى قائم إذا كان ارتفاعه 1.225 m ونصف قطره 0.3 m من خلال فتحة في قاعة نصف قطرها 2.5 cm .

ليكن  $h$  هو عمق الماء عند اللحظة  $t$  . والماء الذى ينسكب فى زمن  $dt$  يكافئ اسطوانة ارتفاعها  $v dt \text{ m}$  ونصف قطرها  $1/80 \text{ m}$  وحجمها  $\pi(1/80)^2 \sqrt{2gh} dt \text{ m}^3$

لنفرض  $-dh \text{ m}$  هو مقدار الهبوط المرافق لمستوى سطح الماء . إذن الحجم المرافق الذى يفقده الخزان هو  $-\pi(0.3)^2 dh \text{ m}^3$  .

$$\text{عندئذ } 0.6\pi(1/80)^2 \sqrt{19.6h} dt = -\pi(0.3)^2 dh \text{ أو } 0.6 \sqrt{19.6h} dt = -960 dh / \sqrt{19.6h} \text{ و } t = -1920 \sqrt{h} / \sqrt{19.6} + C$$

$$\text{وعندما } t = 0 \text{ يكون } h = 1.225 \text{ ومنه } C = 1920 \sqrt{1.225} / \sqrt{19.6} = 480$$

$$\text{ويصبح الخزان فارغاً عندما } h = 0 \text{ ومنه } t = 480 \text{ sec} = 8 \text{ mins}$$



### مسائل إضافية

١١- أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي ميلها مطى فيما يلي ، ثم أوجد معادلة منحنى المجموعة الذي يمر بالنقطة المفروضة :

( أ )  $m = 4x$ ; (1, 5) (ب)  $m = \sqrt{x}$ ; (9, 18) (د)  $m = 1/x^2$ ; (1, 2) (هـ)  $m = x/y$ ; (4, 2) (ز)  $m = 2y/x$ ; (2, 8)  
(ب)  $m = \sqrt{x}$ ; (9, 18) (د)  $m = 1/x^2$ ; (1, 2) (هـ)  $m = x/y$ ; (4, 2) (ز)  $m = 2y/x$ ; (2, 8)  
(ح)  $m = x^2/y^2$ ; (3, 2) (ط)  $m = xy/(1+x^2)$ ; (3, 5)

الجواب :

( أ )  $y = 2x^2 + C$ ;  $y = 2x^2 + 3$  ( أ )  $x^2 - y^2 = C$ ;  $x^2 - y^2 = 12$  (ب)  $3y = 2x^{3/2} + C$ ;  $3y = 2x^{3/2}$  (د)  $xy = Cx - 1$ ;  $xy = 3x - 1$  (هـ)  $y = Cx^2$ ;  $y = 2x^2$  (ز)  $4y = (x-1)^4 + C$ ;  $4y = (x-1)^4 - 16$  (ح)  $y^2 = C(1+x^2)$ ;  $2y^2 = 5(1+x^2)$  (ط)  $3y^4 = 4x^3 + C$ ;  $3y^4 = 4x^3 - 60$

١٢- ( أ ) إذا كان  $y'' = 2$  لمنحنى مفروض فأوجد معادله إذا كان هذا المنحنى ماراً بالنقط  $P(2, 6)$  وميله عندها مساوى 10 .

ج :  $y = x^2 + 6x - 10$

(ب) إذا كان  $y'' = 6x - 8$  لمنحنى مفروض ، فأوجد معادله إذا فرضنا أنه يمر بالنقطة  $P(1, 0)$  وأن ميله عندها يساوى 4 .

(ج)  $y = x^3 - 4x^2 + 9x - 6$

١٣- يتحرك جسم على خط مستقيم بدأ من نقطة الأصل 0 عند اللحظة  $t = 0$  بسرعة مفروضة  $v$  . أوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال الفترة من  $t = t_1$  إلى  $t = t_2$  :

( أ )  $v = 4t + 1$ ; 0, 4 (ب)  $v = 3t^2 + 2t$ ; 2, 4 (ج)  $v = 2t - 2$ ; 0, 5

(ب)  $v = 6t + 3$ ; 1, 3 (د)  $v = \sqrt{t} + 5$ ; 4, 9 (و)  $v = t^2 - 3t + 2$ ; 0, 4

ج : ( أ ) 36 ، (ب) 30 ، (ج) 68 ، (د)  $37\frac{2}{3}$  ، (هـ) 17 ، (و)  $17/3$

١٤- أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي يكون لها تحت العامود عند أية نقطة مساوياً ضمن الاحداثى السينى للنقطة .

ج :  $y^2 = Cx$

١٥- أوجد معادلة مجموعة المماسات المتعامدة لمجموعة القطاعات المكافئة  $y^2 = 2x + C$ .

ج :  $y = Ce^{-x}$

١٦- يتحرك جسم على خط مستقيم بدأ من نقطة الأصل ( عند اللحظة  $t = 0$  ) بسرعة ابتدائية مفروضة  $v$  وتساوع  $a$  : أوجد  $s$  عند اللحظة  $t$  إذا كان :

( أ )  $a = 32$ ,  $v_0 = 2$  (ب)  $a = -32$ ;  $v_0 = 96$  (ج)  $a = 12t^2 + 6t$ ;  $v_0 = -3$  (د)  $a = 1/\sqrt{t}$ ;  $v_0 = 4$

ج : ( أ )  $s = 16t^2 + 2t$  (ب)  $s = -16t^2 + 96t$  (ج)  $s = t^4 + t^3 - 3t$  (د)  $s = \frac{4}{3}(t^{3/2} + 3t)$

١٧- تتباطأ سيارة بمعدل  $0.025 \text{ ms}^{-1}$  . فسا هي المسافة التي تقطعها السيارة قبل أن تتف إذا كانت سرعتها الابتدائية  $25 \text{ kmh}^{-1}$  .

ج : 96.5 m

- ١٨- قذف جسم رأسياً لأعلى من موضع يعلو  $34.3 \text{ m}$  عن الأرض بسرعة ابتدائية  $29.4 \text{ ms}^{-1}$ .  
 (أ) كم تكون سرعته عندما يكون عل ارتفاع  $73.5 \text{ m}$  عن الأرض ؟  
 (ب) متى يبلغ أعلى نقطة على مساره ؟  
 (ج) بأية سرعة يصطدم الجسم بالأرض ؟  
 ج : (أ)  $9.8 \text{ ms}^{-1}$  ، (ب) بعد ثلاث ثوان ، (ج)  $39.2 \text{ ms}^{-1}$ .
- ١٩- ينزلق قالب من الثلج لأسفل على مستوى بتسارع  $1 \text{ ms}^{-2}$ . فإذا فرضنا أن طول المستوى  $20 \text{ m}$ .  
 وإذا فرضنا أن قالب الثلج يصل نهاية المستوى بعد  $5 \text{ sec}$ . فما هي السرعة الابتدائية للثلج وماهي سرعته عندما يكون عل بعد  $6 \text{ m}$  من نهاية المستوى .  
 ج :  $1.5 \text{ ms}^{-1}$  ،  $5.5 \text{ ms}^{-1}$ .
- ٢٠- ماهو التسارع الثابت المطلوب : (أ) كي يتحرك جسم  $25 \text{ m}$  في  $5 \text{ sec}$ .  
 (ب) كي يتباطأ جسم بدءاً من السرعة  $15 \text{ ms}^{-1}$  إلى حالة السكون بعد أن يقطع  $5 \text{ m}$  ؟  
 ج : (أ)  $2 \text{ ms}^{-2}$  ، (ب)  $-22.5 \text{ ms}^{-2}$ .
- ٢١- تتكاثر البكتريا في مزرعة طبقاً لقانون  $dN/dt = 0.25 N$  فإذا كان  $N = 200$  في البدء فما هي قيمة  $N$  عندما  $t = 8$ .  
 ج : 1478.

## الفصل الثالث والثلثون

### التكامل المحدد

**التكامل المحدد :** إذا كانت  $a \leq x \leq b$  هي الفترة التي فيها الدالة المفروضة  $f(x)$  متصلة . نقسم هذه الفترة إلى  $n$  فترات جزئية  $h_1, h_2, \dots, h_n$  وذلك بإدخال  $n-1$  نقطة  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$  حيث  $a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-1} < b$  . ولترمز لـ  $a$  بـ  $\xi_0$  ولـ  $b$  بـ  $\xi_n$  ولترمز لطول الفترة الجزئية  $h_1$  بـ  $\Delta_1 x = \xi_1 - \xi_0$  ، ولـ  $h_2$  بـ  $\Delta_2 x = \xi_2 - \xi_1$  ، . . . . . ولـ  $h_n$  بـ  $\Delta_n x = \xi_n - \xi_{n-1}$  . ( هذه الأطوال مافات موجبة ، وكل واحدة منها موجبة بسبب المتباينة السابقة )



شكل ٣٣ - ١

لنختار على كل فترة جزئية نقطة —  $x_1$  على الفترة الجزئية  $h_1$  و  $x_2$  على  $h_2$  ، . . . . .  $x_n$  على  $h_n$  — ولنشكل المجموع

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x = f(x_1) \Delta_1 x + f(x_2) \Delta_2 x + \dots + f(x_n) \Delta_n x \quad (I)$$

إن كل حد هو حاصل ضرب طول فترة جزئية بقيمة الدالة عند النقطة التي اخترناها على تلك الفترة الجزئية . لرمز بـ  $\lambda_n$  لطول أطول فترة جزئية تظهر في ( I ) ولنجعل بمد ذلك عدد الفترات الجزئية يزداد إلى ما لا نهاية بحيث  $\lambda_n \rightarrow 0$  ( إحدى الطرق للوصول إلى هذا الهدف هو تنصيف كل فترة جزئية أصلية . ثم تنصيف كل فترة من هذه الفترات الناتجة ، وهكذا ) . عندئذ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x \quad (II)$$

نصل إلى نفس النتيجة مهما كانت طريقة تقسيم الفترة  $a \leq x \leq b$  إلى فترات جزئية شريطة أن يتحقق الشرط  $\lambda_n \rightarrow 0$  ومهما كانت الكيفية التي نختار بها  $x_k$  في الفترات الجزئية الناتجة .

إن برهان النظرية يخرج عن إطار هذا الكتاب . ولكننا سنرى في المسائل ١ - ٣ كيفية حساب قيم النهاية لبعض الدوال المختارة  $f(x)$  . وعلينا أن ندرك ، على كل حال ، أنه من الصعب حل هذه الطريقة في حساب قيمة النهاية لأية دالة اختيارية . بالإضافة إلى أنه من الضروري ، كي ننجح في حساب القيمة المذكورة هنا ، أن نتبع علاقة بين أطوال المجالات الجزئية ( نعتبر هذه المجالات متساوية في الأطوال ) ونقتب أسلوباً مميئاً في اختيار النقاط على الفترات الجزئية ( كأن نختارها مثلاً نقطة النهاية اليسرى أو نقطة النهاية اليمنى أو نقطة منتصف هذه الفترات الجزئية ) .

ولقد تم الاتفاق على أن يكتب :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x$$

حيث نقرأ الرمز  $\int_a^b f(x) dx$  ، التكامل المحدد لـ  $f(x)$  ، بالنسبة لـ  $x$  من  $x = a$  إلى  $x = b$  ونسب للدالة  $f(x)$  دالة التكامل . ونسب  $a$  و  $b$  على الترتيب الحد الأدنى والحد الأعلى للتكامل .

أنظر المسائل ١ - ٣

**خواص التكاملات المحددة :** إذا كانت  $f(x)$  و  $g(x)$  دالتين متصلتين على فترة التكامل  $a \leq x \leq b$  فإن :

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad - ١$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad - ٢$$

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx , \quad - ٣$$

مهما كان الثابت

لبرهان هذه الخواص أنظر المسألة ٤

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad - ٤$$

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx , \quad - ٥$$

عندما  $a < c < b$

٦ - نظرية القيمة المتوسطة الأولى :

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(x_0)$$

اقبىة واحدة على الأقل  $x = x_0$  بين  $a$  و  $b$  . لبرهان أنظر المسألة ٥

$$\frac{d}{du} F(u) = f(u) . \quad \text{فإن } F(u) = \int_a^u f(x) dx , \quad - ٧$$

لبرهان أنظر المسألة ٦

**النظرية الأساسية في الحساب التكاملي :** إذا كانت  $f(x)$  دالة متصلة في الفترة  $a \leq x \leq b$  وكانت  $F(x)$  تكاملاً غير محدد لـ  $f(x)$  . فنحن نكون :

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

لبرهان أنظر المسألة ٧

**مثال ١ :**

$$(١) \text{ لنأخذ } f(x) = c , \text{ حيث } c \text{ ثابت} , \text{ ولنأخذ } F(x) = cx , \text{ عندئذ } \int_a^b c dx = cx \Big|_a^b = c(b-a) .$$

$$(ب) \text{ لنأخذ } f(x) = x \text{ و } F(x) = \frac{1}{2}x^2 , \text{ عندئذ } \int_a^b x dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_a^b = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2} .$$

$$(ج) \text{ لنأخذ } f(x) = x^3 \text{ و } F(x) = \frac{1}{4}x^4 , \text{ عندئذ } \int_1^3 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20 .$$

فأذن هذه النتائج بتلك التي نتحصل عليها في المسائل ١ - ٣ . ويمكن القارئ أن يبرهن أنه يمكن استخدام أي تكامل غير محدد لـ  $f(x)$  وذلك بتحليل (ج) أي  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$

أنظر المسائل ٨ - ٢٠

**نظرية بليس :** إذا كانت  $f(x)$  و  $g(x)$  دالتين متصلتين في الفترة  $a \leq x \leq b$  ، وإذا جزأنا الفترة إلى فترات جزئية كما فعلنا سابقاً واخترنا نقطتين على كل فترة جزئية ( مثل  $x_k$  و  $x'_k$  في الفترة الجزئية  $k$  فيكون عندئذ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot g(x'_k) \Delta_k x = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

نلاحظ أولاً أن النظرية صحيحة إذا تطابقت النقط  $x_k$  مع  $x'_k$  وأن قيمة النظرية تكن في أن النتيجة تبقى كما هي سواء أكانت نقطتنا كل زوج مختلفتين أو منطبقتين ولعل شهورنا الحسنى بعصمة هذه النظرية ينتج من كتابة :

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot g(x'_k) \Delta_k x = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot g(x_k) \Delta_k x + \sum_{k=1}^n f(x_k) \{g(x'_k) - g(x_k)\} \Delta_k x$$

وبلاحظ أنه عندما  $n \rightarrow \infty$  ( أي  $\Delta_k x \rightarrow 0$  ) فإن  $x'_k$  و  $x_k$  تقتربان من التطابق ، وحيث أن  $g(x)$  متصلة فإن  $g(x'_k) - g(x_k) \rightarrow 0$  ،

### مسائل محلولة

احسب قيمة التكامل المحدد في كل من المسائل ١ - ٣ وذلك عن طريق تشكيل  $S_n$  ثم حساب النهاية عندما  $n \rightarrow +\infty$  .

$$1 - \int_a^b c dx = c(b-a), \text{ حيث } c \text{ ثابت .}$$

نقسم الفترة  $a \leq x \leq b$  إلى  $n$  من الفترات الجزئية المتساوية طول كل منها  $\Delta x = (b-a)/n$  . بما أن دالة التكامل  $f(x) = c$  فإن  $f(x_k) = c$  مهما كان اختيارنا للنقطة  $x_k$  على الفترة الجزئية  $k$  وأن :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x = \sum_{k=1}^n c(\Delta x) = (c + c + \dots + c)(\Delta x) = nc \cdot \Delta x = nc \frac{b-a}{n} = c(b-a)$$

$$\int_a^b c dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c(b-a) = c(b-a) \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$2 - \int_1^5 x dx = 25/2.$$



شكل ٣٣ - ٢

نقسم الفترة  $0 \leq x \leq 5$  إلى  $n$  من الفترات الجزئية المتساوية طول كل منها  $\Delta x = 5/n$  . ولنختر النقطة  $x_k$  بحيث تكون نقطة نهاية الطرف الأيمن لهذه الفترات الجزئية أي أن  $x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, \dots, x_n = n\Delta x$  فيكون عندئذ :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x = \sum_{k=1}^n (k \cdot \Delta x) \Delta x = (1 + 2 + \dots + n)(\Delta x)^2 = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\int_0^5 x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{25}{2} \quad \text{ومن ثم :}$$



$$\int_1^3 x^2 dx = 20. \quad - \text{٣}$$

نقسم الفترة  $1 \leq x \leq 3$  إلى  $n$  من الفترات الجزئية المتساوية طول كل منها  $\Delta x = 2/n$ .

I - لنختار النقط  $x_k$  بحيث تكون نقطة نهاية الطرف الأيسر لهذه الفترات الجزئية كما في الشكل ٣٣ - ٣ أي أن :

$$x_1 = 1, x_2 = 1 + \Delta x, \dots, x_n = 1 + (n-1)\Delta x.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = x_1^2 \Delta x + x_2^2 \Delta x + \dots + x_n^2 \Delta x \quad \text{فيكون عندئذ :}$$

$$= [1 + (1 + \Delta x)^2 + (1 + 2\Delta x)^2 + \dots + (1 + (n-1)\Delta x)^2] \Delta x$$

$$= [n + 3\{1 + 2 + \dots + (n-1)\} \Delta x + 3\{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\} (\Delta x)^2 + \{1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3\} (\Delta x)^3] \Delta x$$

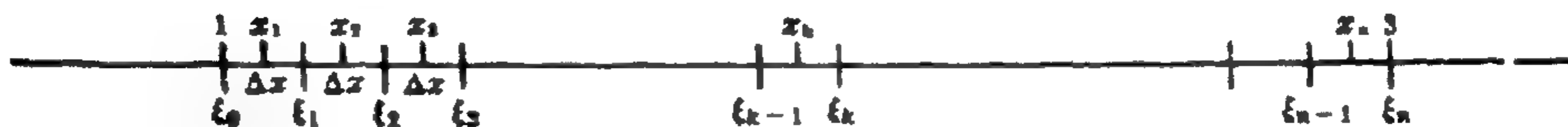
$$= \left[ n + 3 \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} \left(\frac{2}{n}\right) + 3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{(n-1)^2 n^3}{(1 \cdot 2)^3} \left(\frac{2}{n}\right)^3 \right] \frac{2}{n}$$

$$= 2 + \left(6 - \frac{6}{n}\right) + \left(8 - \frac{12}{n} + \frac{4}{n^2}\right) + \left(4 - \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2}\right) = 20 - \frac{26}{n} + \frac{8}{n^2}$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(20 - \frac{26}{n} + \frac{8}{n^2}\right) = 20 \quad \text{ومن ثم :}$$



شكل ٣٣ - ٣



شكل ٣٣ - ٤

II - أما إذا اخترنا النقط  $x_k$  في منتصفات الفترات الجزئية كما في الشكل ٣٣ - ٤ أي أن

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}\Delta x, x_2 = 1 + \frac{3}{2}\Delta x, \dots, x_n = 1 + \frac{2n-1}{2}\Delta x.$$

$$S_n = \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\Delta x\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{2}\Delta x\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{2n-1}{2}\Delta x\right)^2 \right] \Delta x$$

$$= \left[ \left\{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)\Delta x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 (\Delta x)^3\right\} + \left\{1 + 3\left(\frac{3}{2}\right)\Delta x + 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 (\Delta x)^3\right\} + \dots \right. \\ \left. + \left\{1 + 3\left(\frac{2n-1}{2}\right)\Delta x + 3\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\right)^3 (\Delta x)^3\right\} \right] \Delta x$$

$$= n\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{3}{2}n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{4}(4n^3 - n)\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{8}(2n^4 - n^2)\left(\frac{2}{n}\right)^4$$

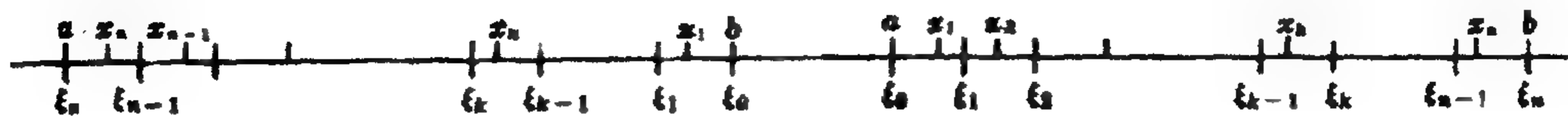
$$= 2 + 6 + \left(8 - \frac{2}{n^2}\right) + \left(4 - \frac{2}{n^2}\right) = 20 - \frac{4}{n^2}$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(20 - \frac{4}{n^2}\right) = 20 \quad \text{ومن ثم :}$$

٤ - برهن :

$$(١) \int_a^b f(x) dx = 0. \text{ إن طول فترة التكامل هنا تساوى الصفر وبالتالى فإن } \Delta x = 0 \text{ و } S_n = 0 \text{ و}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0.$$



شكل ٢٢ - ٦

شكل ٢٢ - ٥

$$(ب) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \text{ لنقسم الفترة } a \leq x \leq b \text{ ولنختار النقط } x_k \text{ كما فى الشكل ٢٢ - ٥}$$

$$\int_a^b f(x) dx \text{ لـ } \int_b^a f(x) dx. \text{ أبـ } \int_a^b f(x) dx \text{ فإننا ندع الفترة (شكل ٢٢ - ٦) تماماً كما كان قبلاً باستثناء}$$

النقط  $x_k$  و  $x_{k+1}$  فإننا نرقها من اليمين إلى اليسار بدلاً من اليسار إلى اليمين . والآن فإن المجموع  $S_n$  إذا حسب من الشكل ٢٢ - ٥ لا يختلف عنه فيما لو حسب من الشكل ٢٢ - ٦ ، باستثناء إشارات  $\Delta x_k$  حيث تكون موجبة فى التكامل الأول وسالبة فى الآخر .

$$\text{وبالتالى فإن : } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$(ج) \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx. \text{ لأية تجزئة للفترة ولأى اختيار للنقط على الفترات الجزئية نجد أن :}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n c f(x_k) \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

$$\text{ومنـه : } \int_a^b c f(x) dx = c \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = c \int_a^b f(x) dx$$

٥ - برهن نظرية القيمة المتوسطة الأولى لحساب التكامل . إذا كانت  $f(x)$  دالة متصلة فى الفترة  $a \leq x \leq b$  فإن

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(x_0) \text{ لقيمة واحدة على الأقل } x = x_0 \text{ واقعة بين } a \text{ و } b.$$

إن النظرية صحيحة فى حالة المثال (١) عندما كانت  $f(x) = c$  حيث  $c$  ثابت . وبخلاف ذلك نفرض أن  $m$  هى القيمة المطلقة الصغرى للدالة  $f(x)$  فى الفترة  $a \leq x \leq b$  وأن  $M$  القيمة المطلقة العظمى ، فيكون لدينا لأية تجزئة مناسبة للفترة ولأى اختيار ما للنقط  $x_k$  على الفترات الجزئية .

$$\sum_{k=1}^n m \Delta x_k < \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k < \sum_{k=1}^n M \Delta x_k$$

فإذا جعلنا  $n \rightarrow +\infty$  نجد أن :

$$\int_a^b m dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b M dx$$

والذى تصبح ، استناداً إلى المسألة ١ ، على الشكل :

$$m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a)$$

$$\text{وبالتالي : } m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < M$$

ومن نجد أن :  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = N$ ، حيث  $N$  عدد بين  $m$  و  $M$  . وبما أن  $f(x)$  متصلة في الفترة  $a \leq x \leq b$  فإنه يبنى استناداً إلى النظرية ١ من الفصل الثالث أن توجد قيمة واحدة على الأقل لهذه الدالة بين  $m$  و  $M$  ، أى يبنى أن توجد قيمة لـ  $x$  مثل  $x = x_0$  ، بحيث يكون  $f(x_0) = N$  . وهكذا يكون :

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(x_0) \quad \text{ومن ثم} \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = N = f(x_0)$$

$$٦ - \text{برهن أنه إذا كان } F(u) = \int_a^u f(x) dx \text{ فإن } \frac{d}{du} F(u) = f(u).$$

نستخدم طريقة المراحل لإيجاد المشتقة :

$$F(u + \Delta u) - F(u) = \int_a^{u+\Delta u} f(x) dx - \int_a^u f(x) dx$$

وهذا يأخذ ، باستخدام الخواص ٢ ، ٥ ، ٦ ، الشكل

$$\begin{aligned} F(u + \Delta u) - F(u) &= \int_a^u f(x) dx + \int_u^{u+\Delta u} f(x) dx = \int_u^{u+\Delta u} f(x) dx \\ &= f(u_0) \cdot \Delta u, \end{aligned} \quad \text{حيث } u < u_0 < u + \Delta u \text{ ومن ثم :}$$

$$\frac{dF}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} f(u_0) = f(u) \quad \text{وبالتالي} \quad \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} = f(u_0)$$

حيث أن  $\Delta u \rightarrow 0$  و  $u_0 \rightarrow u$  .

إن هذه الخاصية غالباً ما توضع على الشكل :

$$(١) \quad \text{إذا كان } F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ فإن } F'(x) = f(x).$$

وما استعمال الحرف  $u$  هنا إلا مجرد محاولة لتجنب كل احتمال للالتباس بين الأدوار التي تلعبها  $x$  المختلفة . ويلاحظ جيداً أن  $F(x)$  في (١) هي دالة حتماً الأعلى لتكامل هو  $x$  وأنه ليس حرفاً خاصاً كالحرف  $x$  في  $f(x)$  . ويمكن ، بعبارة أخرى ، كتابة الخاصية المذكورة بالشكل :

$$\text{إذا كان } F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ فإن } F'(x) = f(x).$$

وننتج من (١) أن  $F(x)$  هو بكل بساطة تكامل غير محدد لـ  $f(x)$  .

٧ - برهن أنه إذا كانت  $f(x)$  دالة متصلة في الفترة  $a \leq x \leq b$  وإذا كان  $F(x)$  هو تكامل غير محدد لـ  $f(x)$  فإن :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

باستخدام الصيغة الأخيرة في المسألة ٦ يمكن كتابة :

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) + C$$

وعندما يكون الحد الأعلى لتكامل هو  $x = a$  يكون :

$$C = -F(a) \quad \text{ومن ثم} \quad \int_a^a f(x) dx = 0 = F(a) + C$$

وبالتالي فإن  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  وعندما يكون الحد الأعلى لتكامل هو  $x = b$  نجد المطلوب

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

نستخدم النظرية الأساسية لحساب التكامل لتعصب قيمة كل من التكاملات :

$$\int_{-1}^1 (2x^2 - x^3) dx = \left[ \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left( -\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{3} \quad -٨$$

$$\int_{-2}^{-1} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \left[ -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right]_{-2}^{-1} = \left( 1 + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{18} \right) = \frac{10}{9} \quad -٩$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_1^4 = 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2 \quad -١٠$$

$$\int_{-2}^3 e^{-x/2} dx = -2e^{-x/2} \Big|_{-2}^3 = -2(e^{-3/2} - e) = 4.9904 \quad -١١$$

$$\int_{-4}^{-10} \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_{-4}^{-10} = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2 \quad -١٢$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = -\left( -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad -١٣$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} x \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} \pi - \left( -\frac{1}{4} \pi \right) \right] = \frac{1}{4} \pi \quad -١٤$$

$$\int_{-5}^{-3} \sqrt{x^2-4} dx = \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-4} - 2 \ln|x+\sqrt{x^2-4}| \right]_{-5}^{-3} = \frac{5}{2} \sqrt{21} - \frac{3}{2} \sqrt{5} - 2 \ln \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{21}} \quad -١٥$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{6} \left( \ln \frac{1}{5} - \ln 2 \right) = \frac{1}{6} \ln 0.1 \quad -١٦$$

$$\int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = (e \ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1 \quad -١٧$$

$$-١٨ \quad \text{لوجد} \quad \int_0^{\pi/2} xy dx \quad \text{عندما} \quad x = 6 \cos \theta, \quad y = 2 \sin \theta.$$

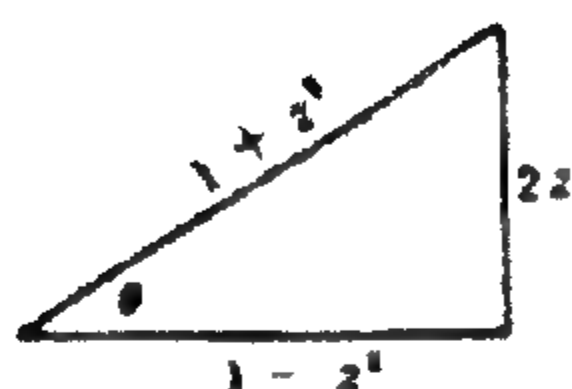
نمبر أولاً عن  $x$  و  $y$  و  $dx$  بدلالة  $\theta$  و  $d\theta$ ، ونستبدل بحدود التكامل قيم الوسيط المرافقة ثم نحسب قيمة التكامل الناتج.

إن  $dx = -6 \sin \theta d\theta$ ، وعندما  $x = 6 \cos \theta = 6$  يكون  $\theta = 0$ ، وعندما  $x = 6 \cos \theta = 3$  يكون  $\theta = \pi/3$  وبالتالي

$$\begin{aligned}\int_1^0 xy \, dx &= \int_{\pi/3}^0 (6 \cos \theta)(2 \sin \theta)(-6 \sin \theta) \, d\theta \\ &= -72 \int_{\pi/3}^0 \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta = -24 \sin^3 \theta \Big|_{\pi/3}^0 = -24(0 - (\sqrt{3}/2)^3) = 9\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\int \frac{d\theta}{5 + 4 \cos \theta} = \int \frac{\frac{2 \, dz}{1+z^2}}{5 + 4 \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2 \, dz}{9+z^2} \quad \text{إن} \quad \int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{5 + 4 \cos \theta} \quad \text{أوجد} \quad -١٩$$

لنعي حدى  $z$  للتكامل ( $\theta = 2 \arctan z$ ) عندما  $\theta = 0$  فإن  $z = 0$  وعندما  $\theta = 2\pi/3$  فإن  $\arctan z = \pi/3$  ومنه  $z = \sqrt{3}$ .



شكل ٢٢ - ٧

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{5 + 4 \cos \theta} = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dz}{9+z^2} = \left[ \frac{2}{3} \arctan \frac{z}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{9} \quad \text{وبالتالى فإن} \quad :$$

$$\int \frac{dx}{1 - \sin x} = \int \frac{\frac{2 \, dz}{1+z^2}}{1 - \frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2 \, dz}{(1-z)^2} \quad \text{إن} \quad \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1 - \sin x} \quad \text{أوجد} \quad -٢٠$$

وعندما  $x = 0$  فإن  $\arctan z = 0$  ومنه  $z = 0$  وعندما  $x = \pi/6$  فإن  $\arctan z = \pi/6$  ومنه  $z = \sqrt{3}/3$  وبالتالى فإن :

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1 - \sin x} = 2 \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dz}{(1-z)^2} = \left[ \frac{2}{1-z} \right]_0^{\sqrt{3}/3} = \frac{2}{1-\sqrt{3}/3} - 2 = \sqrt{3} + 1$$

### مسائل إضافية

-٢١ احسب قيمة تكامل المسألة ١ :  $\int_a^b c \, dx$  وذلك بتقسيم الفترة  $a \leq x \leq b$  إلى  $n$  من الفترات الجزئية أطوالها  $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \dots, \Delta_n x$ . ولاحظ أن  $\sum_{i=1}^n \Delta_i x = b - a$ .

-٢٢ احسب قيمة تكامل المسألة ٢ :  $\int_a^b x \, dx$  مستخدماً فترات جزئية أطوالها متساوية (أ) مختاراً النقط  $x_k$  بحيث تمثل نقط نهايات الأطراف اليسرى للفترات الجزئية.

(ب) مختاراً النقط  $x_k$  بحيث تمثل منتصفات الفترات الجزئية (ج) مختاراً النقط  $x_k$  على نهاية الثلث الأول لكل هذه الفترات أى أن  $x_1 = \frac{1}{3}\Delta x, x_2 = \frac{2}{3}\Delta x, \dots$

-٢٣ احسب  $\int_1^4 x^2 \, dx = 21$  مستخدماً فترات جزئية أطوالها متساوية ومختاراً النقط  $x_k$  بحيث تمثل (أ) نقط نهايات الأطراف اليمنى للفترات الجزئية (ب) نقط نهايات الأطراف اليسرى للفترات الجزئية (ج) نقط منتصفات الفترات الجزئية.

-٢٤ استخدم نفس الاختيار للفترات الجزئية والنقط كما فى المسألة ٢٣ (أ) لتسبب  $\int_1^4 x \, dx$  و  $\int_1^4 (x^2 + x) \, dx$ .

$$\text{وأثبت أن} \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$



٢٥- احسب قيمة  $\int_1^2 x^2 dx$  وقيمة  $\int_1^2 x^3 dx$  ، ثم قارن المجموع بنتيجة المسألة ٢٣ تثبت أن

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{عندما } a < c < b$$

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1. \quad \text{احسب} \quad ٢٦-$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} \quad \text{والنهاية} \quad S_n = \sum_{k=1}^n e^{k \cdot \Delta x} \Delta x = e^{\Delta x} (e - 1) \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}$$

إرشاد : هي صيغة غير محددة من النمط  $\frac{0}{0}$  .

٢٧- برهن خاصى التكامل المحدود : ١ و ٥ :

٢٨- استخدم النظرية الأساسية لتعريب :

$$\begin{aligned} \int_0^3 x^2(x^2+1) dx &= 40/3 \quad (\text{ك}) & \int_0^2 (2+x) dx &= 6 \quad (\text{ا}) \\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} &= 2 \quad (\text{ل}) & \int_0^2 (2-x)^2 dx &= 8/3 \quad (\text{ب}) \\ \int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2 dx &= 1/30 \quad (\text{م}) & \int_0^2 (3-2x+x^2) dx &= 9 \quad (\text{ج}) \\ \int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-15}} &= 6 \quad (\text{ن}) & \int_{-1}^5 (1-t^2)t dt &= -9/4 \quad (\text{د}) \\ \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx &= \frac{1}{2}a^2\pi \quad (\text{س}) & \int_1^4 (1-u)\sqrt{u} du &= -116/15 \quad (\text{هـ}) \\ \int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2} dx &= \frac{4}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad (\text{ع}) & \int_0^2 \sqrt{1+3x} dx &= 26 \quad (\text{و}) \\ \int_1^2 \ln(x^2+1) dx &= \ln 2 + \frac{1}{2}\pi - 2 \quad (\text{ف}) & \int_0^1 \frac{dx}{25-x^2} &= \frac{1}{6} \ln \frac{3}{2} \quad (\text{ز}) \\ \int_0^{\pi/2} \sin \frac{1}{2}t dt &= 4 \quad (\text{ص}) & \int_{-1/2}^0 \frac{x^2 dx}{x^2+x+1} &= \frac{\sqrt{3}\pi}{9} - \frac{5}{8} \quad (\text{ح}) \\ \int_0^{\pi/2} x^2 \sin 3x dx &= \frac{1}{27}(x^2-4) \quad (\text{ق}) & \int_1^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x} dx &= 4 \ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} \quad (\text{ط}) \\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos 2x} &= \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \quad (\text{ي}) & \int_1^{e^2} \frac{dx}{x-x^{1/2}} &= \frac{3}{2} \ln \frac{8}{3} \quad (\text{ث}) \end{aligned}$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} \quad \text{بين أن} \quad ٢٩-$$

$$x = e - \sin e, \quad y = 1 - \cos e. \quad \text{بفرض أن} \quad \int_{e-\pi}^{e+\pi} y dx = 3\pi, \quad \text{احسب قيمة} \quad ٣٠-$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\ln x. \quad \text{بفرض أن} \quad \int_1^4 \sqrt{1+(y')^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2, \quad \text{احسب} \quad ٣١-$$

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t. \quad \text{بفرض أن} \quad \int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{2}e^2(e-1), \quad \text{احسب} \quad ٣٢-$$

٣٣- استخدم صيغ الاختزال المناسبة ( الفصل ٢٦ ) كى تبرهن صيغة واليس :

( إذا كان  $n$  عدداً زوجياً وأكبر من الصفر ) .

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \dots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \dots (n-2)n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

( وإذا كان  $n$  عدداً فردياً وأكبر من الواحد ) .

$$= \frac{2 \cdot 4 \dots (n-3)(n-1)}{1 \cdot 3 \dots (n-2)n}$$

( إذا كان كل من  $m$  و  $n$  زوجيين وأكبر من الصفر ) .

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \dots (m-1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \dots (m+n-2)(m+n)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

( إذا كان  $m$  عدداً فردياً وأكبر من الواحد ) .

$$= \frac{2 \cdot 4 \dots (m-3)(m-1)}{(n+1)(n+3) \dots (n+m)}$$

( إذا كان  $n$  عدداً فردياً وأكبر من الواحد ) .

$$= \frac{2 \cdot 4 \dots (n-3)(n-1)}{(m+1)(m+3) \dots (m+n)}$$

٣٤ - احسب :

$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = 4 \ln \frac{3}{4} - 1 \quad (أ)$$

$$\int_0^{\sqrt{e}} x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{3}(e^2 + 1) \quad (ب)$$

$$\int_1^{11} \sqrt{2x+3} \, dx = 98/3 \quad (١)$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1} dx = \frac{1}{4} \pi - 1 \quad (ب)$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x - 5 \cos x + 4} = \frac{1}{3} \ln \frac{7+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}} \quad (ج)$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}} dx = \ln \frac{3-2\sqrt{2}}{4-\sqrt{15}} + 2\sqrt{2} - \sqrt{15} \quad (د)$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x} = \ln \sqrt{3} \quad (هـ)$$

$$\int_1^9 \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \, dx = 3 \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} \quad (و)$$

$$\int_{-1}^{-2} \frac{(x+2) \, dx}{x(x-2)^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \quad (ز)$$

$$\int_{-1}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \ln(\sqrt{2}-1) \quad (ح)$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{2 + \tan x} = \frac{1}{5} \ln \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{10} \quad (د)$$

$$\int_{1/4}^{3/4} \frac{(x+1) \, dx}{x^2(x-1)} = 4 \ln \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \quad (ع)$$

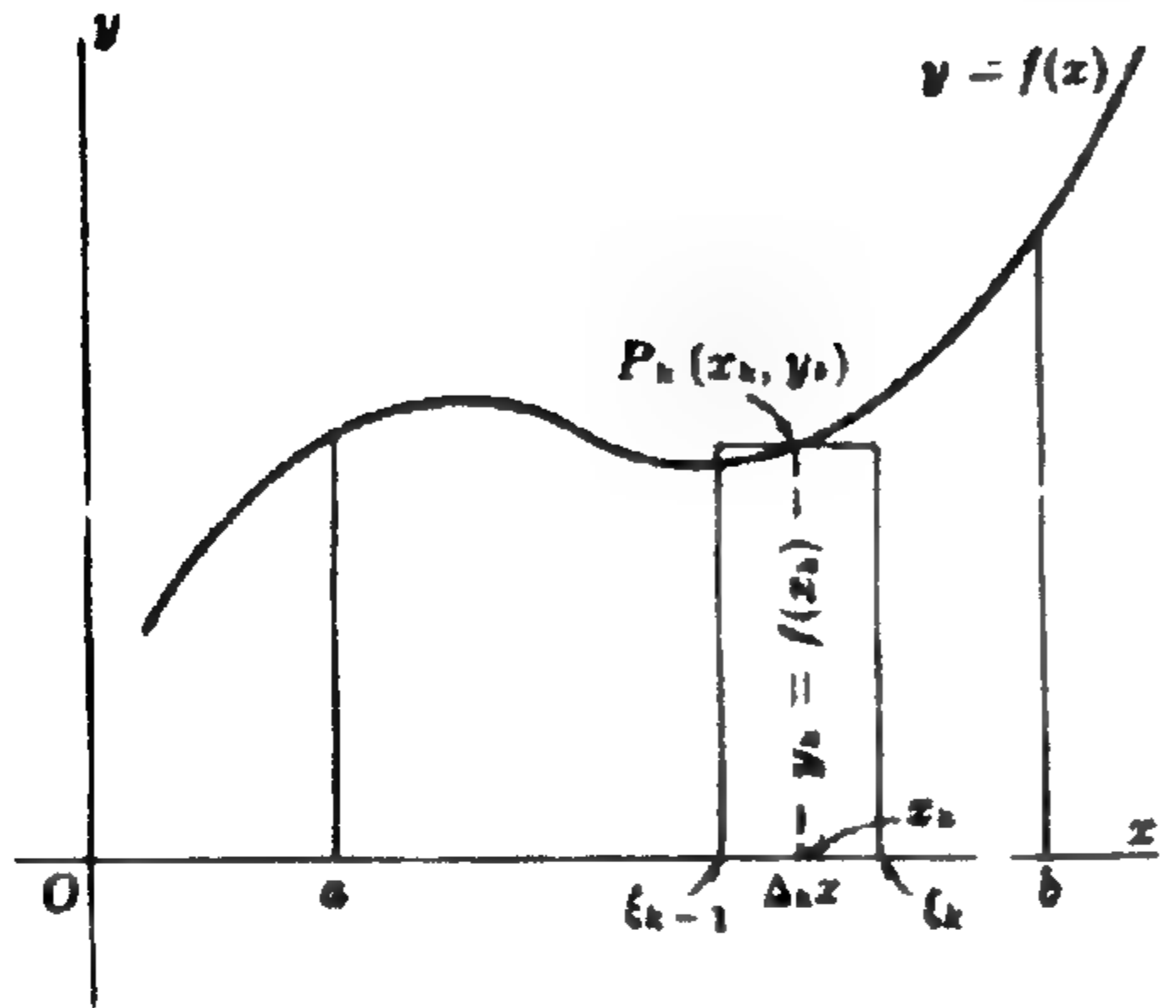
## الفصل الرابع والثلثون

### حساب المساحات المستوية بالتكامل

**المساحات كنهاية مجموع :** إذا كانت  $f(x)$  متصلة وغير سالبة في الفترة  $a \leq x \leq b$  ، فإنه يمكن إسطاء

التكامل المحدد  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$  تفسيراً

هندسياً . لنفرض أن الفترة  $a \leq x \leq b$  قسمت إلى فترات جزئية وأنها اخترنا نقاطاً  $x_k$  كما في الفصل السابق . لنرفع على المحور  $x$  أعمدة كل من أطراف الفترات الجزئية  $\xi_0 = a, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n = b$



فيقسم بذلك الجزء المستوي المحدود من أعلى بالمنحنى  $y = f(x)$  ومن أسفل بالمحور  $x$  ومن الجانبين بالمستقيمين  $x = a$  و  $x = b$  إلى  $n$  شريحة . لتقرب كل شريحة إلى مستطيل قاعدته القاعدة السفلى للشريحة وارتفاعه يساوي الارتفاع الصادي المقام على نقطة  $x_k$  في الفترة الجزئية ، وتكون مساحة المستطيل الموضح في الشكل ١ - ٣٤ مساوية  $f(x_k) \Delta x$  وتمثل عندئذ  $\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$  مجموع مساحات المستطيلات الـ  $n$  .

شكل ١ - ٣٤

ونهاية هذا المجموع  $\int_a^b f(x) dx$  ، أي عندما يزداد عدد الشرائح إلى ما لا نهاية وفق الأسلوب الموصوف في الفصل ٣٣ تساوي حسب التعريف مساحة قطعة المستوى المشار إليها أعلاه أو اختصاراً هي المساحة تحت المنحنى من  $x = a$  إلى  $x = b$  . أنظر المسألتين ١ - ٢

وبالمثل : إذا كانت  $x = g(y)$  متصلة وغير سالبة في الفترة  $c \leq y \leq d$  فإن التكامل المحدد  $\int_c^d g(y) dy$  يمثل حسب التعريف مساحة قطعة السطح المستوي المحددة بالمنحنى  $x = g(y)$  والمحور  $y$  والمستقيمين  $y = c$  و  $y = d$  . أنظر المسألة ٢

وإذا كانت  $y = f(x)$  متصلة وغير موجبة في الفترة  $a \leq x \leq b$  فإن  $\int_a^b f(x) dx$  يكون سالباً شديداً بذلك إلى أن المساحة واقعة تحت المحور السيني . وبشكل مماثل إذا كانت  $x = g(y)$  متصلة وغير موجبة في الفترة  $c \leq y \leq d$  ، فإن  $\int_c^d g(y) dy$  يكون سالباً شديداً بذلك إلى أن المساحة واقعة على يسار المحور الصادي .

أنظر المسألة ٤

وإذا غيرت  $y = f(x)$  إشارتها في الفترة  $a \leq x \leq b$  أو إذا غيرت  $x = g(y)$  إشارتها في الفترة  $c \leq y \leq d$  فإن المساحة تحت المنحنى تعطى بمجموع تكاملين محددين أو أكثر .

أنظر المسألة ٥

**حساب المساحات بالتكامل :** إن الخطوات الضرورية لتشكيل التكامل المحدود التي يعطى المساحة المطلوبة هي :

١- توضح برسم تقريبي (١) المساحة التي نبحث عنها (ب) تمثيل الشرائع (ج) المستطيل المقرب . سنميز ، كما هو متعارف ، الفترة الجزئية بطول يساوي  $\Delta x$  (أو  $\Delta y$ ) والنقطة  $x_k$  (أو  $y_k$ ) واقعة على هذه الفترة الجزئية في منتصفها .

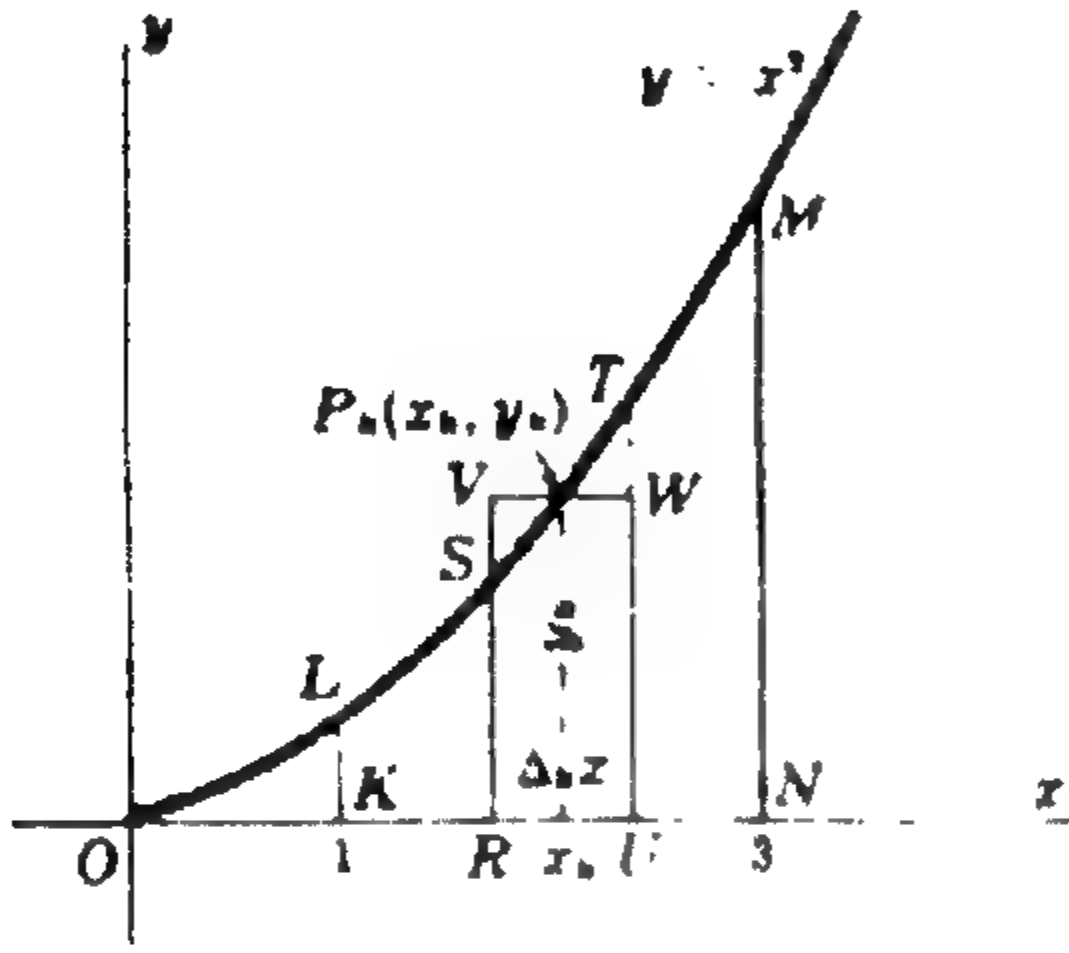
٢- اكتب مساحة المستطيل المقرب وشكل مجموع المستطيلات  $\Pi$  .

٣- نفرض أن عدد المستطيلات يزداد إلى ما لا نهاية ويمكن تطبيق النظرية الأساسية من الفصل السابق .

أنظر المسائل ٦ - ١٤

### مسائل محلولة

١- أوجد المساحة المحددة بالمنحنى  $y = x^2$  والمحور السيني والمستقيمين  $x = 3$  و  $x = 1$  .



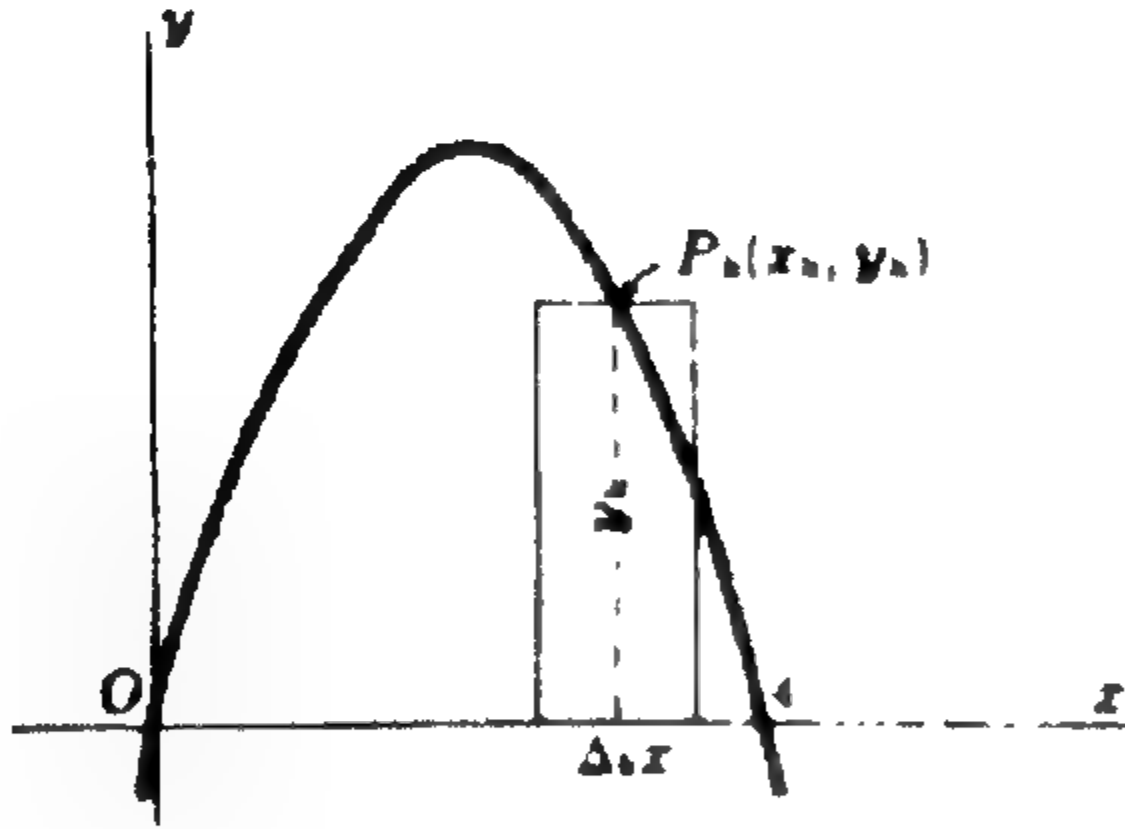
شكل ٢ - ٣٤

من الشكل ٢ - ٣٤ نجد أن المساحة التي نبحث عنها هي  $KLMN$  والشريحة المثلثة هي  $RSTU$  والمستطيل المقرب هو  $RVWUF$  ، وقاعدة هذا المستطيل  $\Delta_k x$  وارتفاعه  $y_k = f(x_k) = x_k^2$  ومساحته  $x_k^2 \cdot \Delta_k x$  إذن :

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k^2 \Delta_k x = \int_1^3 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \text{ sq. un.}$$

٢- أوجد المساحة الواقعة فوق المحور السيني وتحت القطع المكافئ .

$$y = 4x - x^2$$



شكل ٢ - ٣٤

المنحنى المفروض يقطع المحور السيني عند  $x = 0$  و  $x = 4$  وعندما نستخدم الشرائع الرأسية تكون هاتان القيمتان حدى التكامل . وعرض المستطيل المقرب الموضح في الشكل ٢ - ٣٤ يساوي  $\Delta_k x$  وارتفاعه  $y_k = 4x_k - x_k^2$  ومساحته  $(4x_k - x_k^2) \cdot \Delta_k x$  إذن :

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (4x_k - x_k^2) \Delta_k x = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[ 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = 32 \frac{2}{3} \text{ sq. un.}$$

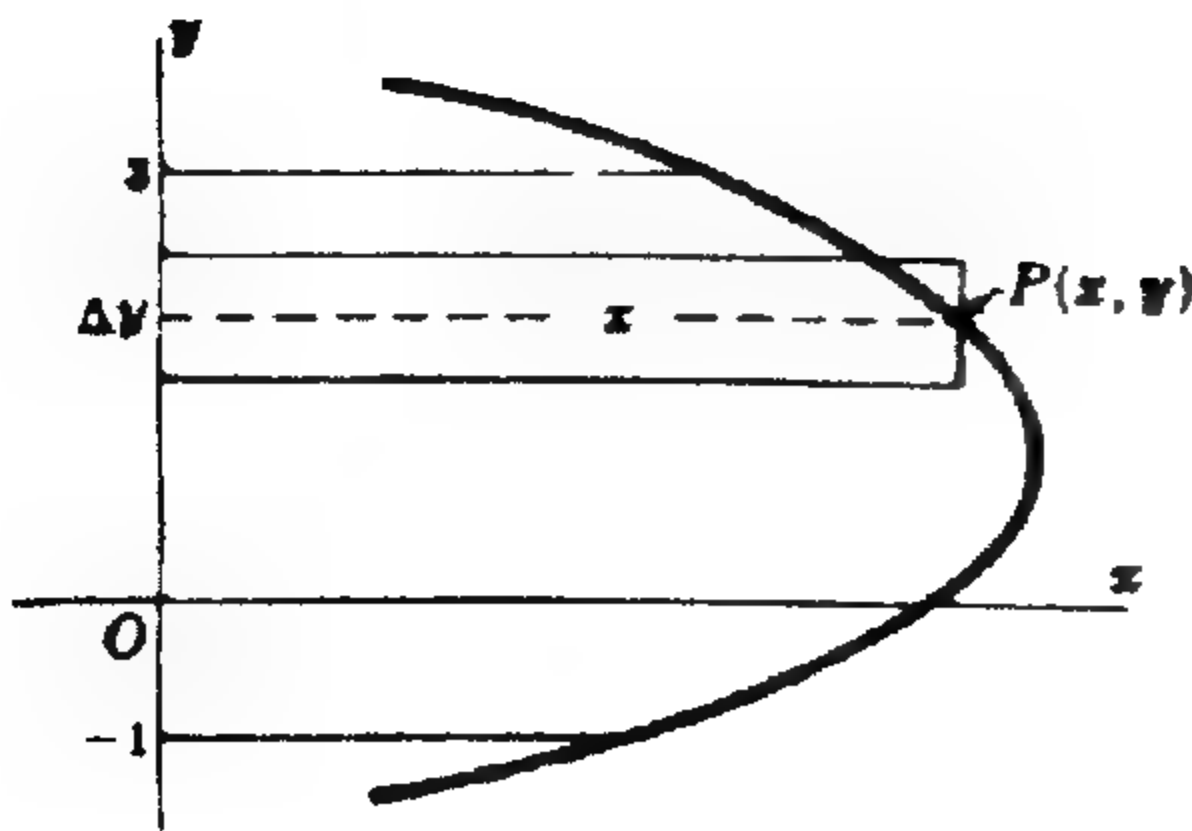
من الممكن اختصار الحسابات على أن لا يغيب أبداً عن بالنا الطريقة المشروحة أعلاه بكاملها . فنرى أنه بالإمكان صياغة التكامل المحدود ، بغض النظر عن حدى التكامل ، بمجرد تشكيل مساحة المستطيل المقرب .

٣- أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ  $x = 8 + 2y - y^2$

والمحور الصادي والمستقيمان  $y = -1$  و  $y = 3$  .

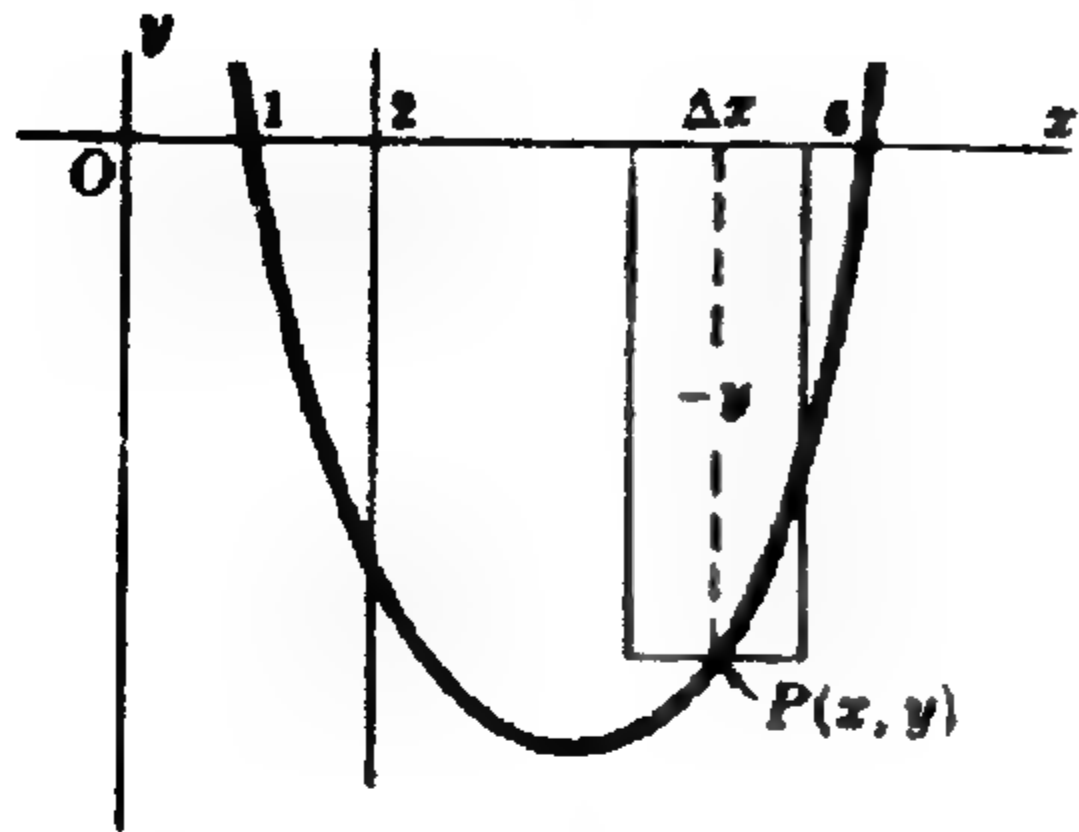
نقدم المساحة هنا إلى شرائع أفقية . فيكون عرض المستطيل المقرب المبين بالشكل ٢ - ٣٤ هو  $\Delta y$  وطوله  $x = 8 + 2y - y^2$  ومساحته هي  $(8 + 2y - y^2) \Delta y$  والمساحة المطلوبة هي :

$$\int_{-1}^3 (8 + 2y - y^2) dy = \left[ 8y + y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^3 = \frac{92}{3} \text{ sq. un.}$$



شكل ٢ - ٣٤

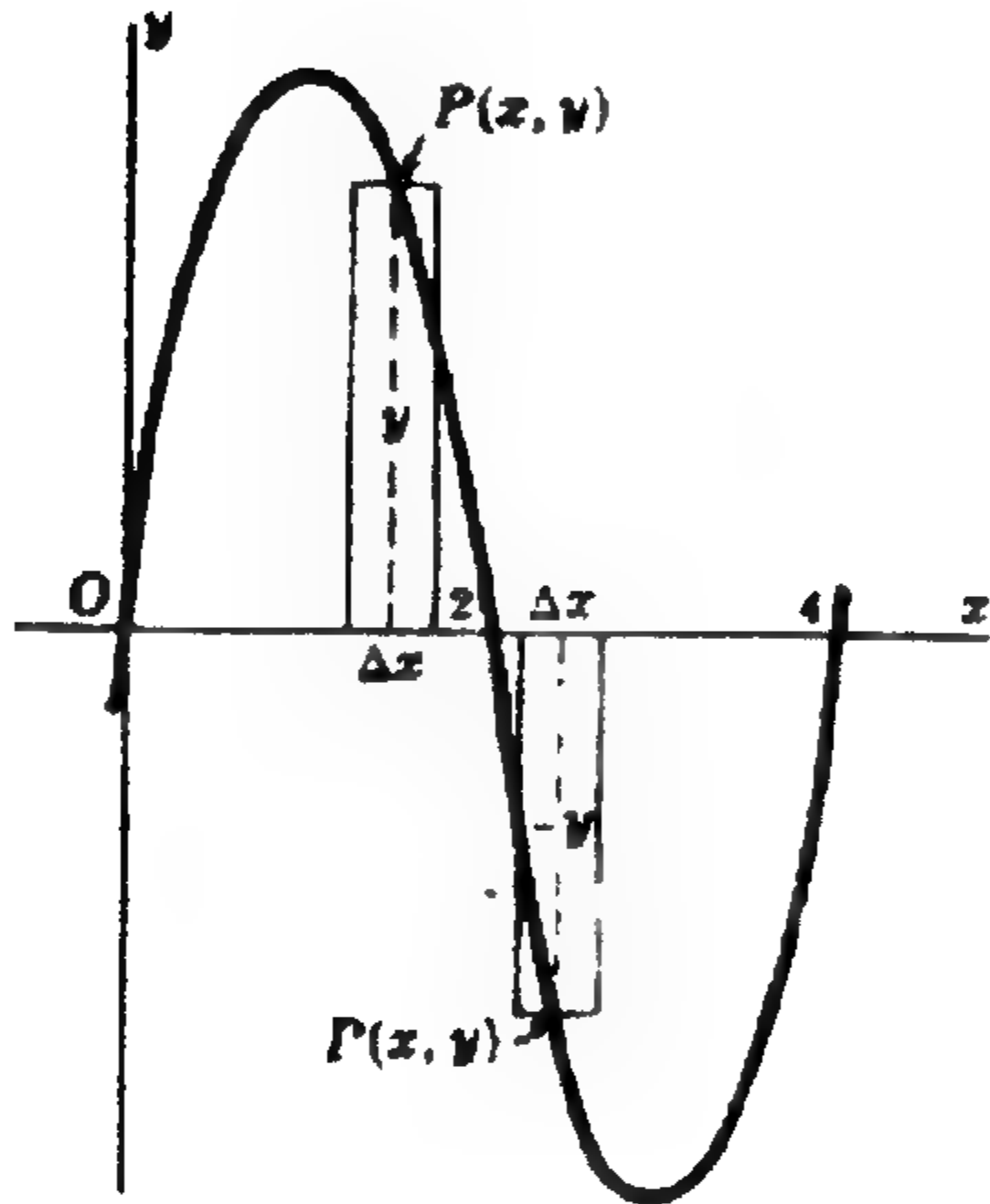
٤- أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ  $y = x^2 - 7x + 6$  والمحور السيني والمستقيمين  $x = 2$  و  $x = 6$ .



إن عرض المستطيل المقرب المبين بالشكل ٢٤ - ٥ يساوي  $\Delta x$  وارتفاعه  $-y = -(x^2 - 7x + 6)$  ومساحته هي  $-(x^2 - 7x + 6)\Delta x$  والمساحة المطلوبة إذن هي :

$$A = \int_2^6 -(x^2 - 7x + 6) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right]_2^6 = \frac{56}{3} \text{ square units}$$

شكل ٢٤ - ٥



شكل ٢٤ - ٦

٥- أوجد المساحة بين المنحنى  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$  والمحور السيني. المنحنى يقطع المحور السيني عند  $x = 0, x = 2, x = 4$  كما هو مبين في الشكل ٢٤ - ٦. باستخدام الشرائح الرأسية، نرى أن مساحة المستطيل المقرب الذي تقع قاعدته في الفترة  $0 < x < 2$  تساوي  $(x^3 - 6x^2 + 8x)\Delta x$ . وبذلك تكون مساحة ذلك الجزء من السطح الواقع فوق المحور السيني مساوية لـ  $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx$ . وأما مساحة المستطيل المقرب الذي تقع قاعدته في الفترة  $2 < x < 4$  فتساوي  $-(x^3 - 6x^2 + 8x)\Delta x$ . وبذلك تكون مساحة ذلك الجزء من السطح الواقع تحت المحور السيني مساوية لـ  $\int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x) dx$ . وهكذا تكون المساحة المطلوبة.

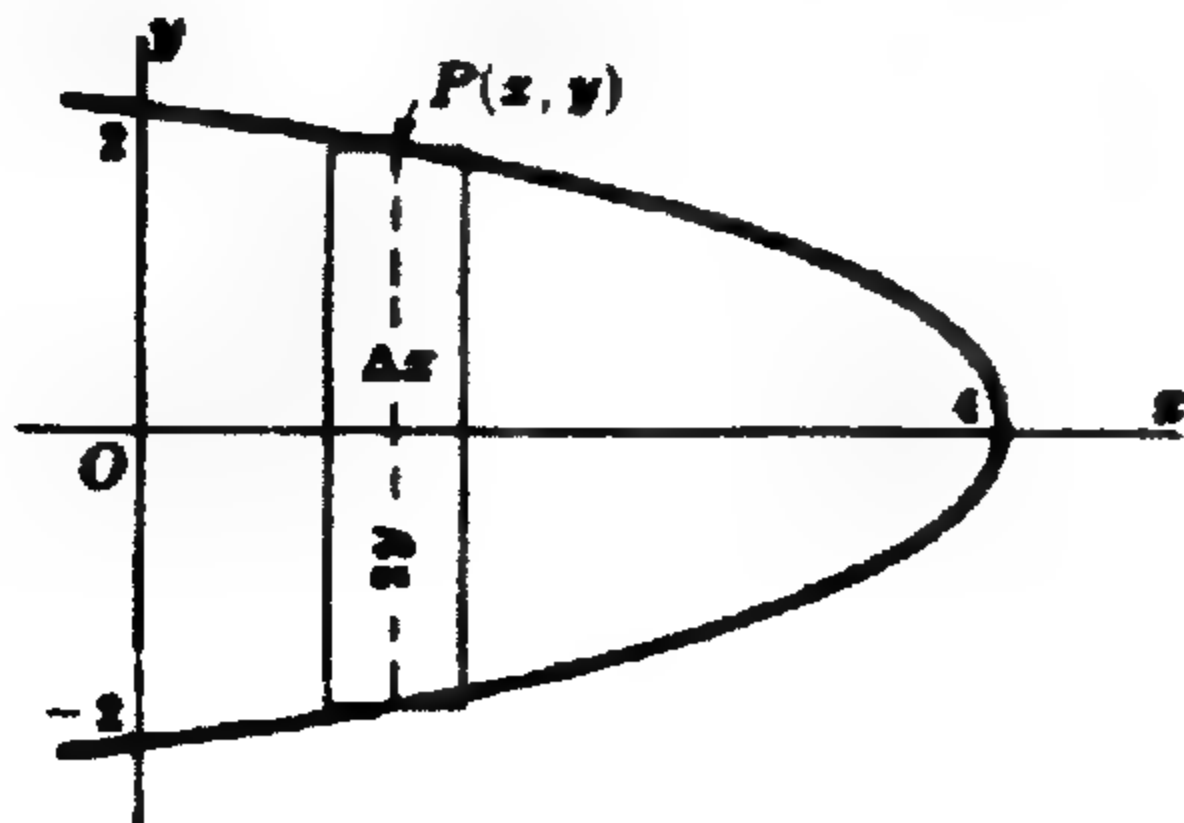
$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx + \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 = 4 + 4 = 8 \text{ square units}$$

إن حساب المساحة بتكاملين محددتين هنا ضروري لأن دالة التكامل تغير إشارتها في فترة التكامل.

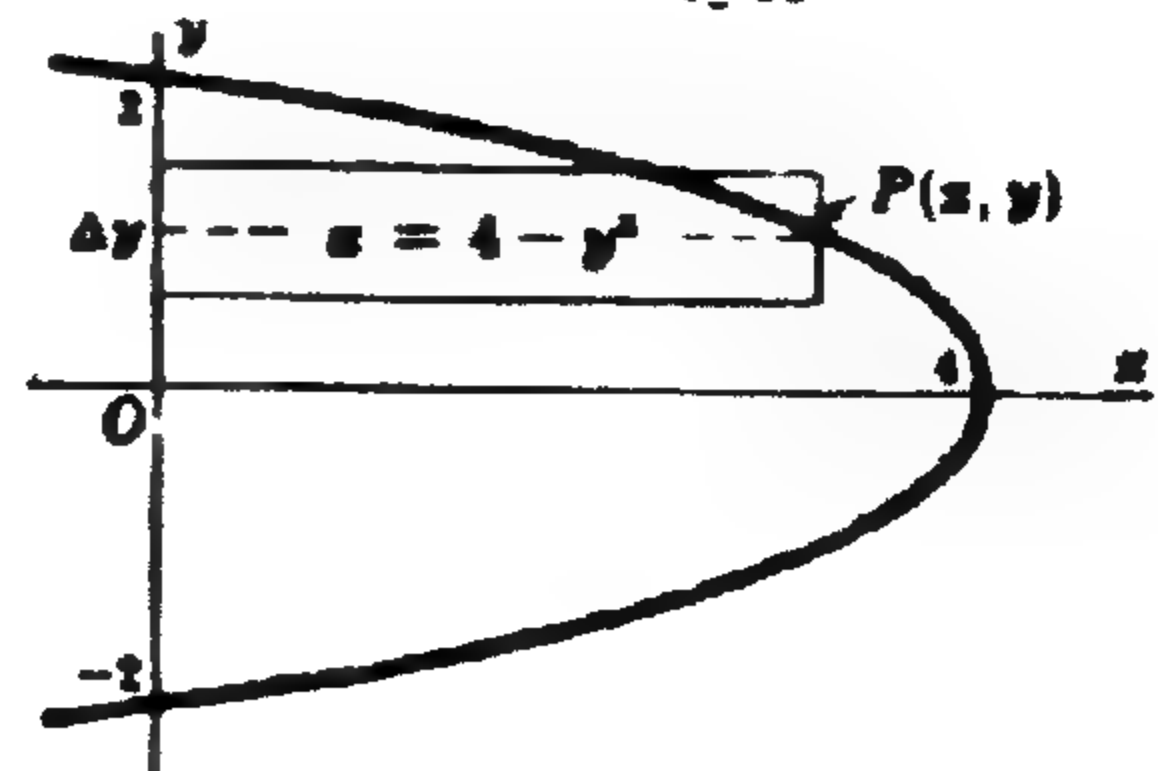
أما إذا فطنا أن نلاحظ هذا الأمر فإننا نصل إلى النتيجة الخاطئة  $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx = 0$ .

٦- أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ  $x = 4 - y^2$  والمحور الصادي.

إن القطع المكافئ يقطع المحور السيني عند النقطة  $(4, 0)$  والمحور الصادي عند النقطتين  $(0, 2)$  و  $(0, -2)$ . راجع المسألة سنسك طريقتين :



شكل ٢٤ - ٧ (ب)



شكل ٢٤ - ٧ (أ)



طريقة الشرائح الأفقية : أن عرض المستطيل المقرب الموضح في الشكل ٨-٣٤ (أ) يساوى  $\Delta y$  وطوله  $4 - y^2$  ومساحته  $\Delta y (4 - y^2)$  . وأما مدى التكامل فهما  $y = -2$  ,  $y = 4$  ويلاحظ من ناحية أخرى ، أن المساحة الواقعة فوق المحور السيني مساوية للمساحة الواقعة تحت نفس المحور . وعلى هذا فإن المساحة المطلوبة هي :

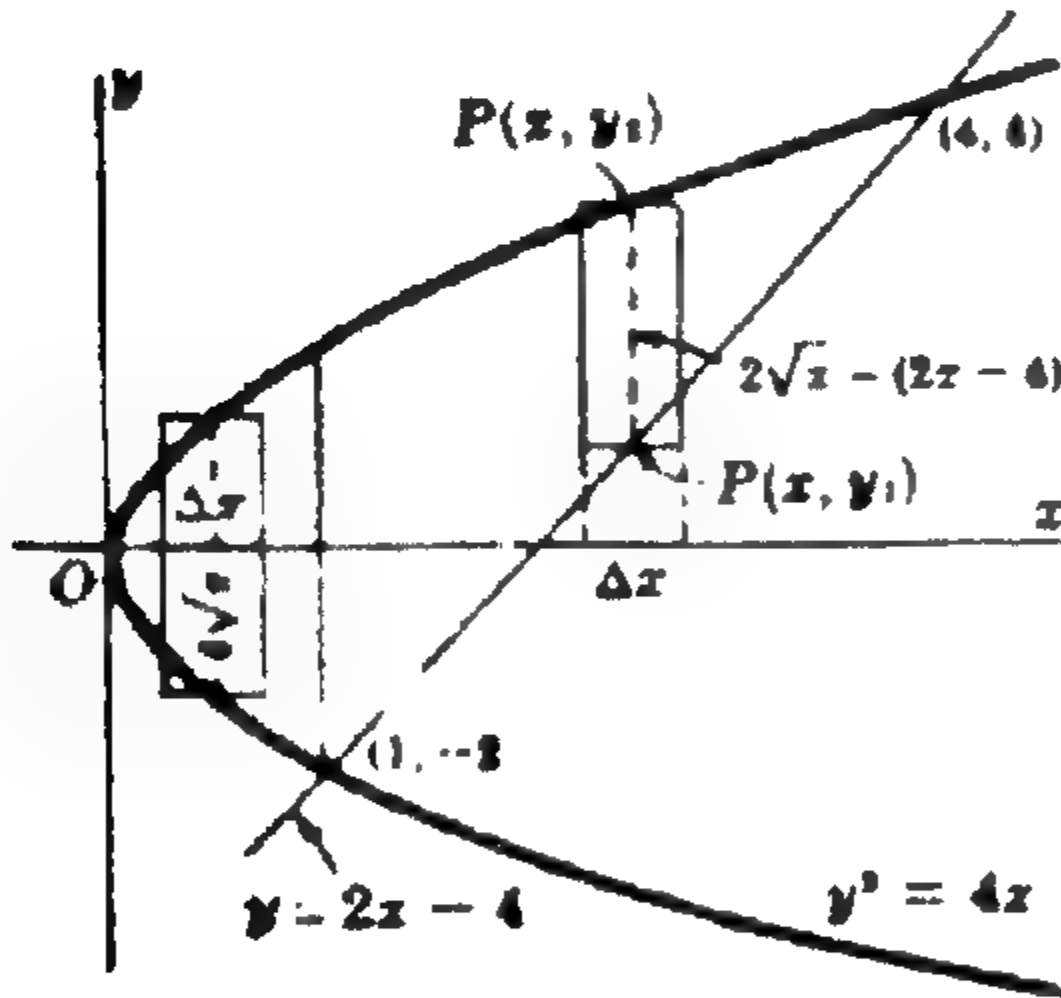
$$\int_{-2}^4 (4 - y^2) dy = 2 \int_0^4 (4 - y^2) dy = 2 \left( 4y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ square units}$$

طريقة الشرائح الرأسية : إن عرض المستطيل المقرب الموضح في الشكل ٨-٣٤ (ب) يساوى  $\Delta x$  وارتفاعه  $2y = 2\sqrt{4-x}$  ومساحته  $2y \Delta x = 2\sqrt{4-x} \Delta x$  . وأما مدى التكامل فهما  $x = 0$  و  $x = 4$  ولذلك فإن المساحة المطلوبة هي :

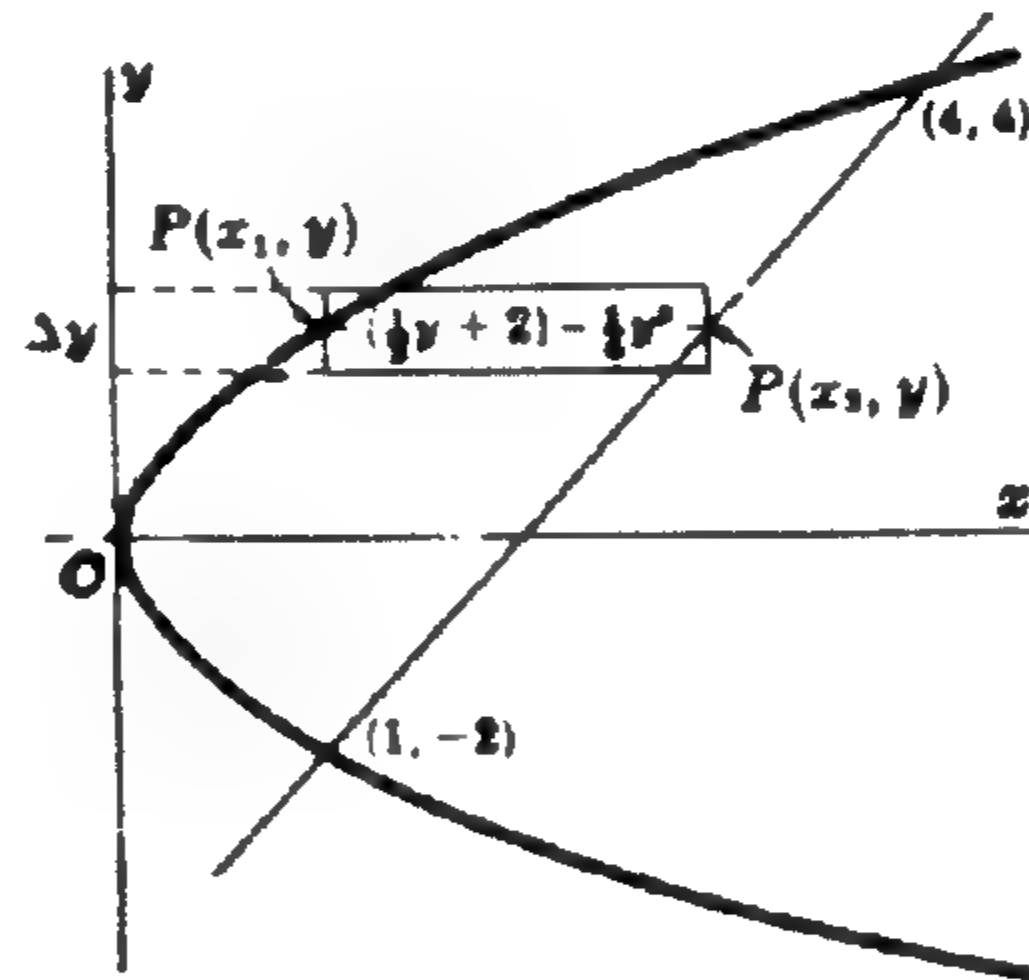
$$\int_0^4 2\sqrt{4-x} dx = -\frac{4}{3}(4-x)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ square units}$$

٧- أوجد المساحة المحددة بـ "قطع المكافئ"  $y^2 = 4x$  والمستقيم  $y = 2x - 4$  .

يقطع المستقيم المفروض القطع المكافئ عند النقطتين  $(1, -2)$  و  $(4, 4)$  . ويلاحظ من الشكلين التاليين أنه عندما نستخدم الشرائح الرأسية فإن بعض هذه الشرائح ينطلق من المستقيم إلى القطع والبعض الآخر ينطلق من أحد فرعي القطع إلى الفرع الآخر ، في حين إذا استخدمنا الشرائح الأفقية فإن كل شريحة تنطلق من القطع إلى المستقيم . سنقدم فيما يلي الحل بالطريقتين لنبين أفضلية أحدهما على الآخر ولنبين أنه ينبغي قبل البدء في تكوين التكامل المحدد أن نمن النظر في طريقتي التجزئة إلى شرائح .



شكل ٨-٣٤ (ب)



شكل ٨-٣٤ (أ)

طريقة الشرائح الأفقية : بالنظر إلى الشكل ٨-٣٤ (أ) نجد أن عرض المستطيل المقرب الموضح في الشكل يساوى  $\Delta y$  وطوله يساوى (قيمة  $x$  على القطع المكافئ) - (قيمة  $x$  على المستقيم) =  $(\frac{1}{4}y^2 + 2) - \frac{1}{4}y^2 = 2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2$  ومساحته تساوى  $\Delta y (2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2)$  والمساحة المطلوبة تساوى :

$$\int_{-2}^4 (2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2) dy = \left[ 2y + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12} \right]_{-2}^4 = 9 \text{ square units}$$

طريقة الشرائح الرأسية : بالنظر إلى الشكل ٨-٣٤ (ب) . وبتقسيم المساحة بالمستقيم  $x = 1$  فيكون عرض المستطيل المقرب على يسار هذا المستقيم  $\Delta x$  وطوله (باستخدام التناظر) يساوى  $2y = 4\sqrt{x}$  ، ومساحته  $4\sqrt{x} \Delta x$  ويكون عرض المستطيل المقرب على يمين المستقيم المذكور  $\Delta x$  وطوله  $2\sqrt{x} - (2x - 4) = 2\sqrt{x} - 2x + 4$  ومساحته  $\Delta x (2\sqrt{x} - 2x + 4)$  والمساحة المطلوبة تساوى :

$$\int_0^1 4\sqrt{x} dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - 2x + 4) dx = \left[ \frac{8}{3}x^{3/2} \right]_0^1 + \left[ \frac{4}{3}x^{3/2} - x^2 + 4x \right]_1^4 = \frac{8}{3} + \frac{19}{3} = 9 \text{ sq. un.}$$

٨- أوجد المساحة المحددة بالقمتين المكافئتين

$$y = x^2 - 2x$$

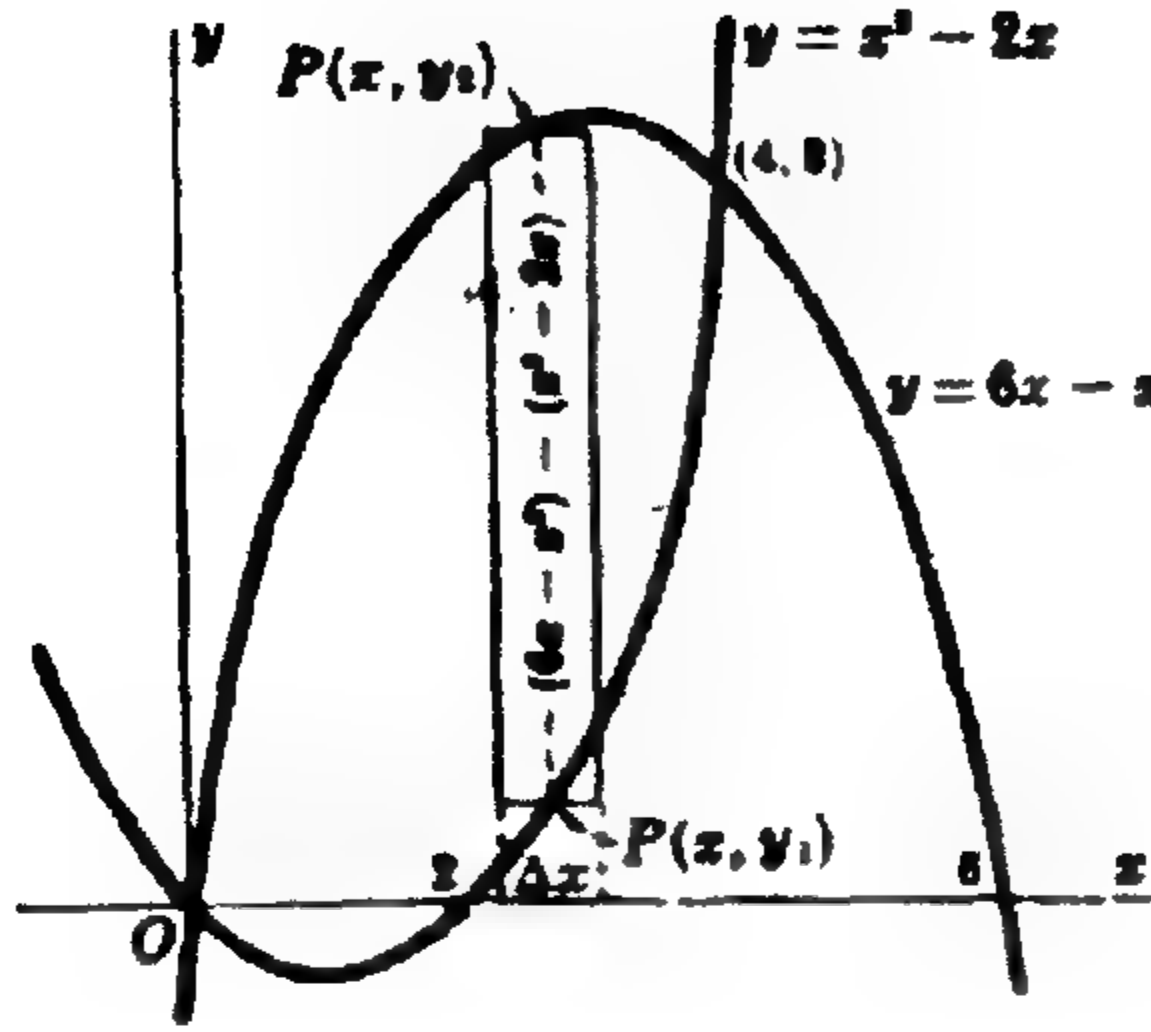
يتقاطع القمتان عند النقطتين  $(0, 0)$  و  $(4, 8)$  ، ويلاحظ مقدما أن الشرائح الرأسية هي التي تعطينا الحل الأسهل .

إن عرض المستطيل المقرب  $\Delta x$  وارتفاعه يساوى ( قيمة  $y$  على الحد الأعلى ) - ( قيمة  $y$  على الحد الأدنى ) .

$$(6x - x^2) - (x^2 - 2x) = 8x - 2x^2$$

ومساحته تساوى  $\Delta x (8x - 2x^2)$  والمساحة المطلوبة هي

$$\int_0^4 (8x - 2x^2) dx = \left[ 4x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^4 = \frac{64}{3} \text{ square units}$$



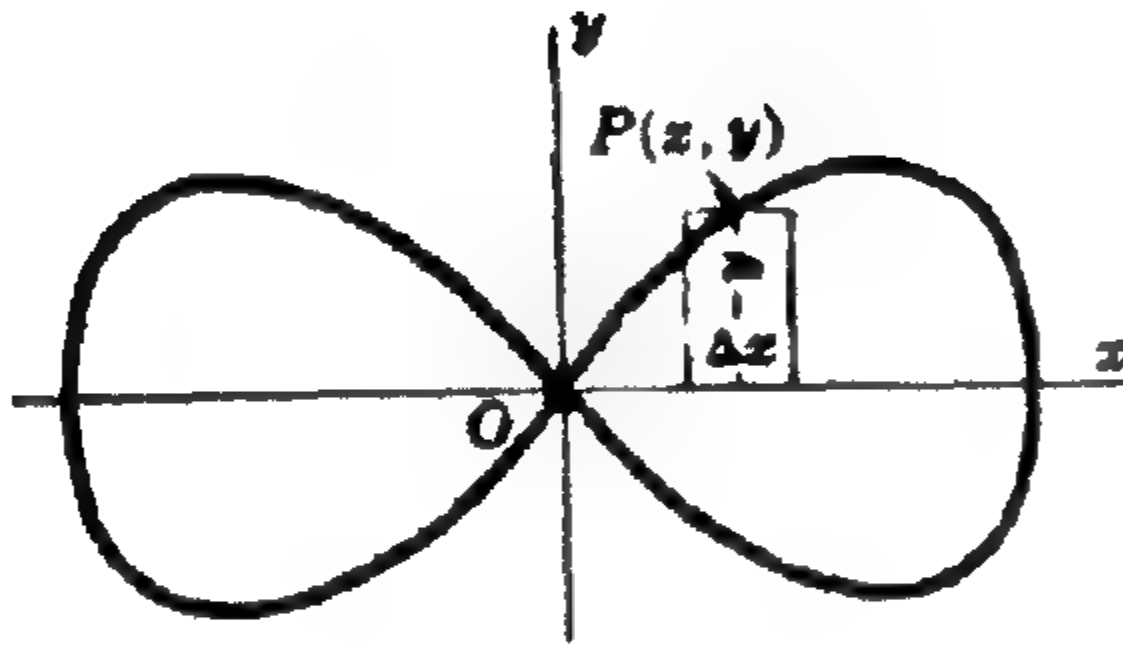
شكل ٢٤ - ٩

٩- أوجد المساحة الواقعة داخل المنحنى  $y^2 = x^2 - x^4$  .

إن المنحنى متناظر بالنسبة لمحورين الاحداثيين وعلى هذا فإن المساحة المطلوبة تساوى أربع مرات مساحة الجزء الواقع في الربع الأول . وعرض

المستطيل المقرب يساوى  $\Delta x$  وارتفاعه  $y = \sqrt{x^2 - x^4} = x\sqrt{1 - x^2}$  ، ومساحته  $x\sqrt{1 - x^2} \Delta x$  والمساحة المطلوبة هي

$$4 \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx = \left[ -\frac{4}{3}(1 - x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \text{ square units}$$

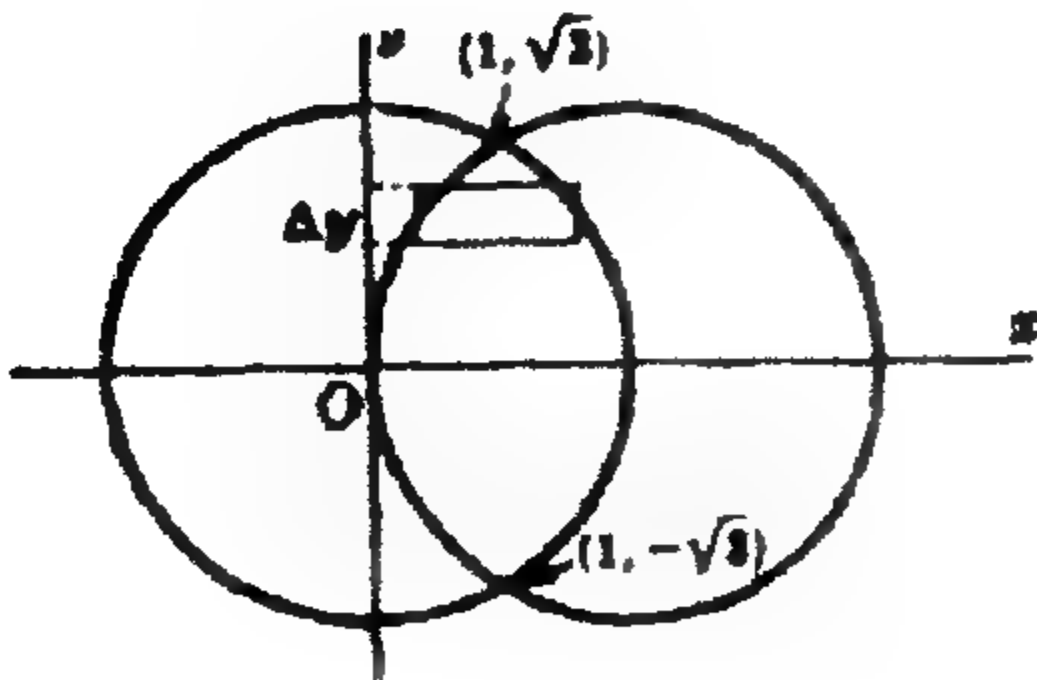


شكل ٢٤ - ١٠

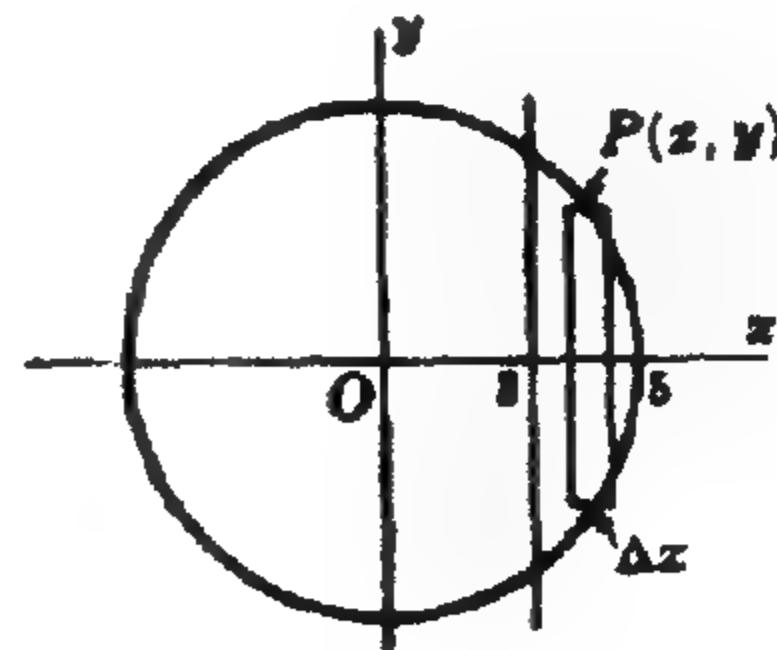
١٠- أوجد مساحة القطعة الصغرى الواقعة بين الدائرة  $x^2 + y^2 = 25$  والمستقيم  $x = 3$  . أنظر الشكل ٢٤ - ١١ .

$$A = \int_3^5 2y dx = 2 \int_3^5 \sqrt{25 - x^2} dx = 2 \left[ \frac{x}{2} \sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} \right]_3^5$$

$$= \left( \frac{25}{2} \pi - 12 - 25 \arcsin \frac{3}{5} \right) \text{ square units}$$



شكل ٢٤ - ١٢



شكل ٢٤ - ١١

١١- أوجد مساحة الجزء المشترك بين الدائرتين  $x^2 + y^2 = 4x$  و  $x^2 + y^2 = 4$  . أنظر الشكل ٢٤ - ١٢ .

تتقاطع الدائرتان عند النقطتين  $(1 \pm \sqrt{3})$  ويمتد المستطيل المقرب من  $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$  إلى  $x = \sqrt{4 - y^2}$  . وبذلك فإن :

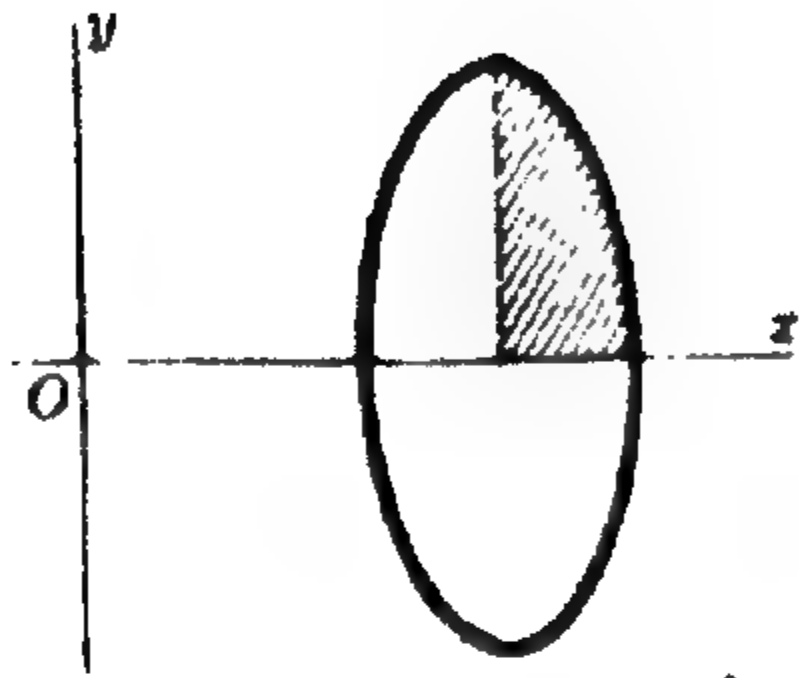
$$A = 2 \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2} - (2 - \sqrt{4-y^2})) dy = 4 \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2} - 1) dy$$

$$= 4 \left[ \frac{y}{2} \sqrt{4-y^2} + 2 \arcsin \frac{1}{2} y - y \right]_0^{\sqrt{3}} = \left( \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \right) \text{ square units}$$

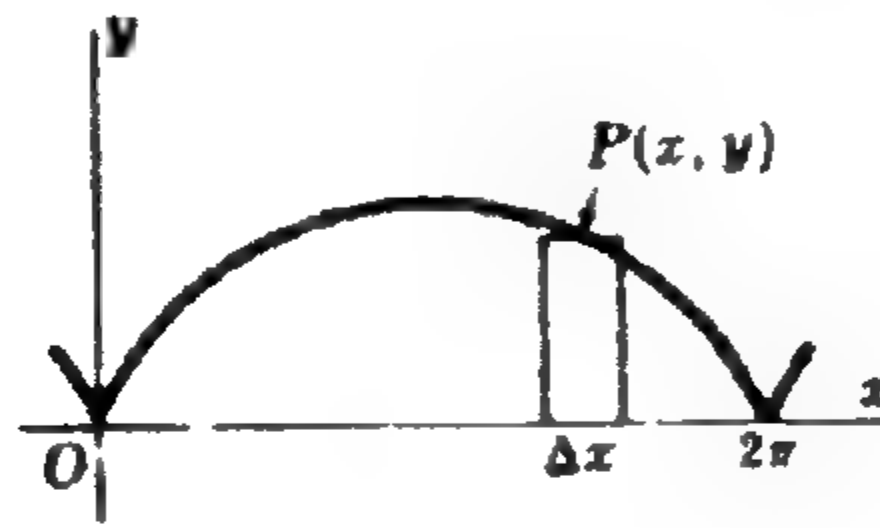
١٢- أوجد مساحة عروة المنحنى  $y^2 = x^2(4+x)$ . أنظر الشكل ١٢-٣٤.

$$A = \int_{-4}^0 2y dx = 2 \int_{-4}^0 x^2 \sqrt{4+x} dx. \text{ Let } 4+x = z^2;$$

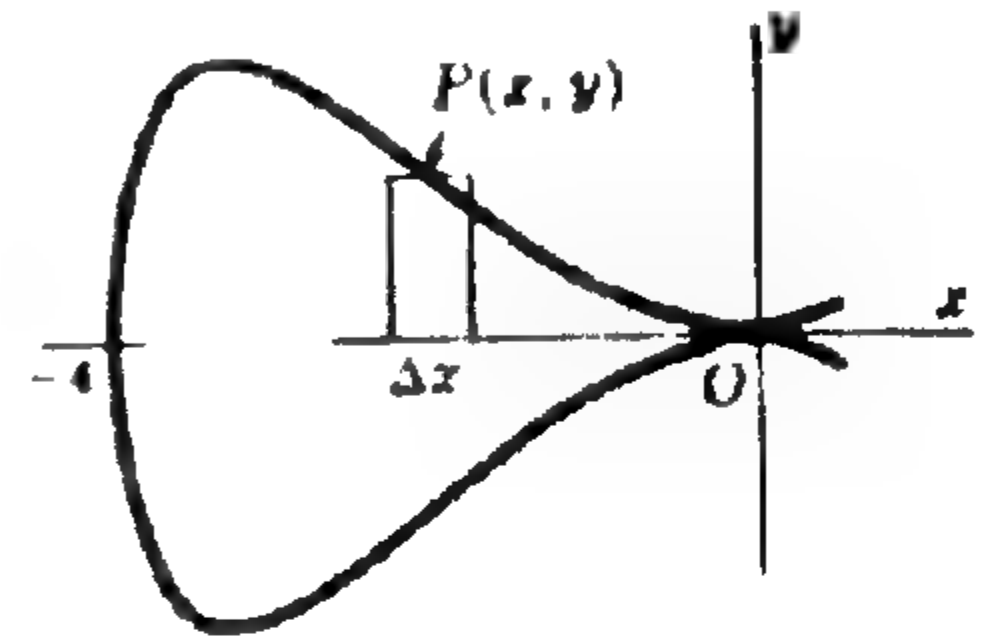
$$A = 4 \int_0^2 (z^2-4)^2 z^2 dz = 4 \left[ \frac{z^3}{7} - \frac{8z^5}{5} + \frac{16z^7}{3} \right]_0^2 = \frac{4096}{105} \text{ square units ; ومنه}$$



شكل ١٥ - ٣٤



شكل ١٤ - ٣٤



شكل ١٣ - ٣٤

١٣- أوجد المساحة الواقعة تحت عقد المنحنى الدويرى (البيكلويد)  $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$ . أنظر الشكل ١٤-٣٤.

يرسم العقد عندما تتغير  $\theta$  من 0 إلى  $2\pi$  إذن  $dx = (1 - \cos \theta) d\theta$  والمساحة هي :

$$A = \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2} - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= \left[ \frac{3}{2} \theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = 3\pi \text{ square units}$$

١٤- أوجد المساحة المحددة بالمنحنى  $x = 3 + \cos \theta, y = 4 \sin \theta$ . أنظر الشكل ١٥-٣٤.

ترسم المساحة المظلة في الشكل (  $\frac{1}{4}$  المساحة المطلوبة ) عندما تتغير  $\theta$  من 0 إلى  $\frac{1}{2}\pi$  وانظر بان :

$$A = -4 \int_0^{\pi/2} (4 \sin \theta)(-\sin \theta) d\theta = 16 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= 8 \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = 4\pi \text{ square units}$$

### مسائل إضافية

١٥- أوجد المساحة المحددة بما يلي :

- |  |  |
|--|--|
| (أ) $y = \tan x, x = 0, x = \frac{1}{2}\pi$    | (١) $y = x^2, y = 0, x = 2, x = 5$       |
| (ب) $y = x^2 - 4, y = 8 - 2x^2$                | (ب) $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 3$       |
| (ج) $y = x^3 - 4x^2, y = 4x^2$                 | (ج) $y = 4x - x^2, y = 0, x = 1, x = 3$  |
| (د) $x^2 = x^2(\pi^2 - x^2)$                   | (د) $x = 1 + y^2, x = 10$                |
| (هـ) $9ay^3 = x(3a - x)^2$                     | (هـ) $y = 3y^2 - 9, x = 0, y = 0, y = 1$ |
| (و) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 0, x = 2$        | (و) $x = y^2 + 4y, x = 0$                |
| (ز) $y = e^{x^2} + e^{-x^2}, y = 0, x = \pm a$ | (ز) $y = 9 - x^2, y = x + 3$             |
| (ح) $xy = 12, y = 0, x = 1, x = e^2$           | (ح) $y = 2 - x^2, y = -x$                |
| (ط) $y = 1/(1+x^2), y = 0, x = \pm 1$          |  |

(ص) قطاع دائري نصف قطره  $r$  وزاويته  $a$ .

(ق) قطع ناقص  $x = a \cos t, y = b \sin t$ .

(ر)  $x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta - 1, y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta$ .

(ش)  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ .

(ت) العقد الأول من  $y = e^{-ax} \sin ax$ .

(ث)  $y = xe^{-x^2}, y = 0$  والاحداثى الصادى الأكبر.

(خ) الفرعين  $(2x - y)^2 = x^2$  و  $x = 4$ .

(ذ) داخل  $y = 25 - x^2, 256x = 3y^2, 16y = 9x^2$ .

الأجوبة .

36, (د)	22/3, (ج)	20, (ب)	39 square units (أ)
9/2, (ح)	125/6, (ز)	32/3, (و)	8, (هـ)
$8\sqrt{3}a^2/5$ , (ك)	$2a^2/3$ , (ى)	$512\sqrt{2}/15$ , (ط)	32, (ف)
$1/2\pi$ , (س)	24, (ن)	$2a(e - 1/e)$ , (م)	$(e^2 + 1/e^2 - 2)$ , (ل)
$6\pi$ , (ر)	$\pi ab$ , (ق)	$1/2 r^2 a$ , (ص)	$1/2 \ln 2$ , (ع)
$128/5$ , (خ)	$1/2(1 - 1/\sqrt{e})$ , (ث)	$(1 + 1/e^\pi)/2 a$ , (ت)	$3\pi a^2/8$ , (ش)
			98/3, square units (ذ)

نقصد بمتوسط الاحداثى الصادى للمنحنى  $y = f(x)$  في الفترة  $a \leq x \leq b$

القيمة :

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} = \frac{\text{المساحة}}{\text{القاعدة}}$$

١٦- أوجد متوسط الاحداثى الصادى لـ (أ) نصف دائرة (ب) القطع المكافئ  $y = 4 - x^2$  من  $x = -2$  إلى  $x = 2$ .

ج (أ)  $\pi r/4$  (ب)  $8/3$

١٧- (أ) أوجد متوسط الاحداثى الصادى لقطع من البويرى (البيكلونيد)  $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$  وذلك بالنسبة لـ  $x$ .

(ب) نفس الشيء بالنسبة لـ  $\theta$ .

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(1 - \cos \theta) d\theta = a \quad (ب) \quad \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3a}{2}, (أ)$$

١٨- المعادلات الآتية بالنسبة لجسم يسقط سقوطاً حراً  $s = \frac{1}{2}gt^2$  و  $v = gt = \sqrt{2gs}$ .

(أ) بين أن القيمة المتوسطة لـ  $v$  بالنسبة لـ  $t$  في الفترة  $0 \leq t \leq t_1$  تساوى نصف السرعة النهائية.

(ب) بين أن القيمة المتوسطة لـ  $v$  بالنسبة لـ  $s$  في الفترة  $0 \leq s \leq s_1$  تساوى ثلثي السرعة النهائية.

## الفصل الخامس والثلثون

### حجوم أجسام دورانية

**يتولد الجسم الدوراني** عن دوران قطعة سطح مستوية حول مستقيم واقع في مستواها ونسبه محور الدوران . ويمكن إيجاد حجم الجسم الدوراني باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين :

#### طريقة القرص :

أ - عندما يكون محور الدوران جزءا من حدود قطعة السطح .

( ١ ) نرسم شكلا تقريبا بين قطعة السطح وشريغة مثلة عموديا على محور الدوران ، والمستطيل المقرب كما في الفصل السابق .

( ٢ ) اكتب حجم القرص ( الاسطوانة ) الناتج من دوران المستطيل المقرب حول محور الدوران وشكل مجموع الحجوم الناتجة عن دوران المستطيلات الـ  $n$  .

( ٣ ) افرض أن عدد المستطيلات يزداد إلى ما لا نهاية واستخدم النظرية الأساسية .

أنظر المائلين ١ - ٢

ب - عندما لا يكون محور الدوران جزءا من حدود قطعة السطح .

( ١ ) كما في (١) أعلاه .

( ٢ ) مد أضلاع المستطيل المقرب  $ABCD$  لتقطع محور الدوران في  $E$  و  $F$  كما في الشكل ٣٥ - ٣ في المسألة ٣ . وعندما يدور المستطيل المقرب حول محور الدوران تتكون حلقة يساوي حجمها الفرق بين الحجمين المولدين بدوران المستطيلين  $EABF$  و  $ECDF$  حول المحور . اكتب الفرق بين هذين الحجمين ثم يتبع كما في (٢) أعلاه .

( ٣ ) كما في (٣) أعلاه .

أنظر المائلين ٣ - ٤

#### طريقة القشرة :

( ١ ) بين برسم تقريبي قطعة السطح وشريغة مثلة موازية لمحور الدوران والمستطيل المقرب .

( ٢ ) اكتب حجم القشرة الاسطوانية الناتجة من دوران المستطيل المقرب حول محور الدوران ( وهو يساوي متوسط المحيط  $\times$  الارتفاع  $\times$  السمك ) ثم اجمع بالنسبة لمستطيلات الـ  $n$  .

( ٣ ) افرض أن عدد المستطيلات يزداد إلى ما لا نهاية و طبق النظرية الأساسية .

أنظر المائل ٥ - ٨

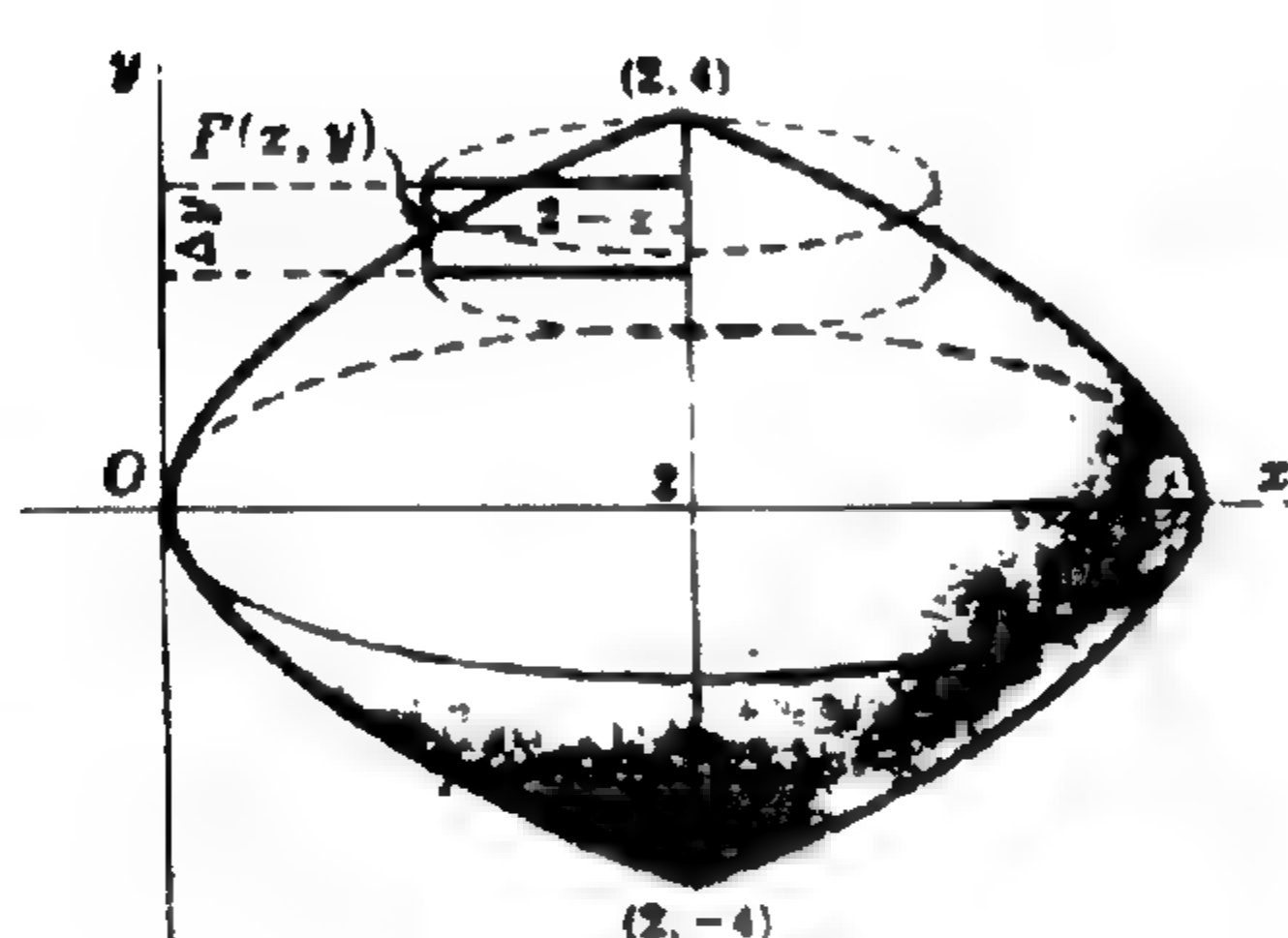


### مسائل محلولة

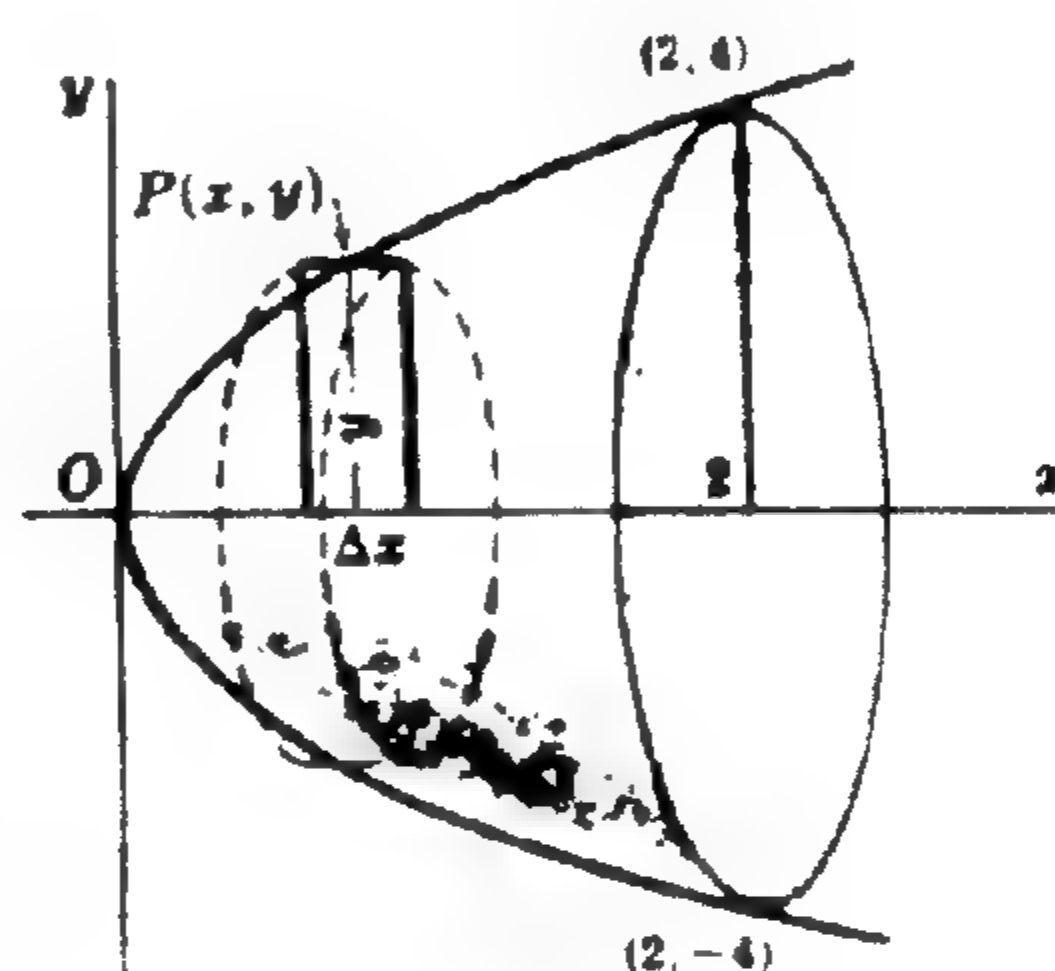
١ - أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح الواقعة في الربع الأول حول المحور السيني علماً بأن القطعة محددة بالقطع المكافئ  $y^2 = 8x$  والوتر البؤري العمودي ( $x = 2$ ) .

بالإشارة إلى الشكل ١ - ٣٥ . نقسم المساحة إلى شرائح رأسية . وعندما يدور المستطيل المقرب المبين في الشكل ١ - ٣٥ حول المحور السيني ينتج قرص نصف قطره  $y$  وارتفاعه  $\Delta x$  وحجمه  $\pi y^2 \Delta x$  ومجموع أحجام الـ  $n$  قرصاً الموافقة للمستطيلات الـ  $n$  يساوي  $\sum \pi y^2 \Delta x$  والحجم المطلوب هو :

$$V = \int_0^2 dV = \int_0^2 \pi y^2 dx = \pi \int_0^2 8x dx = 4\pi x^2 \Big|_0^2 = 16\pi \text{ cubic units}$$



شكل ٢ - ٣٥



شكل ١ - ٣٥

٢ - أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحددة بالقطع المكافئ  $y^2 = 8x$  والوتر البؤري العمودي ( $x = 2$ ) ، حول الوتر البؤري العمودي المذكور .

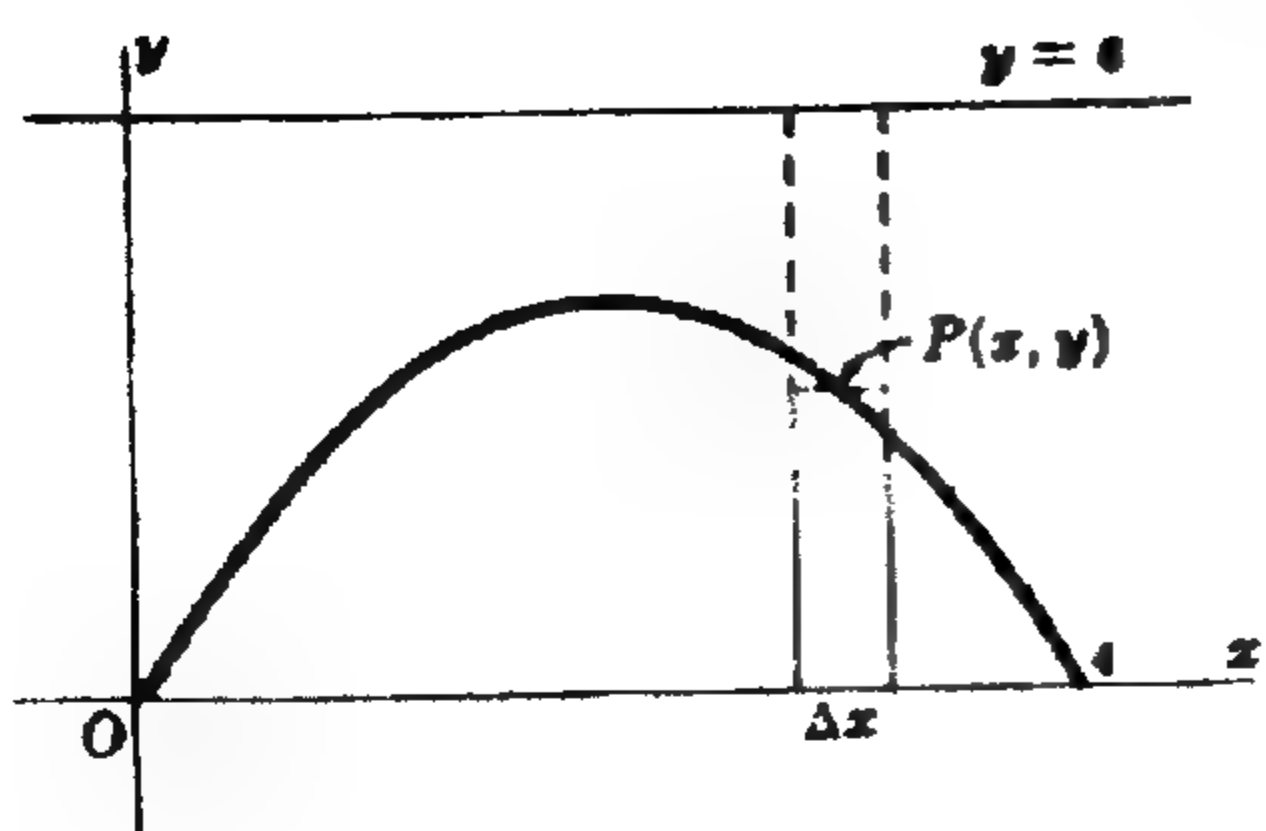
بالإشارة إلى الشكل ٢ - ٣٥ . نقسم المساحة إلى شرائح أفقية . وعندما يدور المستطيل المقرب المبين في الشكل ٢ - ٣٥ حول الوتر البؤري المذكور ينتج قرص نصف قطره  $2 - x$  وارتفاعه  $\Delta y$  وحجمه  $\pi(2 - x)^2 \Delta y$  والحجم المطلوب يساوي .

$$V = \int_0^4 \pi(2 - x)^2 dy = 2\pi \int_0^4 (2 - x)^2 dy = 2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \frac{256}{15} \pi \text{ cubic units}$$

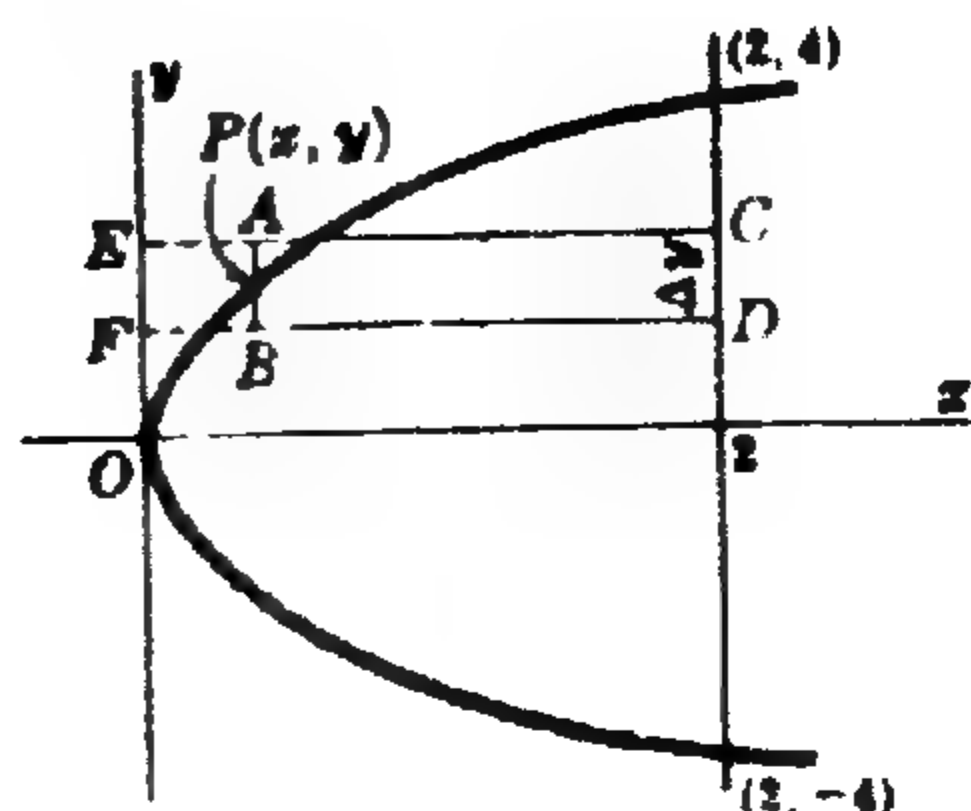
٣ - أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحددة بالقطع المكافئ  $y^2 = 8x$  والوتر البؤري العمودي ( $x = 2$ ) ، حول المحور الصادي .

بالإشارة إلى الشكل ٣ - ٣٥ . نقسم المساحة إلى شرائح أفقية . وعندما يدور المستطيل المقرب المبين في الشكل ٣ - ٣٥ حول المحور تننتج حلقة يساوي حجمها الفرق بين الحجمين الناتجين من دوران المستطيل  $EABF$  (بداية  $\Delta y$  ، 2) ودوران المستطيل  $EABF$  (بداية  $\Delta y$  ،  $x$ ) حول المحور الصادي أي أن هذا الحجم يساوي  $\pi(2)^2 \Delta y - \pi(x)^2 \Delta y$  والحجم المطلوب هو :

$$V = \int_0^4 4\pi dy - \int_0^4 \pi x^2 dy = 2\pi \int_0^4 (4 - x^2) dy = 2\pi \int_0^4 \left(4 - \frac{y^2}{8}\right) dy = \frac{128}{3} \pi \text{ cubic units}$$



شكل ٣٥ - ١



شكل ٣٥ - ٢

٤ - أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المقطعة من القطع المكافئ  $y = 4 - x^2$  حول المحور السيني  $y = 6$ .  
بالإشارة إلى الشكل ٣٥ - ٤. نقسم المساحة بشرائح رأسية. إن جسم الناتج من دوران المستطيل المقرب حول المستقيم  $y = 6$  هو حلقة حجمها  $\pi(6-y)^2 \Delta x$  والحجم المطلوب هو :

$$V = \pi \int_0^4 \{(6)^2 - (6-y)^2\} dx = \pi \int_0^4 (12y - y^2) dy$$

$$= \pi \int_0^4 (48x - 28x^2 + 8x^3 - x^4) dx = \frac{1408\pi}{15} \text{ cubic units}$$

٥ - بالإشارة إلى الشكل ٣٥ - ٥. لنفرض أن الحجم يتدور يتبع بالدوران حول المحور الصادي لقطعة السطح الواقعة في الربع الأول تحت المنحنى  $y = f(x)$  من  $x = a$  إلى  $x = b$ . لنقسم هذه المساحة إلى  $n$  شريحة ولنقرب كل شريحة إلى مستطيل ، فعندما تدور الشريحة المشاة حول المحور الصادي يفتح قشرة اسطوانية ارتفاعها  $\Delta x$  ونصف قطرها الداخلي  $r_{i-1}$  والخارجي  $r_i$  وحجمها :

$$\Delta V = \pi(r_i^2 - r_{i-1}^2) \Delta x \quad (i)$$

واستنادا إلى نظرية القيمة المتوسطة المشتقات يكون :

$$r_i^2 - r_{i-1}^2 = \frac{d}{dx}(x^2) \Big|_{x=x_k} (x_i - x_{i-1}) = 2x_k' \Delta x \quad (ii)$$

حيث  $x_{i-1} < x_k' < x_i$  وعلى هذا تأخذ لمعادلة (i) الشكل :

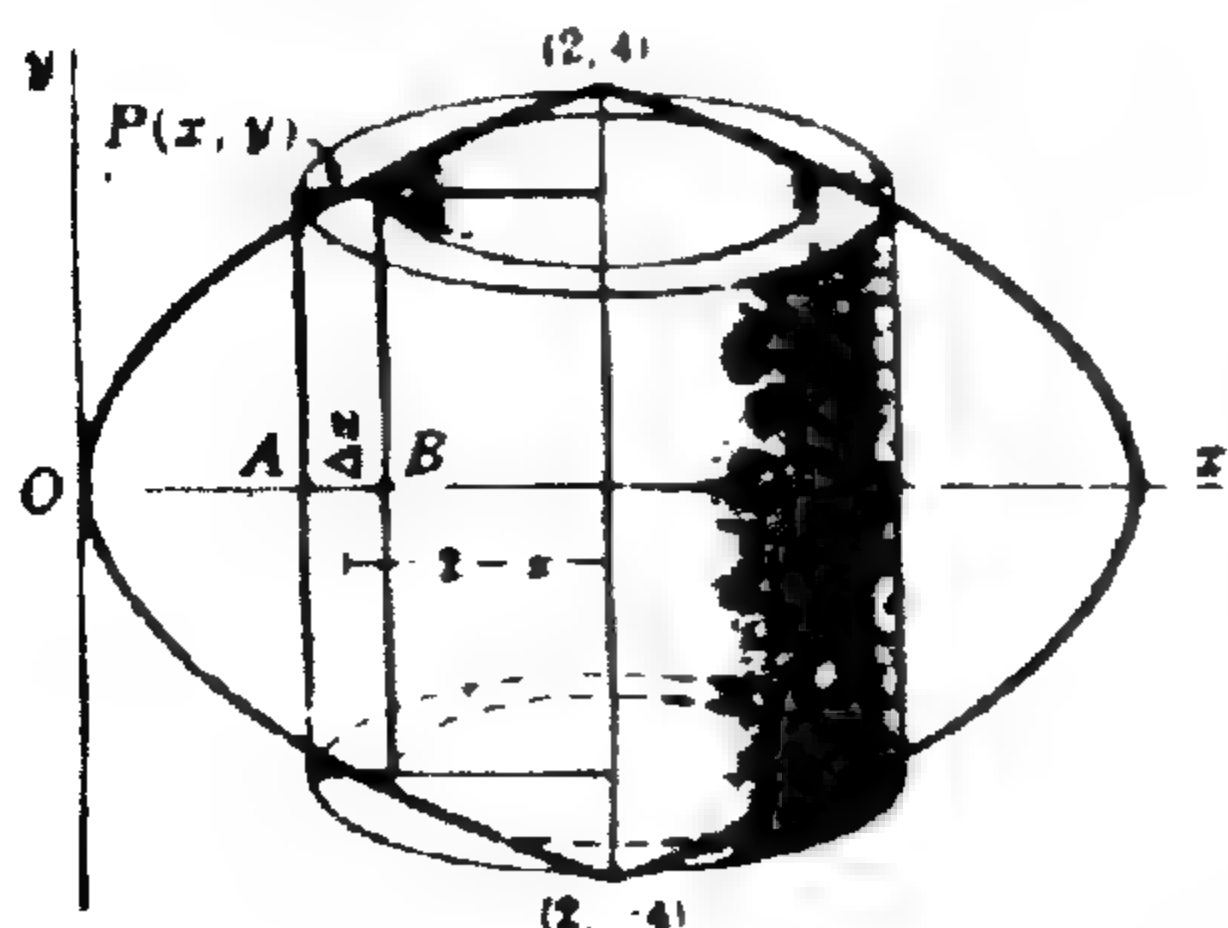
$$\Delta V = 2\pi x_k' y_i \Delta x = 2\pi x_k' f(x_i) \Delta x$$

وما استنادا إلى نظرية بليس يكون :

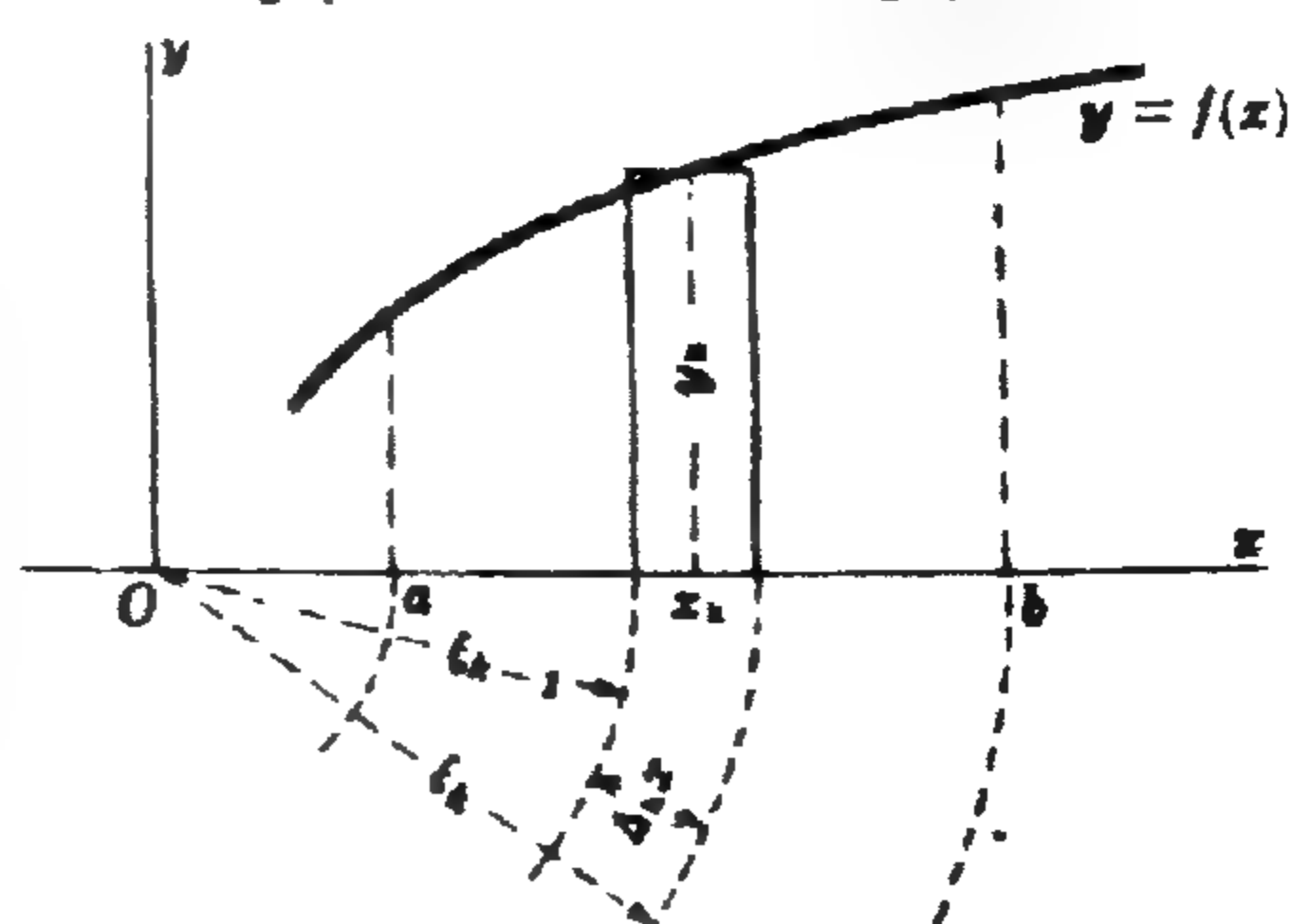
$$V = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_k' f(x_i) \Delta x = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

**ملاحظة :** لو أنت اخترنا النقط  $x_k$  في منتصفات الفترات الجزئية ، المستخدمة في الفصل السابق ، فإننا لا نحتاج إلى تطبيق نظرية بليس لأن  $x_k'$  المعرفة بـ (ii) تكون استنادا إلى المسألة ١٧ (ب) في الفصل ٢١ ، وهكذا يكون الحجم الناتج من دوران المستطيلات الـ  $n$  حول المحور الصادي هو

$$\sum_{i=1}^n 2\pi x_k f(x_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n 2\pi y(x_i) \Delta x \quad (i) \text{ من النقط (i) من الفصل ٢٢.}$$



شكل ٣٥ - ٦



شكل ٣٥ - ٥

٦ - أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ  $y^2 = 8x$  والمستقيم  $x = 2$  حول المستقيم  $x = 2$ .  
استخدم طريقة القشرة (أنظر المسألة ١).

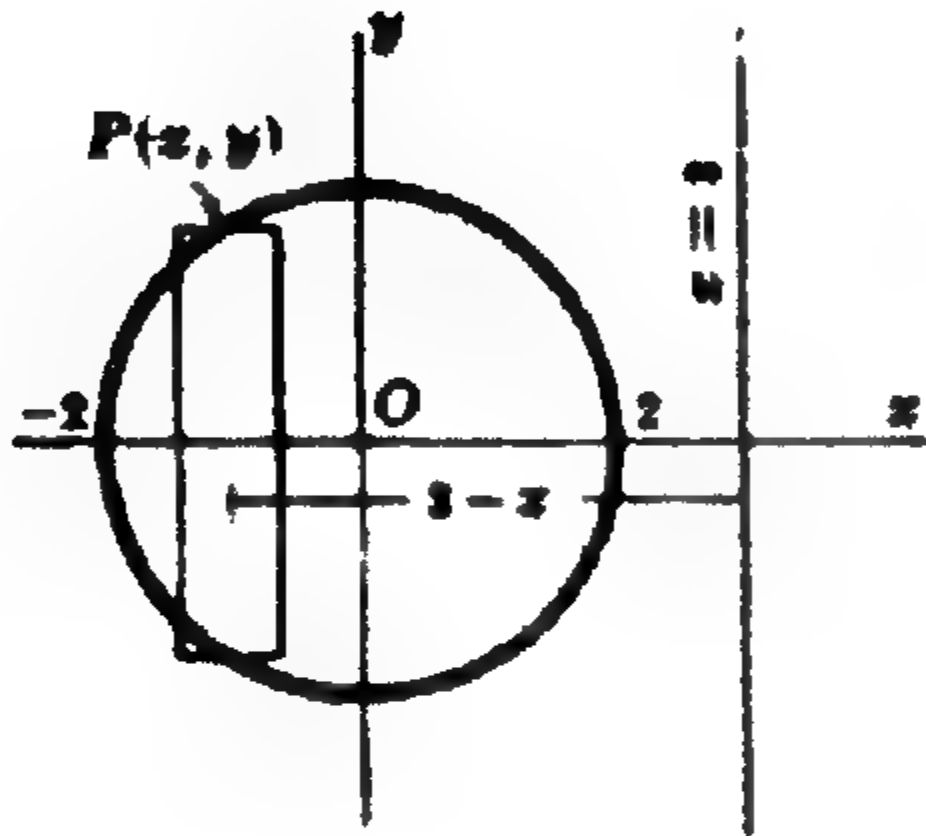
لنظر في الشكل ٣٥ - ١ ونقسم المساحة إلى شرائح رأسية وللسهولة نختار النقطة  $P$  بحيث تكون  $x$  لهذه النقطة في منتصف القطعة  $AB$ .

إن ارتفاع المستطيل المقرب المبين بالشكل ٣٥ - ١ يساوي  $2y = 4\sqrt{2x}$  وعرضه  $\Delta x$  ، وبمده المتوسط من الوتر البؤري يساوي  $2 - x$  . وعندما يدور المستطيل حول الوتر البؤري العمودي تنتج قشرة اسطوانية حجمها  $2\pi(2-x) \cdot 4\sqrt{2x} \Delta x$  . والحجم المطلوب هو :

$$V = 8\sqrt{2}\pi \int_0^2 (2-x)\sqrt{x} dx = 8\sqrt{2}\pi \int_0^2 (2x^{1/2} - x^{3/2}) dx = \frac{256\pi}{15} \text{ cubic units}$$

٧ - أوجد الحجم الناتج بدوران الدائرة  $x^2 + y^2 = 4$  حول المستقيم  $x = 3$ .

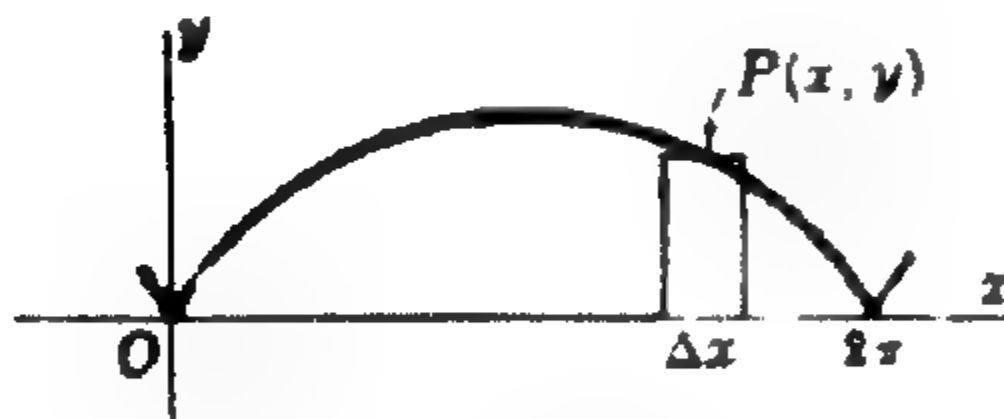
سنستخدم طريقة القشرة . نلاحظ أن ارتفاع المستطيل المقرب هو  $2y$  وسمكه  $\Delta x$  والبعد المتوسط عن محور الدوران يساوي  $3 - x$  ، والحجم المطلوب هو :



شكل ٣٥ - ٧

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-2}^2 2y(3-x) dx = 4\pi \int_{-2}^2 (3-x)\sqrt{4-x^2} dx \\ &= 12\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx - 4\pi \int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2} dx \\ &= \left[ 12\pi \left( \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} \right) + \frac{4\pi}{3} (4-x^2)^{3/2} \right]_{-2}^2 \\ &= 24\pi^2 \text{ cubic units} \end{aligned}$$

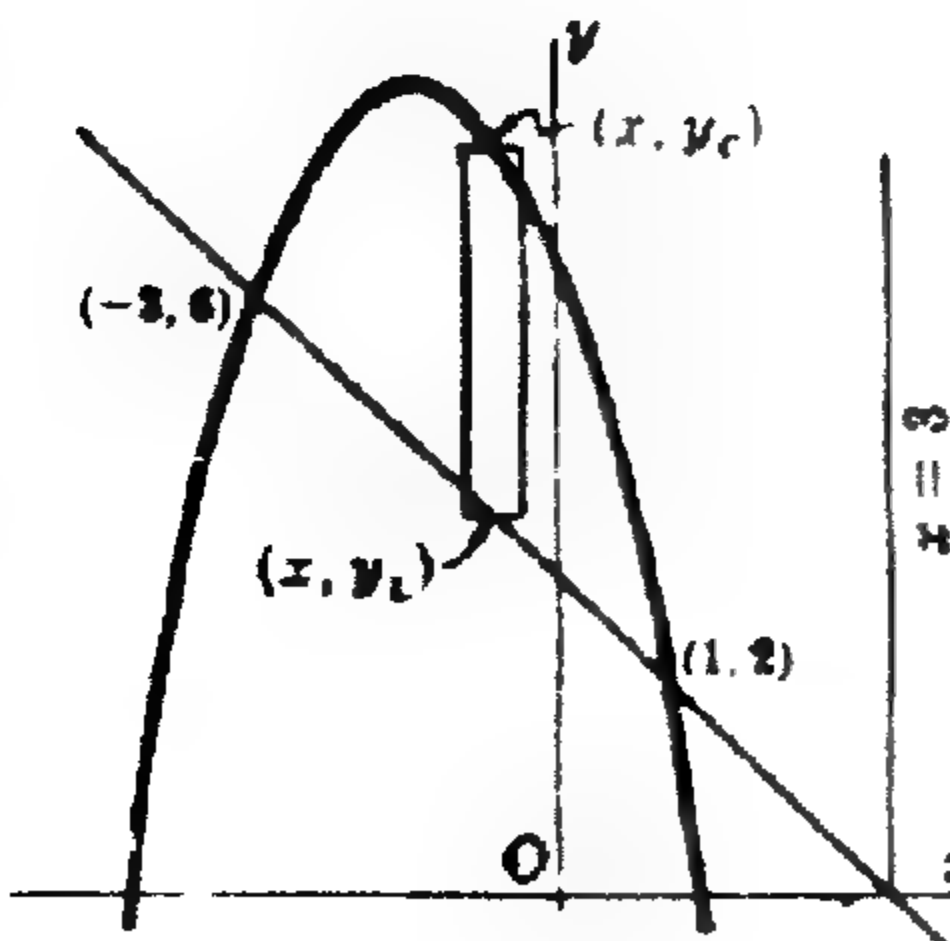
٨ - أوجد حجم الجسم الناتج عن الدوران حول المحور الصادي لقطعة السطح الواقعة بين المقدم الأول لـ  $\sin \theta$  والدويري (البيكلونيد)  $y = 1 - \cos \theta$  ، والمحور السيني .



شكل ٣٥ - ٨

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{2\pi} xy dx = 2\pi \int_0^{2\pi} (\theta - \sin \theta)(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (\theta - 2\theta \cos \theta + \theta \cos^2 \theta - \sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta + \sin \theta) d\theta \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{2}\theta^2 - 2\theta \sin \theta - \cos \theta + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\theta \sin 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \cos \theta + \sin^2 \theta + \frac{1}{2}\cos^2 \theta) \right]_0^{2\pi} = 6\pi^3 \text{ cu. un} \end{aligned}$$

٩ - أوجد الحجم الناتج عن دوران قطعة السطح الواقعة بين  $y = -x^2 - 3x + 6$  و  $x + y - 3 = 0$  حول  $x = 3$  (أ)  $y = 0$  (ب).



شكل ٣٥ - ٩

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-3}^1 (y_c - y_l)(3-x) dx \quad (1) \\ &= 2\pi \int_{-3}^1 (x^2 - x^2 - 9x + 9) dx = 256\pi/3 \text{ cubic units} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^1 \{(y_c)^2 - (y_l)^2\} dx \quad (ب) \\ &= \pi \int_{-3}^1 (x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x + 27) dx = 792\pi/15 \text{ cu. un} \end{aligned}$$

### مسائل إضافية

أوجد في المسائل ١٠ - ١٩ الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية المفروضة حول المستقيم المفروض مستخدما طريقة القرص (أ) (الأجوبة بالوحدات المكعبة) .

- ١٠ -  $y = 2x^2, y = 0, x = 0, x = 5$ ; حول المحور  $x$  ج:  $2500\pi$   
 ١١ -  $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$ ; حول المحور  $x$  ج:  $256\pi/3$   
 ١٢ -  $y = 4x^2, x = 0, y = 16$ ; حول المحور  $y$  ج:  $32\pi$   
 ١٣ -  $y = 4x^2, x = 1, y = 16, y = 16$ ; حول  $y = 16$  ج:  $4096\pi/15$   
 ١٤ -  $y^2 = x^3, y = 0, x = 2$ ; حول المحور  $x$  ج:  $4\pi$   
 ١٥ -  $y = x^3, y = 0, x = 2; x = 2$  حول  $x = 2$  ج:  $16\pi/5$   
 ١٦ -  $y^2 = x^2(1 - x^2)$ ; حول المحور  $x$  ج:  $4\pi/35$   
 ١٧ -  $4x^2 + 9y^2 = 36$ ; حول المحور  $x$  ج:  $16\pi$   
 ١٨ -  $4x^2 + 9y^2 = 36$ ; حول المحور  $y$  ج:  $24\pi$   
 ١٩ - داخل  $x = 9 - y^2$  بين  $x = 0$  و  $x - y - 7 = 0$  حول المحور  $y$  ج:  $963\pi/5$

أوجد في المسائل ٢٠ - ٢٦ الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية المفروضة حول المستقيم المفروض مستخدما طريقة القرص (ب) (الأجوبة بالوحدات المكعبة) .

- ٢٠ -  $y = 2x^2, y = 0, x = 0, x = 5$ ; حول المحور  $y$  ج:  $625\pi$   
 ٢١ -  $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$ ; حول المحور  $y$  ج:  $128\sqrt{3}\pi$   
 ٢٢ -  $y = 4x^2, x = 0, y = 16$ ; حول المحور  $x$  ج:  $2048\pi/5$   
 ٢٣ -  $y = x^3, x = 0, y = 8$ ; حول  $x = 2$  ج:  $144\pi/5$   
 ٢٤ -  $y = x^3, y = 4x - x^2$ ; حول المحور  $x$  ج:  $32\pi/3$   
 ٢٥ -  $y = x^3, y = 4x - x^2$ ; حول  $y = 6$  ج:  $64\pi/3$   
 ٢٦ -  $x = 9 - y^2, x - y - 7 = 0$ ; حول  $x = 4$  ج:  $153\pi/5$

أوجد في المسائل ٢٧ - ٣٢ الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية المفروضة حول المستقيم المفروض مستخدما طريقة القرص (أ) (الأجوبة بالوحدات المكعبة) .

- ٢٧ -  $y = 2x^2, y = 0, x = 0, x = 5$ ; حول المحور  $y$  ج:  $625\pi$   
 ٢٨ -  $y = 2x^2, y = 0, x = 0, x = 5$ ; حول  $x = 6$  ج:  $375\pi$   
 ٢٩ -  $y = x^3, y = 0, x = 2$ ; حول  $y = 8$  ج:  $320\pi/7$   
 ٣٠ -  $x = 9 - y^2, x - y - 7 = 0$ ; حول  $x = 0$  ج:  $64\pi/3$   
 ٣١ -  $x = 9 - y^2, x - y - 7 = 0$ ; حول  $y = 3$  ج:  $5\pi/6$   
 ٣٢ -  $x = 9 - y^2, x - y - 7 = 0$ ; حول  $x = 5$  ج:  $369\pi/2$

أوجد في المسائل ٣٣ - ٣٩ الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية المفروضة حول المستقيم المفروض مستخدما طريقة المناسبة (الأجوبة بالوحدات المكعبة) .

- ٣٣ -  $y = e^{-x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$ ; حول المحور  $y$  ج:  $\pi(1 - 1/e)$   
 ٣٤ -  $y = \sin 2x$  حول المحور  $x$  ج:  $\frac{1}{4}\pi^2$   
 ٣٥ - المقد الأول من  $y = e^x \sin x$  حول المحور  $x$  ج:  $\pi(e^{2\pi} - 1)/8$   
 ٣٦ - المقد الأول من  $y = e^x \sin x$  حول المحور  $y$  ج:  $\pi[(\pi - 1)e^\pi - 1]$   
 ٣٧ - المقد الأول من  $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$  حول المحور  $x$  ج:  $5\pi^2$   
 ٣٨ - المنحنى القلبي  $x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta - 1, y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta$  حول المحور  $x$  ج:  $64\pi/3$   
 ٣٩ -  $y = 2x^2, 2x - y + 4 = 0$  حول  $x = 2$  ج:  $27\pi$   
 ٤٠ - أوجد حجم المخروط الذي نصف قطر قاعدته السفلى  $R$  ونصف قطر قاعدته العليا  $r$  وارتفاعه  $h$  .

ج:  $\frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$  cubic units

# الفصل السادس والثلاثون

## حجوم الاجسام ذات المقاطع المعطومة

**حجم الجسم الدوراني :** الناتج عن الدوران حول المحور السيني لقطعة سطح مستوية محددة بالمنحنى  $y = f(x)$

والمحور السيني والمستقيمين  $x = a$  و  $x = b$  يعطى بـ  $\int_a^b \pi y^2 dx$

ويمكن تفسير دالة التكامل  $\pi y^2 = \pi \{f(x)\}^2$  على أنها مساحة مقطع

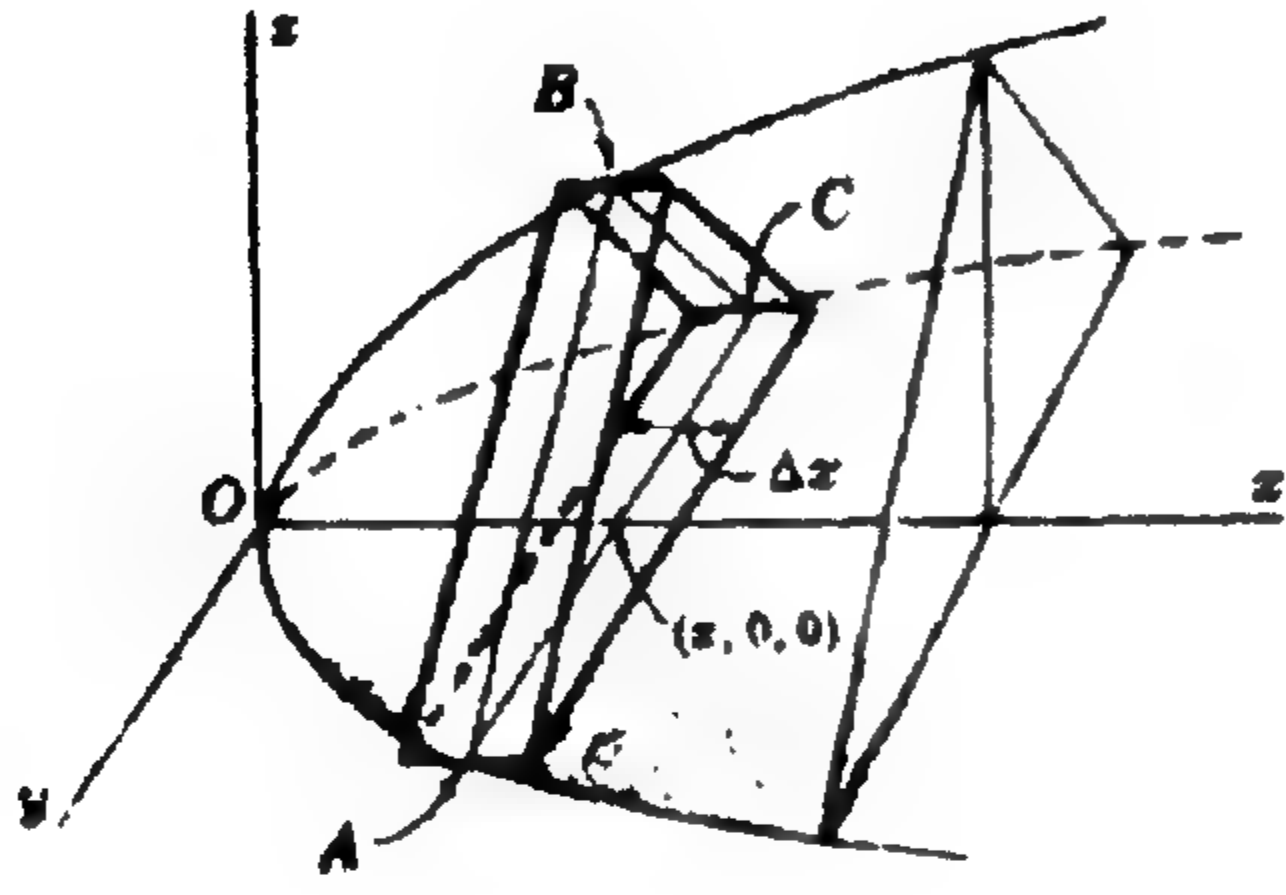
الجسم بمستوى عمودي على المحور السيني على بعد  $x$  من نقطة الأصل .

وبالعكس إذا كان من الممكن التعبير عن مساحة المقطع  $ABC$

للجسم بمستوى عمودي على المحور السيني واقع على بعد  $x$  من نقطة

الأصل على شكل دالة  $A(x)$  في  $x$  فإن حجم الجسم يعطى

$$V = \int_a^b A(x) dx$$



شكل ٣٦ - ١

## مسائل محلولة

١ - جسم قاعدته دائرية نصف قطرها 4 units . أوجد حجم هذا

الجسم إذا كان مقطع الجسم بمستوى عمودي على قطر ثابت هو مثلث متساوي الأضلاع .

اعتبر الدائرة الموضحة في الشكل ٣٦-٢ ولنفرض أن المحور

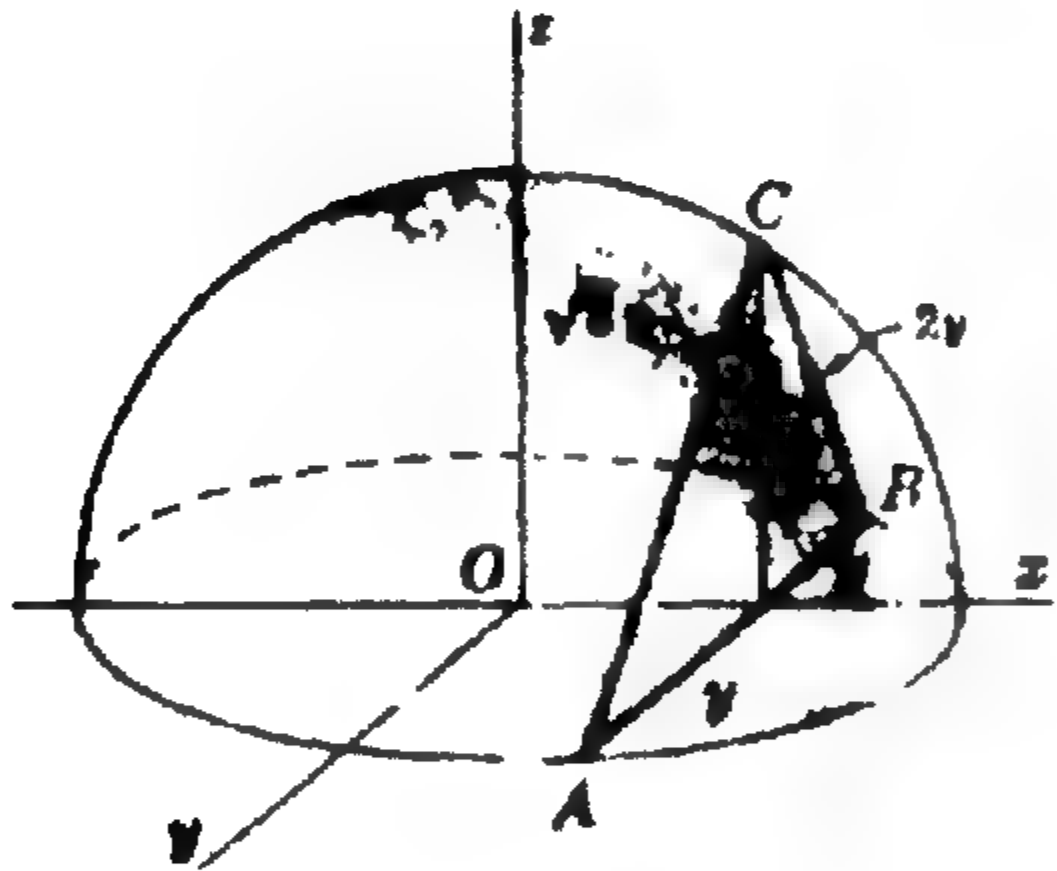
السيني هو القطر الثابت . إذن معادلة الدائرة هي ،  $x^2 + y^2 = 16$  .

والمقطع  $ABC$  هو مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه  $2y$  ومساحته

$A(x) = \sqrt{3} y^2 = \sqrt{3} (16 - x^2)$  . والحجم المطلوب هو :

$$V = \int_{-4}^4 A(x) dx = \sqrt{3} \int_{-4}^4 (16 - x^2) dx$$

$$= \sqrt{3} \left[ 16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^4 = \frac{256}{3} \sqrt{3} \text{ cubic units}$$



شكل ٣٦ - ٢

٢ - قاعدة جسم على شكل قطع ناقص طول محوره الأكبر 10 وطول

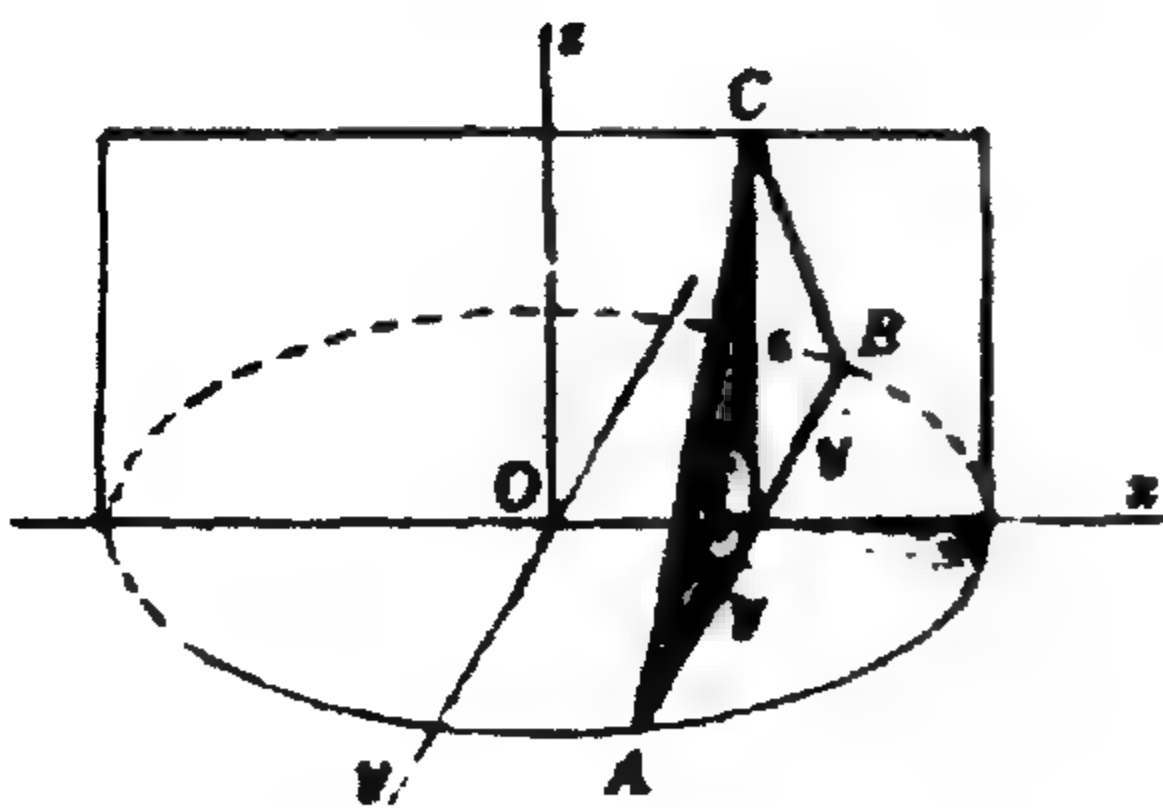
محوره الأصغر 8 . أوجد حجم هذا الجسم إذا كان كل مقطع عمودي

له مع المحور الأكبر هو مثلث متساوي الساقين وارتفاعه 6 .

اعتبر القطع الناقص المبين في الشكل ٣٦-٣ والذي معادلته

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  . إن المقطع  $ABC$  مثلث متساوي الساقين

قاعدته  $2y$  وارتفاعه 6 ومساحته  $A(x) = 6y = 6 \cdot \frac{4}{5} \sqrt{25 - x^2}$  . والحجم المطلوب هو :



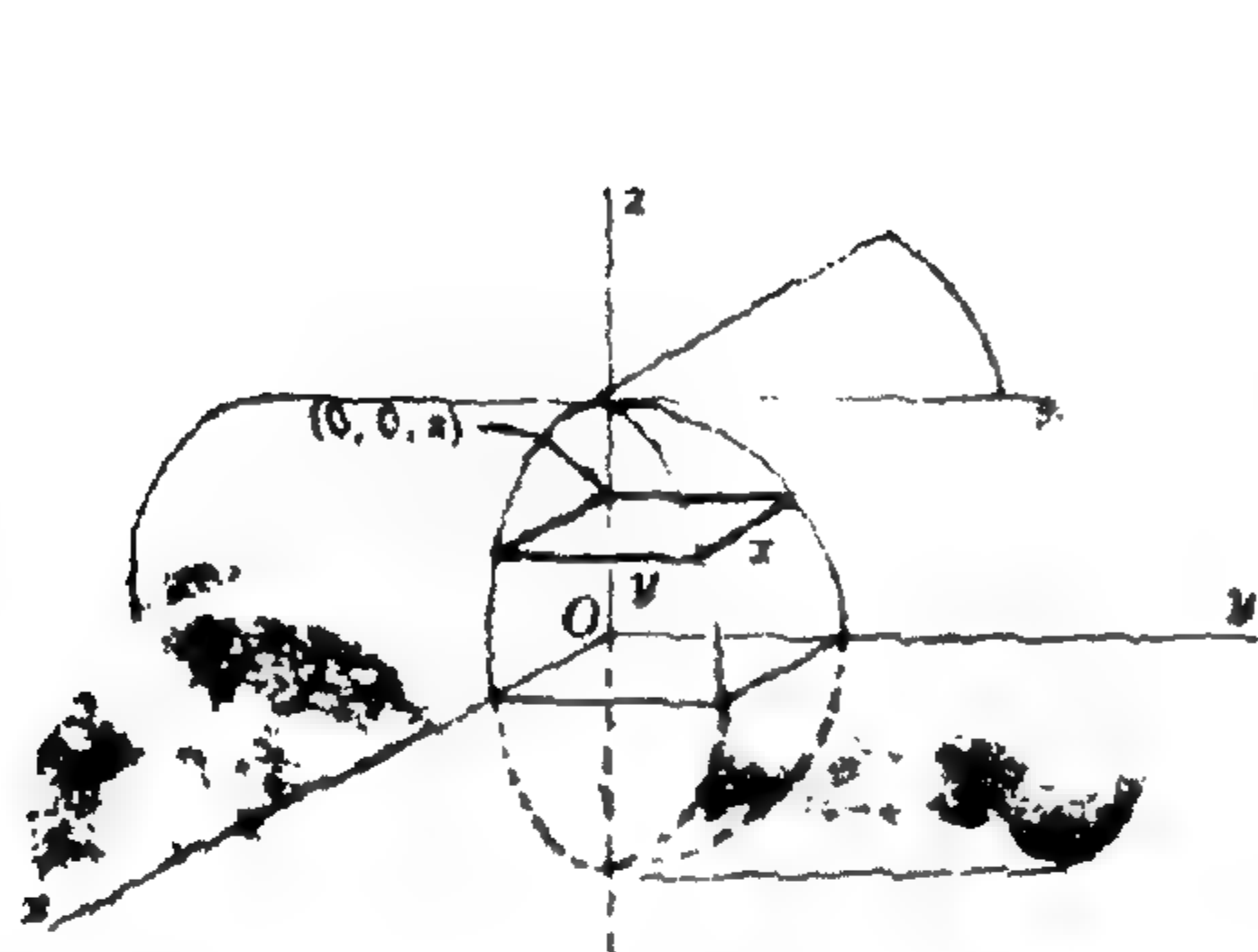
شكل ٣٦ - ٣

$$V = \frac{24}{5} \int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx = 60\pi \text{ cubic units}$$

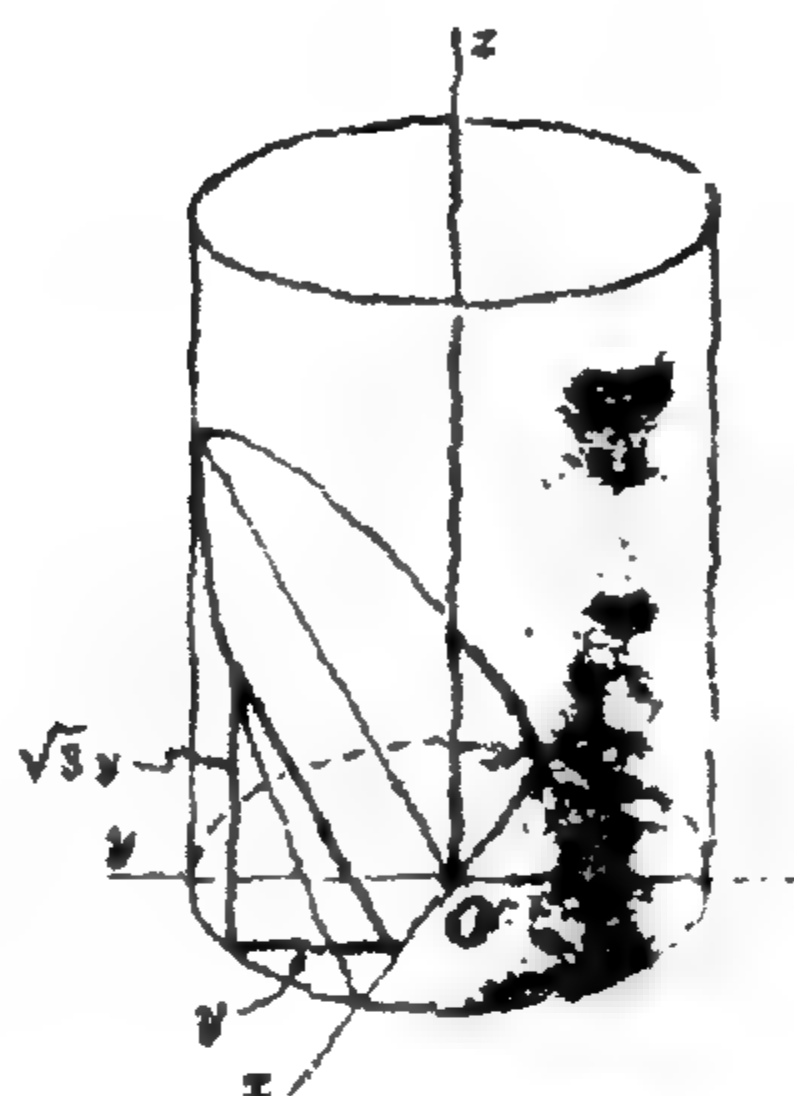


٣ - أوجد حجم القطعة المقطوعة من الجسم المكافئ الدوراني  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = z$  بالمستوى  $z = 10$  بالإشارة إلى الشكل ٣٦ - ٤. نجد أن مقطع الجسم بمستوى مواز للمستوى  $xOy$  على بعد  $z$  من نقطة الأصل هو قطع ناقص مساحته  $\pi xy = \pi(4\sqrt{z})(5\sqrt{z}) = 20\pi z$ ، وبالتالي فإن

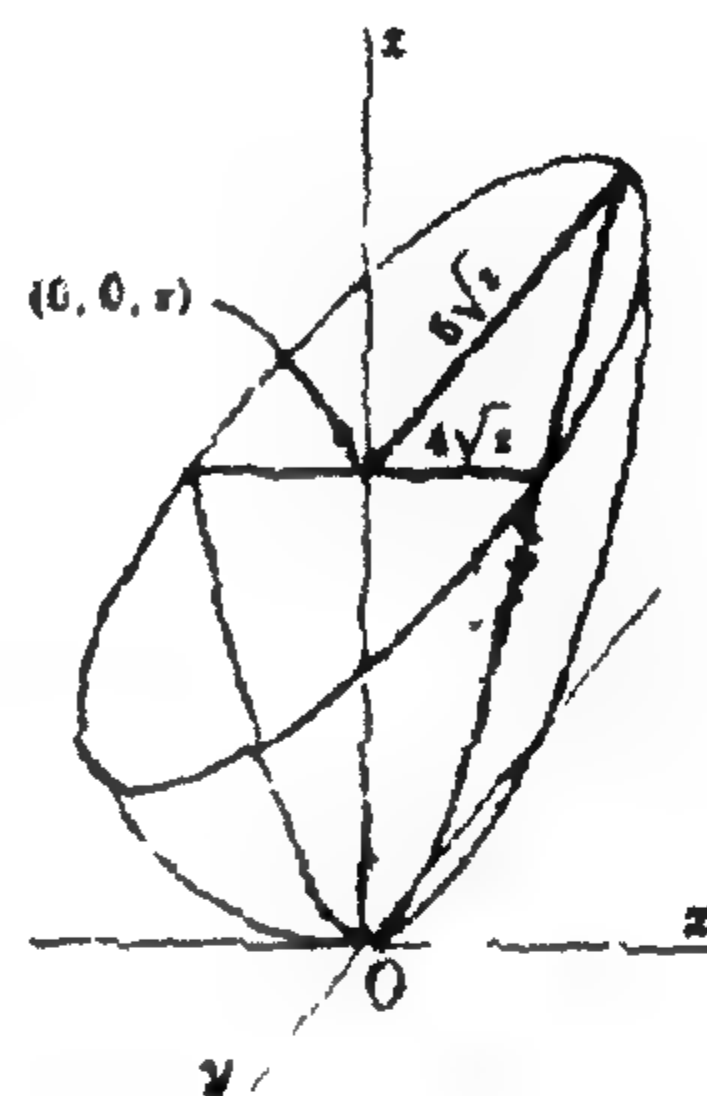
$$V = 20\pi \int_0^{10} z dz = 1000\pi \text{ cubic units}$$



شكل ٣٦ - ٦



شكل ٣٦ - ٥



شكل ٣٦ - ٤

٤ - أحدث مقطعين في قطعة خشبية دائرية نصف قطرها 8 cm، أحد المقطعين عمودي على محور القطعة والآخر يميل على الأول بزاوية  $60^\circ$ . فإذا تقابل المقطعان على مستقيم يمر بالمركز. فأوجد حجم قطعة الخشب المنقطعة. بالإشارة إلى الشكل ٣٦ - ٥. تأخذ نقطة الأصل في مركز القطعة الخشبية والمحور السيني على الخط المشترك للمقطعين. ولتأخذ الجانب الموجب للمحور لصادي على وجه المقطع الأول. إن شكل المقطع المتولد بالمستوى العمودي على المحور السيني هو مثلث قائم إحدى زواياه  $60^\circ$ ، وطول الضلع المجاور لهذه الزاوية  $y$  وطول الضلع الآخر  $y\sqrt{3}$ ، ومساحة المقطع إذن هي  $\frac{1}{2}\sqrt{3}(64 - x^2)$ ، وبالتالي فإن

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{3} \int_{-8}^8 (64 - x^2) dx = \frac{1024}{3}\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

٥ - يتقاطع محوراً أسطوانتين دائريتين نصف قطريهما متساويان  $r$ ، بزاوية قائمة. أوجد حجم المشترك بين الاسطوانتين. أنظر إلى الشكل ٣٦ - ٦. ولنفرض أن معادلتى الاسطوانتين هما  $x^2 + z^2 = r^2$  و  $y^2 + z^2 = r^2$ . شكل مقطع الحجم المطلوب بمستوى عمودي على المحور  $z$  هو مربع طول ضلعه  $2\sqrt{r^2 - z^2}$  ومساحته  $4(r^2 - z^2)$ ، وبالتالي فإن

$$V = 4 \int_{-r}^r (r^2 - z^2) dz = \frac{16r^3}{3} \text{ cubic units}$$

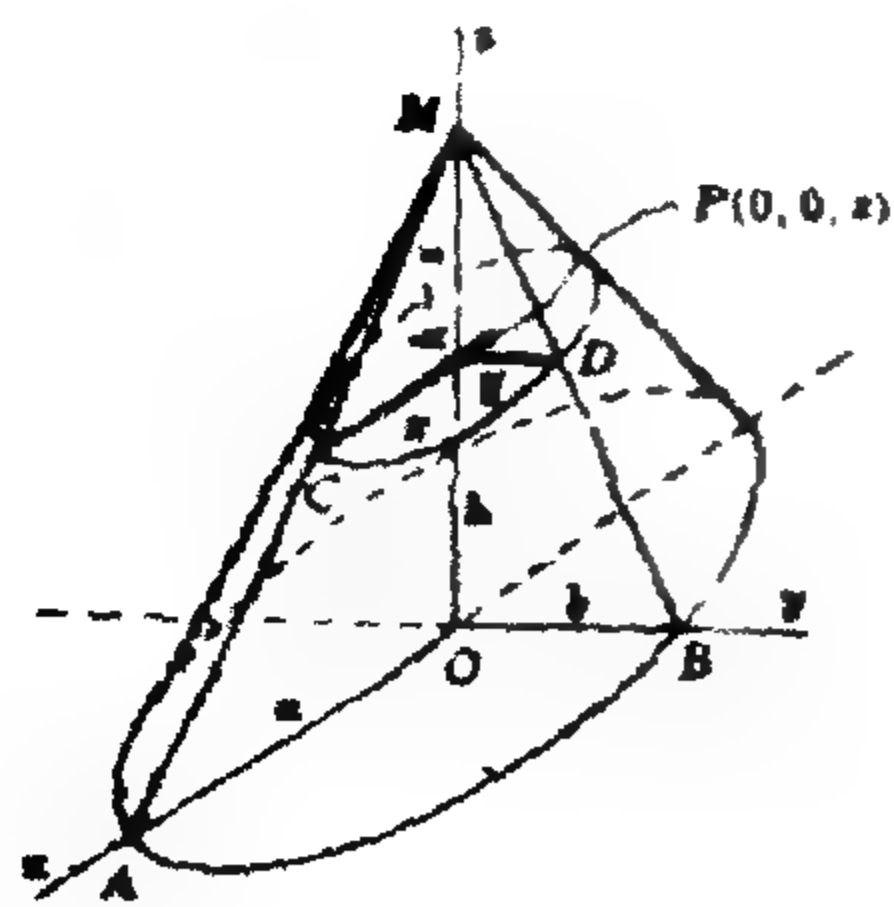
٦ - أوجد حجم المخروط القائم الذي ارتفاعه  $h$  وقاعدته قطع ناقص طول محوره الأكبر  $2a$  وطول محوره الأصغر  $2b$ .

(أنظر إلى الشكل ٣٦ - ٧). إن شكل مقطع المخروط بمستوى مواز لقاعدته هو قطع ناقص طول محوره الأكبر  $2x$  وطول المحور الأصغر  $2y$  ومن المثلثات المتشابهة في الشكل المرافق ٣٦ - ٧ نجد أن:

$$\frac{y}{b} = \frac{h-z}{h} \quad \text{أو} \quad \frac{PD}{OB} = \frac{PM}{OM} \quad \text{كذلك} \quad \frac{x}{a} = \frac{h-z}{h} \quad \text{أو} \quad \frac{PC}{OA} = \frac{PM}{OM}$$

ومساحة المقطع تساوي  $\pi xy = \frac{\pi ab(h-z)^2}{h^2}$ ، وبالتالي فإن:

$$V = \frac{\pi ab}{h^2} \int_0^h (h-z)^2 dz = \frac{1}{3}\pi abh \text{ cubic units}$$



شكل ٣٦ - ٧

### مسائل اضافية

٧ - جسم قاعدته دائرية الشكل نصف قطرها 4 units وحدات . أوجد حجم هذا الجسم إذا علمت أن شكل كل مقطع للجسم عمودى على قطر ثابت ( المحور  $x$  في شكل المسألة ١ ) هو ( أ ) نصف دائرة (ب) مربع ( ج ) مثلث قائم متساوى الساقين يقع وتره في مستوى القاعدة .

ج : ( أ )  $128\pi/3$  ، (ب)  $1024/3$  ، ( ج )  $256/3$  cubic units

٨ - جسم قاعدته على شكل قطع ناقص طول محوره الأكبر 10 ومحوره الأصغر 8 . أوجد حجم هذا الجسم إذا علمت أن شكل كل مقطع للجسم عمودى على المحور الأكبر هو مثلث قائم متساوى الساقين يقع أحد ساقيه في مستوى القاعدة .

ج :  $640/3$  cubic units

٩ - جسم قاعدته القطعة الواقعة بين القطع المكافئ  $y^2 = 12x$  والمستقيم  $x = 3$  وشكل كل مقطع للجسم عمودى على محور القطع  $z$  مربع . أوجد حجمه .

ج :  $216$  cubic units

١٠ - تقع قاعدة جسم في الربع الأول بين المستقيم  $4x + 5y = 20$  والمحورين الإحداثيين . أوجد حجمه إذا علمت أن شكل كل مقطع له عمودى على المحور  $x$  هو نصف دائرة .

ج :  $10\pi/3$  cubic units

١١ - جسم قاعدته على شكل دائرة  $x^2 + y^2 = 16x$  . وشكل كل مقطع له عمودى على المحور مستطيل ارتفاعه ضمناً بعد المستوى القاطع عن نقطة الأصل . أوجد حجمه

ج :  $1024\pi$  cubic units

١٢ - جسم على شكل بوق يتولد من حركة دائرة يستند طرفاً أحد أقطارها الواقع في الربع الأول على القطعين المكافئين  $64 = 8x + y^2$  و  $64 = 16x + y^2$  بحيث تبقى موازية للمستوى  $xz$  . أوجد حجم الجسم .

ج :  $256\pi/15$  cubic units

١٣ - رأس مخروط في النقطة  $(a, 0, 0)$  وقاعدته الدائرة  $y^2 + z^2 - 2ay = 0, x = 0$  . أوجد حجمه .

ج :  $\frac{1}{3}\pi ab^2$  cubic units

١٤ - أوجد حجم الجسم الواقع بين الجسم المكافئ الدوراني  $x = y^2 + 4z^2$  والمستوى  $x = 4$  .

ج :  $4\pi$  cubic units

١٥ - برميل على شكل مجسم قطع ناقص دوراني قطعت منه قسمتان متساويتان من الطرفين . أوجد حجمه إذا علمت أن ارتفاعه 1.5 m وأن نصف قطر مقطعه الأوسط 0.75 m وأن نصف قطر نهايته 0.5 m .

ج :  $11\pi/16m^3$

١٦ - مقطع جسم بمستوى عمودى على المحور  $x$  هو دائرة يستند طرفاً أحد أقطارها على القطعين المكافئين  $9x = y^2$  و  $9y = x^2$  . أوجد حجمه .

ج :  $6561\pi/280$  cubic units

١٧ - مقطع جسم بمستوى عمودى على المحور  $x$  هو مربع يستند طرفاً أحد قطريه على القطعين المكافئين  $4x = y^2$  و  $4y = x^2$  . أوجد حجمه .

ج :  $144/35$  cubic units

١٨ - حفر ثقب دائري نصف قطره 1 cm في كرة نصف قطرها 3 cm بحيث يتطبق محور الثقب على أحد أقطار الكرة . أوجد حجم الجزء المتبقى من الكرة .

ج :  $64\pi\sqrt{2}/3$  cm<sup>3</sup>

## الفصل السابع والثلاثون

### المراكز المتوسطة للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة

**كتلة جسم فيزيائي :** هي قياس لكمية المادة في الجسم ، بينما حجم الجسم هو قياس للفراغ الذي يشغله . إذا كانت كتلة وحدة الحجم من جسم هي نفسها في كل موضع منه فإننا نقول عن الجسم إنه متجانس أو أن كثافته ثابتة .

وأنه من المرغوب فيه جداً في الفيزياء والميكانيكا أن نعتبر كتلة معينة متمركزة في نقطة ، نسبها مركز الكتلة (مركز ثقل الجسم) . وإذا كان الجسم متجانساً فإن هذه النقطة تنطبق على مركزه الهندسي أو مركزه المتوسط . فمركز الكتلة لكرة مطاطية متجانسة مثلاً ينطبق على المركز المتوسط (المركز) للكرة باعتبارها كرة هندسية صلبة .

المركز المتوسط نصفية مستطيلة الشكل من الورق يقع في منتصف المسافة بين وجهيهما ولكن يمكن أن نعتبره على أحد الوجهين عند نقطة تقاطع القطرين . ومركز الكتلة لنصفية رقيقة يمكن اعتباره منطبقاً على مركزها المتوسط باعتبارها صفيحة مستوية .

سنقصر الدراسة في هذا الفصل والفصل الذي يليه على السطوح المستوية وعلى الأجسام الدورانية . أما دراسة الأجسام الأخرى وأقواس المنحنيات (قطع أسلاك متجانسة رقيقة) والكتل غير المتجانسة فتؤجل إلى فصول أخرى .

**العزم ( الأول )  $M_L$  لسطح مستو** بالنسبة لمستقيم ما هو حاصل ضرب مساحته في البعد الموجه لمركزه المتوسط عن المستقيم . وعزم سطح مركب بالنسبة لمستقيم هو مجموع عزوم السطوح المكونة له بالنسبة لنفس المستقيم .

ويمكن الحصول على سطح مستو بالنسبة للمحاور الاحداثية كما يلي :

١ - نرين برسم تقريبي المساحة وشريطاً مثلاً ونبين المستطيل المقرب .

٢ - نشكل حاصل ضرب مساحة المستطيل في بعد مركزه المتوسط عن المحور ونشكل المجموع بالنسبة لجميع المستطيلات .

٣ - نفرض أن عدد المستطيلات يؤول إلى مالا نهاية نطبق النظرية الأساسية ، وإذا كان المركز المتوسط لسطح مستو ( $x$  و  $y$ ) وكانت مساحته  $A$  وعزماء بالنسبة للمحورين  $x$  و  $y$  هما  $M_x$  و  $M_y$  فإن :

$$A\bar{y} = M_x \quad \text{و} \quad A\bar{x} = M_y$$

انظر المسائل ١ - ٨

**العزم ( الأول ) لجسم صلب حجم  $V$**  ينتج عن دوران سطح مستو حول محور إحداثي ، بالنسبة لمستوى مار بنقطة الأصل وعمودي على المحور ، فإنه يمكن حسابه كما يلي :

١ - نرين برسم تقريبي السطح وشريطاً مثلاً والمستطيل المقرب .

٢ - شكل حاصل ضرب الحجم ، القرص أو القشرة ، الناتج عن دوران المستطيل حول محور الدوران في بعد المركز المتوسط للمستطيل عن المستوى ثم شكل المجموع بالنسبة لجميع المستطيلات .

٣ - بفرض أن عدد المستطيلات يؤول إلى مالا نهاية تطبق النظرية الأساسية عندما يدور الجسم حول المحور  $x$  فإن مركزه المتوسط ( $\bar{x}$  و  $\bar{y}$ ) يقع على المحور . وإذا كان  $M_{yz}$  عزم الجسم بالنسبة لمستوى مار بنقطة الأصل وعمودى على المحور فإن :

$$V\bar{x} = M_{yz}, \quad \bar{y} = 0$$

وبشكل مماثل عندما يدور الجسم حول المحور  $y$  فإن مركزه المتوسط ( $x$  و  $y$ ) يقع على المحور . وإذا كان  $M_{xz}$  عزم الجسم بالنسبة لمستوى مار بنقطة الأصل وعمودى على المحور  $x$  فإن :

$$V\bar{y} = M_{xz}, \quad \bar{x} = 0$$

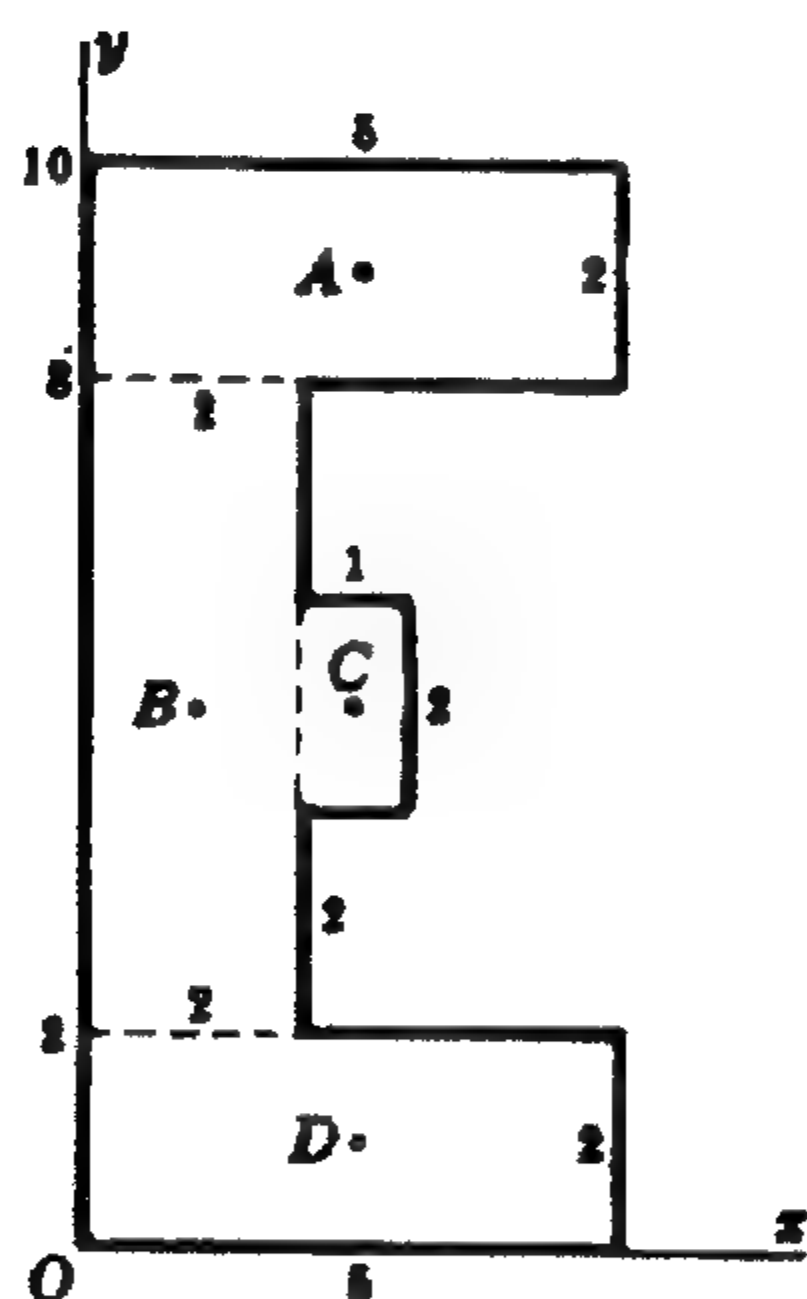
انظر المسائل ٩ - ١٢

**نظرية باغوس الأول :** إذا دار سطح مستو حول محور في مستواه وغير قاطع له فإن حجم الجسم الناتج يساوى حاصل ضرب مساحة السطح في طول المسار الذى يرسمه مركزه المتوسط .

انظر المسائل ١٢ - ١٥

### مسائل محلولة

١ - المساحة المستوية المبينة أوجد (أ) العزم بالنسبة للمحورين الاحداثيين (ب) احداثى المركز المتوسط ( $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ )



شكل ٣٧ - ١

(أ) إن مساحة المستطيل العلوى  $10 \text{ units} = 5 \times 2$  . ومركزه المتوسط هو  $A(2, 5, 9)$  .

وبمثل فإن مساحات المستطيلات الأخرى ومراكزها المتوسطة هي :  $12 \text{ units}$  و  $B(1, 5)$  ،  $2 \text{ units}$  و  $C(2, 5, 5)$  و  $10 \text{ units}$  و  $D(2, 5, 1)$

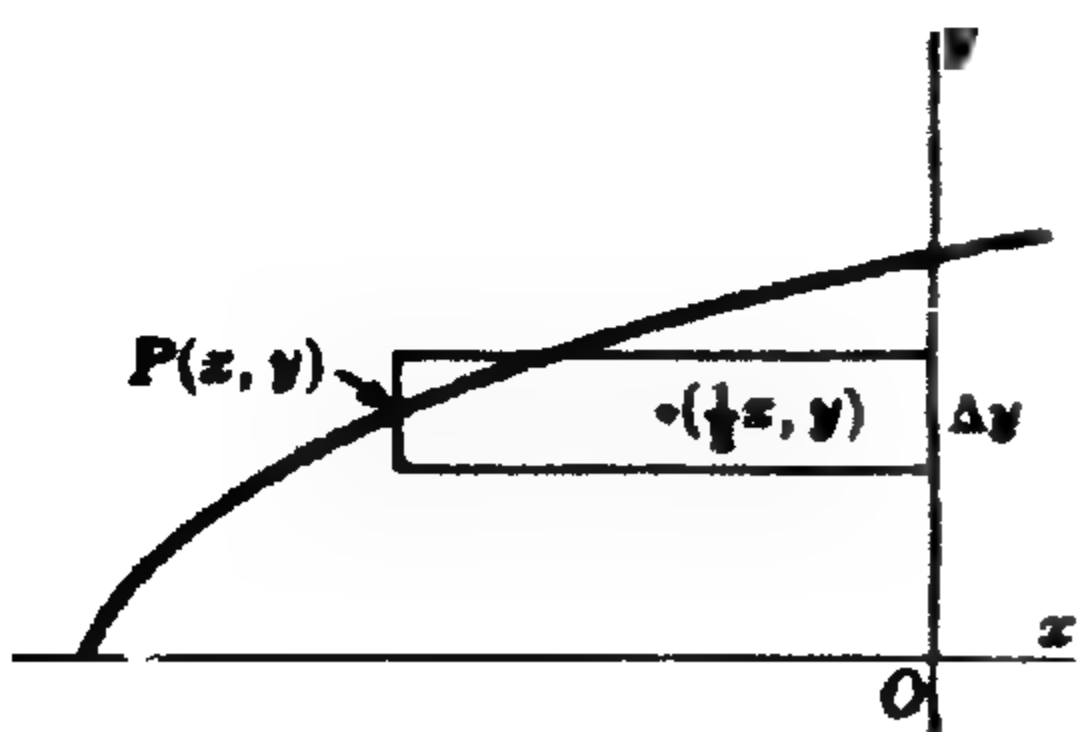
إذ عزم المستطيلات بالنسبة للمحور  $x$  هي  $10(9)$ ,  $12(5)$ ,  $2(5)$ ,  $10(1)$  وبالتالى فإن عزم المساحة المستوية المبينة بالشكل بالنسبة للمحور  $y$  هو :

$$M_x = 10(9) + 12(5) + 2(5) + 10(1) = 170$$

وبالمثل نجد أن عزم المساحة المبينة بالشكل بالنسبة للمحور  $x$  هو :

$$M_y = 10(2.5) + 12(1) + 2(2.5) + 10(2.5) = 67$$

(ب) إن مساحة القطعة الموضحة بالشكل هي  $A = 10 + 12 + 2 + 10 = 34$  وحيث أن  $A\bar{x} = M_y$  فإن  $34\bar{x} = 67$  وبالتالى  $\bar{x} = 67/34$  وبما أن  $A\bar{y} = M_x$  فإن  $34\bar{y} = 170$  وبالتالى  $\bar{y} = 5$  والنقطة ( $67/34, 5$ ) هي المركز المتوسط .



شكل ٣٧ - ٢

٢ - أوجد العزمين حول المحورين الاحداثيين لسطح مستو محدد بالمنحنى  $y = 9 - x^2$  وواقع في الربع الثانى .

باستخدام المستطيل المقرب المبين بالشكل . والذى مساحته  $x \cdot \Delta y$  ومركزه المتوسط  $(\frac{1}{2}x, y)$  وعزمه بالنسبة للمحور  $x$  هو  $y(-x\Delta y)$  إذن

$$M_x = -\int_0^3 y \cdot x \, dy = -\int_0^3 y(y^2 - 9) \, dy = \frac{81}{4}$$

و بالمثل فإن عزم المستطيل المقرب بالنسبة للمحور  $y$  هو  $(\frac{1}{2}x(-x \Delta y))$  إذن :

$$M_y = -\frac{1}{2} \int_0^3 x^2 dy = -\frac{1}{2} \int_0^3 (y^2 - 9)^2 dy = -\frac{324}{5}$$

٣ - عين المركز المتوسط لسطح مستوي في الربع الأول ومحدد بالنقط المكافئ.

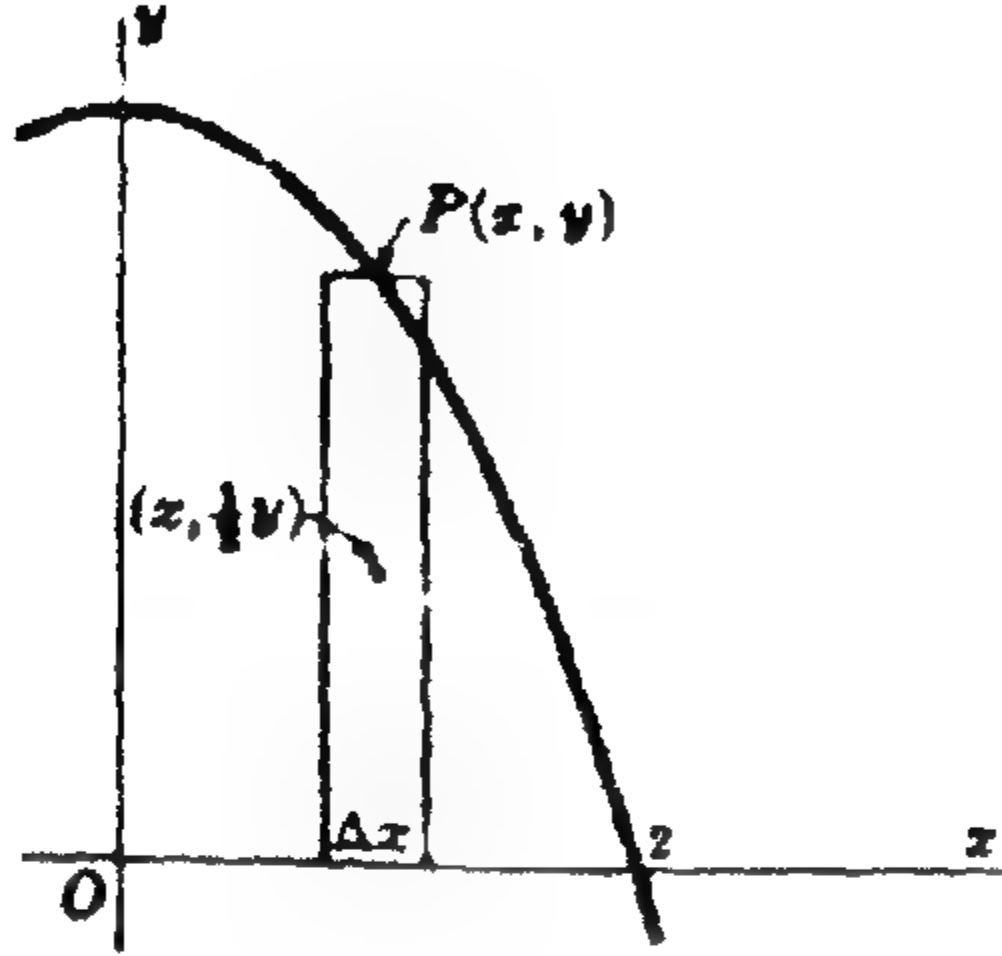
$$y = 4 - x^2$$

إن المركز المتوسط للمستطيل المقرب هو  $(x, \frac{1}{2}y)$  وإن :

$$A = \int_0^1 y dx = \int_0^1 (4 - x^2) dx = 16/3$$

$$M_x = \int_0^1 \frac{1}{2} y \cdot y dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (4 - x^2)^2 dx = 128/15$$

$$M_y = \int_0^1 x \cdot y dx = \int_0^1 x(4 - x^2) dx = 4$$



شكل ٢٧ - ٣

إذن  $\bar{x} = M_y/A = 3/4$ ,  $\bar{y} = M_x/A = 8/5$ , واحداثي المركز المتوسط هما

$$(3/4, 8/5)$$

٤ - عين المركز المتوسط لسطح في الربع الأول ومحدد بالقطع المكافئ  $y = x^2$

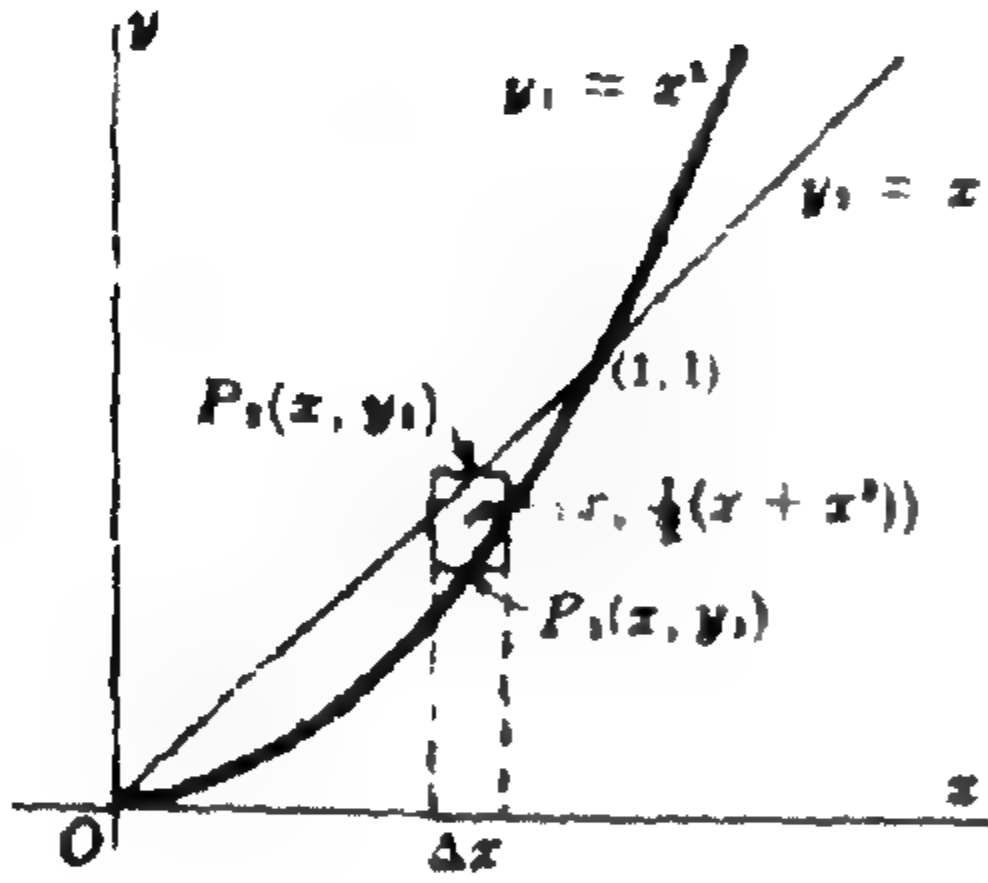
والمستقيم  $y = x$

إن المركز المتوسط للمستطيل المقرب هو  $[x, \frac{1}{2}(x + x^2)]$  وإن :

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = 1/6$$

$$M_x = \int_0^1 \frac{1}{2}(x + x^2)(x - x^2) dx = 1/15$$

$$M_y = \int_0^1 x(x - x^2) dx = 1/12$$



شكل ٢٧ - ٤

إذن  $\bar{x} = M_y/A = 1/2$ ,  $\bar{y} = M_x/A = 2/5$ , واحداثي المركز المتوسط هما

$$(1/2, 2/5)$$

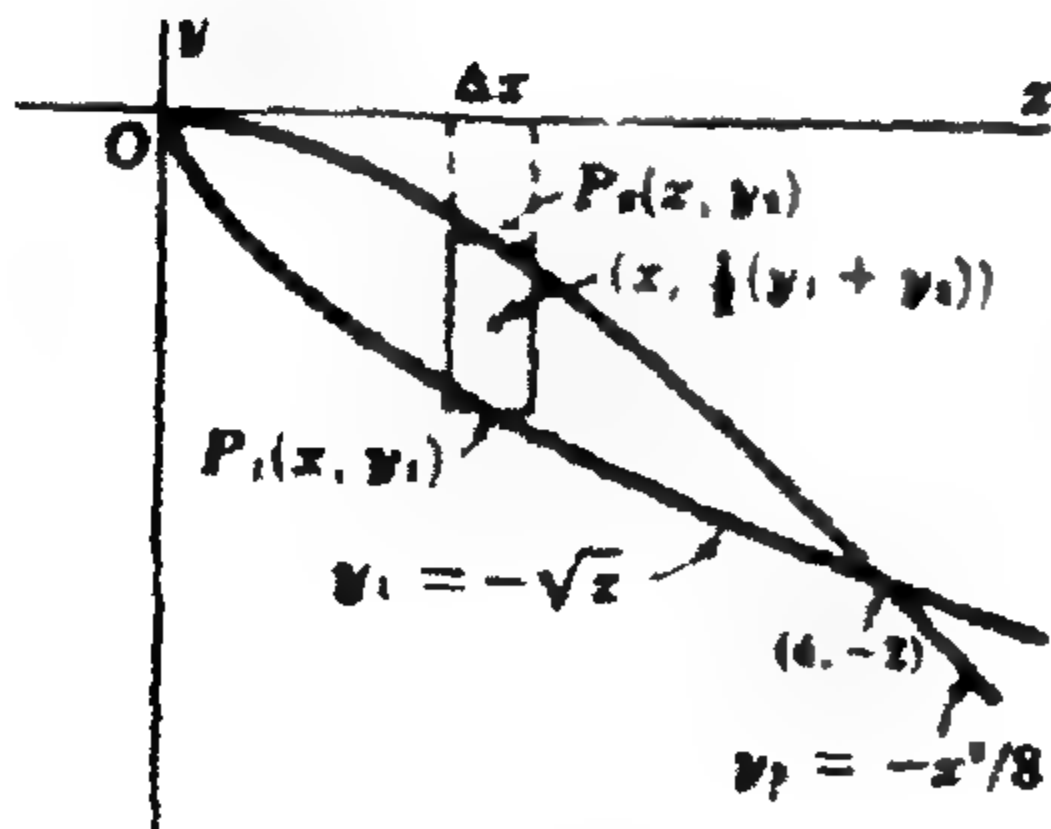
٥ - عين المركز المتوسط لسطح المحدب بالقطين المكافئين  $x = y^2$  و  $x^2 = -8y$

إن المركز المتوسط للمستطيل المقرب هو  $[x, \frac{1}{2}(-x^2/8 - \sqrt{x})]$

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right) dx = \frac{8}{3}$$

$$M_x = \int_0^4 \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{8} - \sqrt{x}\right) \left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right) dx = -\frac{12}{5}$$

$$M_y = \int_0^4 x \left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right) dx = \frac{24}{5}$$



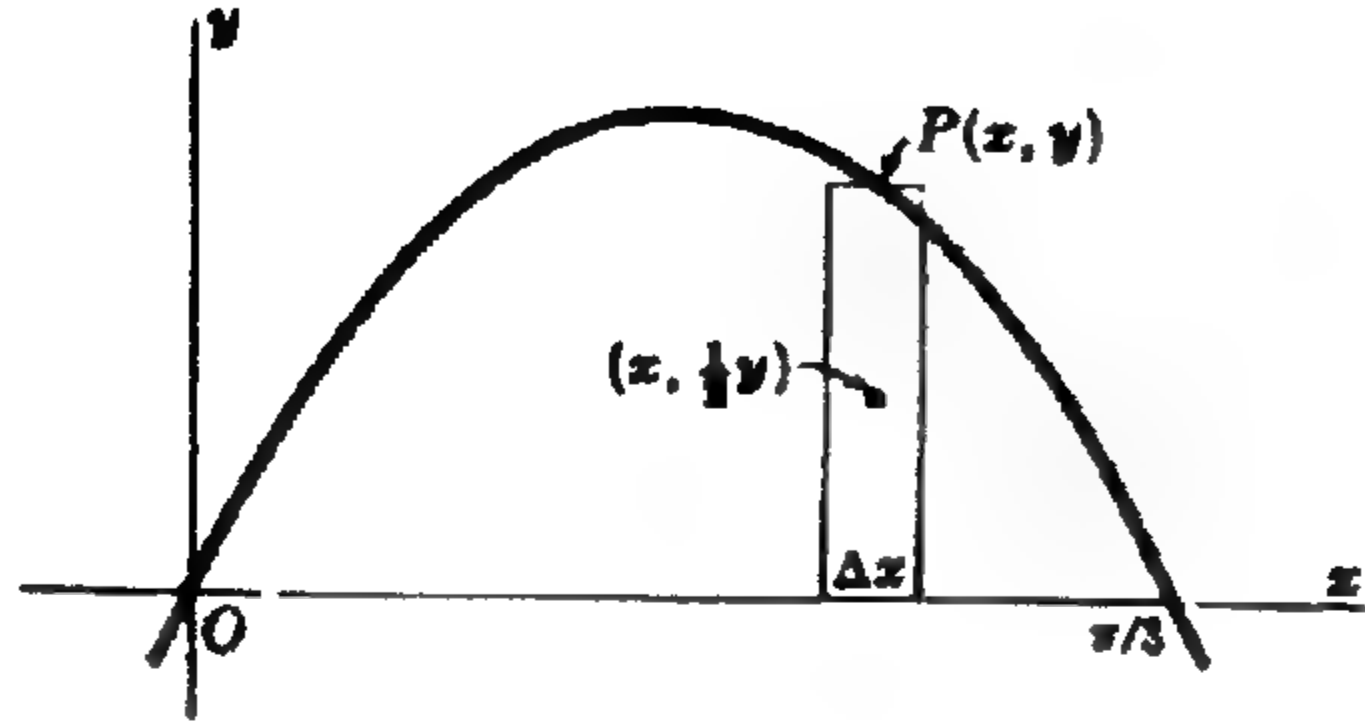
شكل ٢٧ - ٥

والمركز المتوسط هو  $(\bar{x}, \bar{y}) = (9/5, -9/10)$

٦ - عين المركز المتوسط لسطح الواقع تحت المنحنى  $y = 2 \sin 3x$  من  $x = 0$  إلى  $x = \pi/3$ . أنظر الشكل ٢٧-٦

واستخدم المستطيل المقرب لموضع في الشكل والتي مركزه المتوسط هو  $(x, \frac{1}{2}y)$ .





شكل ٢٧ - ٦

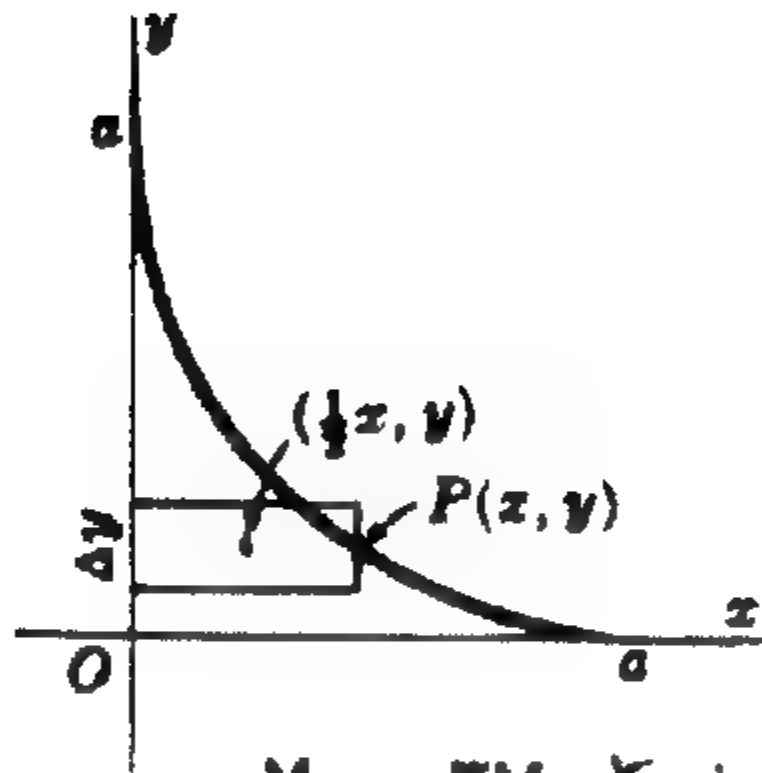
$$A = \int_0^{\pi/3} y dx = \int_0^{\pi/3} 2 \sin 3x dx = -\frac{2}{3} \cos 3x \Big|_0^{\pi/3} = \frac{4}{3}$$

$$M_x = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} y \cdot y dx = 2 \int_0^{\pi/3} \sin^2 3x dx = 2 \left[ \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3}$$

$$M_y = \int_0^{\pi/3} x \cdot y dx = 2 \int_0^{\pi/3} x \sin 3x dx = \frac{2}{9} \left[ \sin 3x - 3x \cos 3x \right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{9} \pi$$

والمركز المتوسط هو النقطة  $(M_y/A, M_x/A) = (\pi/6, \pi/4)$ .

٧ - عين المركز المتوسط الواقع في الربع الأول ومحدد بالمنحنى التويرى  $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$ . أنظر الشكل ٢٧ - ١.

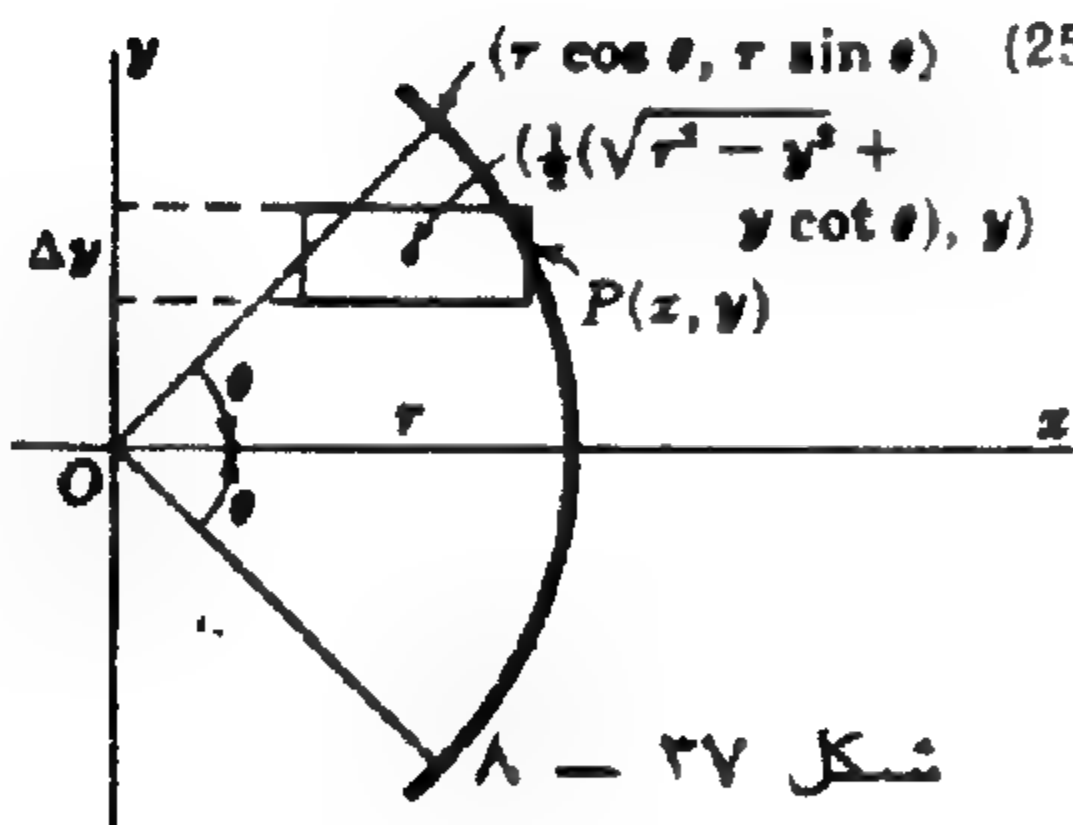


شكل ٢٧ - ٧

من التائل نجد أن  $\bar{x} = \bar{y}$  وأن

$$A = \int_0^{\pi/2} x dy = \int_0^{\pi/2} a \cos^3 \theta \cdot 3a \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{3}{8} a^2 \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{8} \sin 4\theta + \frac{1}{6} \sin^2 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{32} \pi a^2$$

$$M_x = \int_0^{\pi/2} y \cdot x dy = 3a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \sin^3 \theta d\theta = 3a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \sin \theta d\theta = -3a^2 \left[ \frac{\cos^5 \theta}{5} - \frac{2 \cos^3 \theta}{3} + \frac{\cos \theta}{1} \right]_0^{\pi/2} = \frac{24a^2}{315}$$



شكل ٢٧ - ٨

٨ - بين أن المركز المتوسط لقطاع دائرى نصف قطره  $r$  وزاويته  $2\theta$  يبعد

$$\frac{2r \sin \theta}{3\theta}$$

لناخذ القطاع الدائرى بحيث يقع مركزه المتوسط على المحور  $x$ . ومن التائل نجد أن الاحداث السينى للمركز المتوسط المطلوب هو نفسه المركز المتوسط للقطاع الدائرى الذى يقع فوق المحور  $x$  والمحدد بالدائرة والمستقيم  $y = x \tan \theta$ .

$$A = \int_0^{r \tan \theta} (\sqrt{r^2 - y^2} - y \cot \theta) dy = \left[ \frac{1}{2} y \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{1}{2} r^2 \arcsin \frac{y}{r} - \frac{1}{2} y^2 \cot \theta \right]_0^{r \tan \theta} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$M_x = \int_0^{r \tan \theta} \frac{1}{2} (\sqrt{r^2 - y^2} + y \cot \theta) (\sqrt{r^2 - y^2} - y \cot \theta) dy = \frac{1}{2} \int_0^{r \tan \theta} (r^2 - y^2 - y^2 \cot^2 \theta) dy = \frac{1}{2} \left[ r^2 y - \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{3} y^3 \cot^2 \theta \right]_0^{r \tan \theta} = \frac{1}{3} r^3 \sin \theta, \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{M_x}{A} = \frac{2r \sin \theta}{3\theta}$$

٩ - عين المركز المتوسط  $(\bar{x}, 0)$  للجسم الناتج عن دوران سطح المسألة ٣ حول المحور  $x$ . استخدم المستطيل المقرب الذي في المسألة ٣ وطريقة القرص :

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 (4 - x^2)^2 dx = 256\pi/15,$$

$$\bar{x} = M_{yy}/V = 5/8 \quad \text{و} \quad M_{yy} = \pi \int_0^1 x \cdot y^2 dx = \pi \int_0^1 x(4 - x^2)^2 dx = 32\pi/3,$$

١٠ - عين المركز المتوسط  $(0, \bar{y})$  للجسم الناتج عن دوران سطح المسألة ٣ حول المحور  $y$ . استخدم المستطيل المقرب الذي في المسألة ٣ وطريقة القشرة :

$$V' = 2\pi \int_0^1 xy dx = 2\pi \int_0^1 x(4 - x^2) dx = 8\pi,$$

$$\bar{y} = M_{xx}/V' = 4/3 \quad \text{و} \quad M_{xx} = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} y \cdot xy dx = \pi \int_0^1 x(4 - x^2)^2 dx = 32\pi/3.$$

١١ - عين المركز المتوسط  $(\bar{x}, 0)$  للجسم الناتج عن دوران قطعة سطح المسألة ٤ حول المحور  $x$ . استخدم المستطيل المقرب الذي في المسألة ٤ وطريقة القرص .

$$\bar{x} = M_{yy}/V = 5/8 \quad \text{و} \quad V = \pi \int_0^1 (x^3 - x^4) dx = 2\pi/15, \quad M_{yy} = \pi \int_0^1 x(x^3 - x^4) dx = \pi/12,$$

١٢ - عين المركز المتوسط  $(0, \bar{y})$  للجسم الناتج عن دوران سطح المسألة ٤ حول المحور  $y$ .

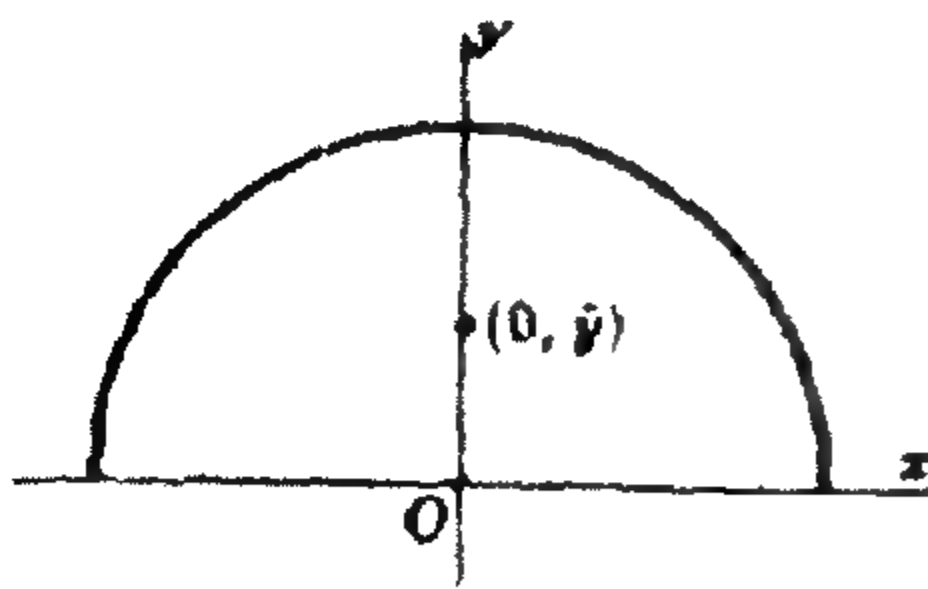
استخدم المستطيل المقرب الذي في المسألة ٤ وطريقة القشرة .

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^3) dx = \pi/6,$$

$$\bar{y} = M_{xx}/V = 1/2 \quad \text{و} \quad M_{xx} = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} (x + x^3) \cdot x(x - x^3) dx = \pi/12,$$

١٣ - عين المركز المتوسط لسطح على شكل نصف دائرة قطرها  $r$ .

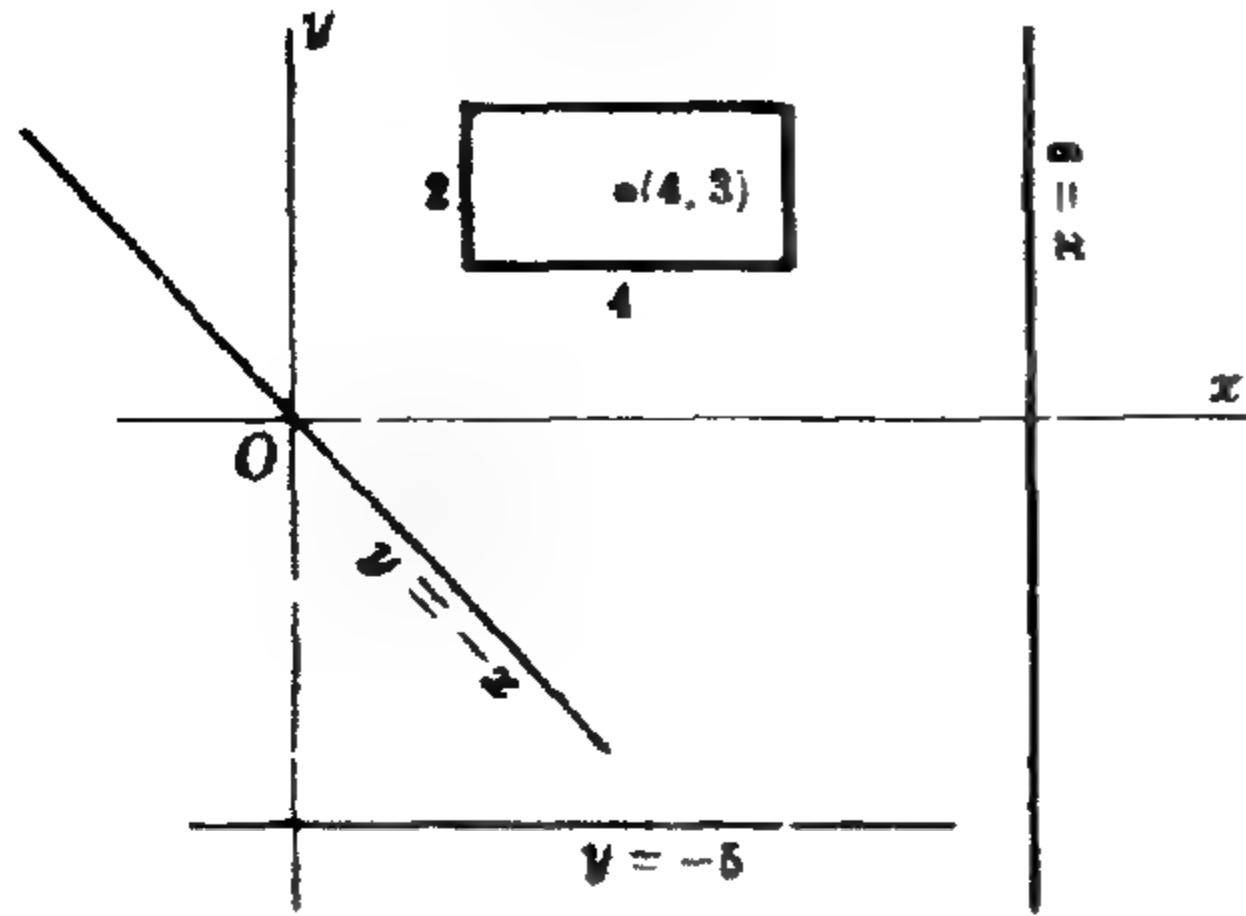
لتأخذ نصف الدائرة كما في الشكل فيكون  $x = 0$ .



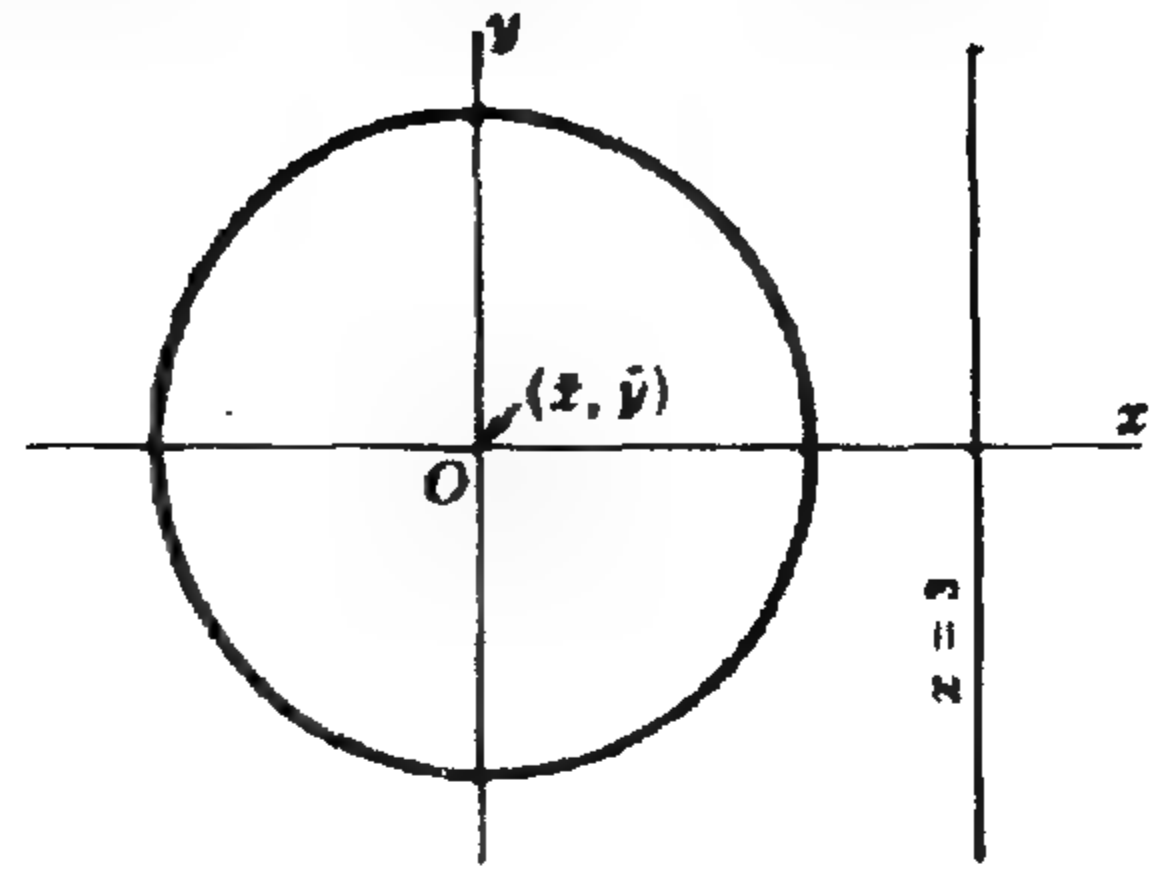
شكل ٢٧ - ٩

إن مساحة نصف الدائرة  $\frac{1}{2}\pi r^2$  والجسم الناتج عن دورانه حول المحور  $x$  هو كرة حجمها  $\frac{4}{3}\pi r^3$ . أثناء هذا الدوران يرسم المركز المتوسط  $(0, \bar{y})$  لنصف الدائرة دائرة نصف قطرها  $\bar{y}$ . وعلى هذا يكون استناداً إلى نظرية بابوس  $\frac{1}{2} = r^2 \cdot 2 = \bar{y} = \frac{4}{3}r^2$  والمركز المتوسط هو النقطة  $(0, 4r/3\pi)$ .

١٤ - عين حجم الجسم الناتج عن دوران الدائرة  $x^2 + y^2 = 4$  حول المستقيم  $x = 3$ . أنظر الشكل ٢٧ - ١٠. يرسم المركز المتوسط لسطح الدائري أثناء الدوران دائرة نصف قطرها 3. وعلى هذا فإن  $V = 4\pi(6\pi)$  أي أن الحجم المطلوب يساوي  $24\pi^2$  cubic units.



شكل ٣٧ - ١١



شكل ٣٧ - ١٠

١٥- أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المستطيل الموضح في الشكل ٣٧ - ١١ حول (١) المستقيم  $x = 9$  ، (٢) المستقيم  $y = -5$  ، (٣) المستقيم  $y = -x$  .

(١) يرسم المركز المتوسط (4,3) دائرة نصف قطرها 5 ولذا فإن  $V = 8(10\pi) = 80\pi$  cu. un.

(٢) يرسم المركز المتوسط دائرة نصف قطرها 8 ولذا فإن  $V = 8(16\pi) = 128\pi$  cubic units.

(٣) يرسم المركز المتوسط دائرة نصف قطرها  $(4+3)/\sqrt{2}$  ولذا فإن  $V = 56\sqrt{2}\pi$  cubic units.

### مسائل اضافية

عين في المسائل من ١٦ - ٢٦ المركز المتوسط للسطح المفروض :

- |                        |  |
|------------------------|--|
| ج : (0, 27/5)          | ١٦ - $y = x^2, y = 9$  |
| ج : (2, 8/5)           | ١٧ - $y = 4x - x^2, y = 0$   |
| ج : (3/2, 12/5)        | ١٨ - $y = 4x - x^2, y = x$   |
| ج : (6/5, 0)           | ١٩ - $3y^2 = 4(3-x), x = 0$  |
| ج : (3, 3/5)           | ٢٠ - $x^2 = 8y, y = 0, x = 4$  |
| ج : (12/5, 192/35)     | ٢١ - $y = x^2, 4y = x^2 - 2$   |
| ج : (3/4, 2/5)         | ٢٢ - $x^2 - 8y + 4 = 0, x^2 = 4y$ والربع الأول .                       |
| ج : (4a/3\pi, 4a/3\pi) | ٢٣ - الجزء الواقع في الربع الأول من $x^2 + y^2 = a^2$ .                |
| ج : (16/3\pi, 4/\pi)   | ٢٤ - الجزء الواقع في الربع الأول من $9x^2 + 16y^2 = 144$ .             |
| ج : (32/15\pi, 0)      | ٢٥ - المقذبة اليمنى $y^2 = x^2(1-x^2)$                                 |
| ج : (\pi, 5/6)         | ٢٦ - المقذبة الأولى من $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$ |
|                        | ٢٧ - بين أن بعد المركز المتوسط لثلث عن قاعدته يساوى ١/٣ الارتفاع .     |

عين في المسائل من ٢٨ إلى ٣٨ المركز المتوسط للجسم الناتج عن دوران السطح المفروض حول المستقيم المفروض .

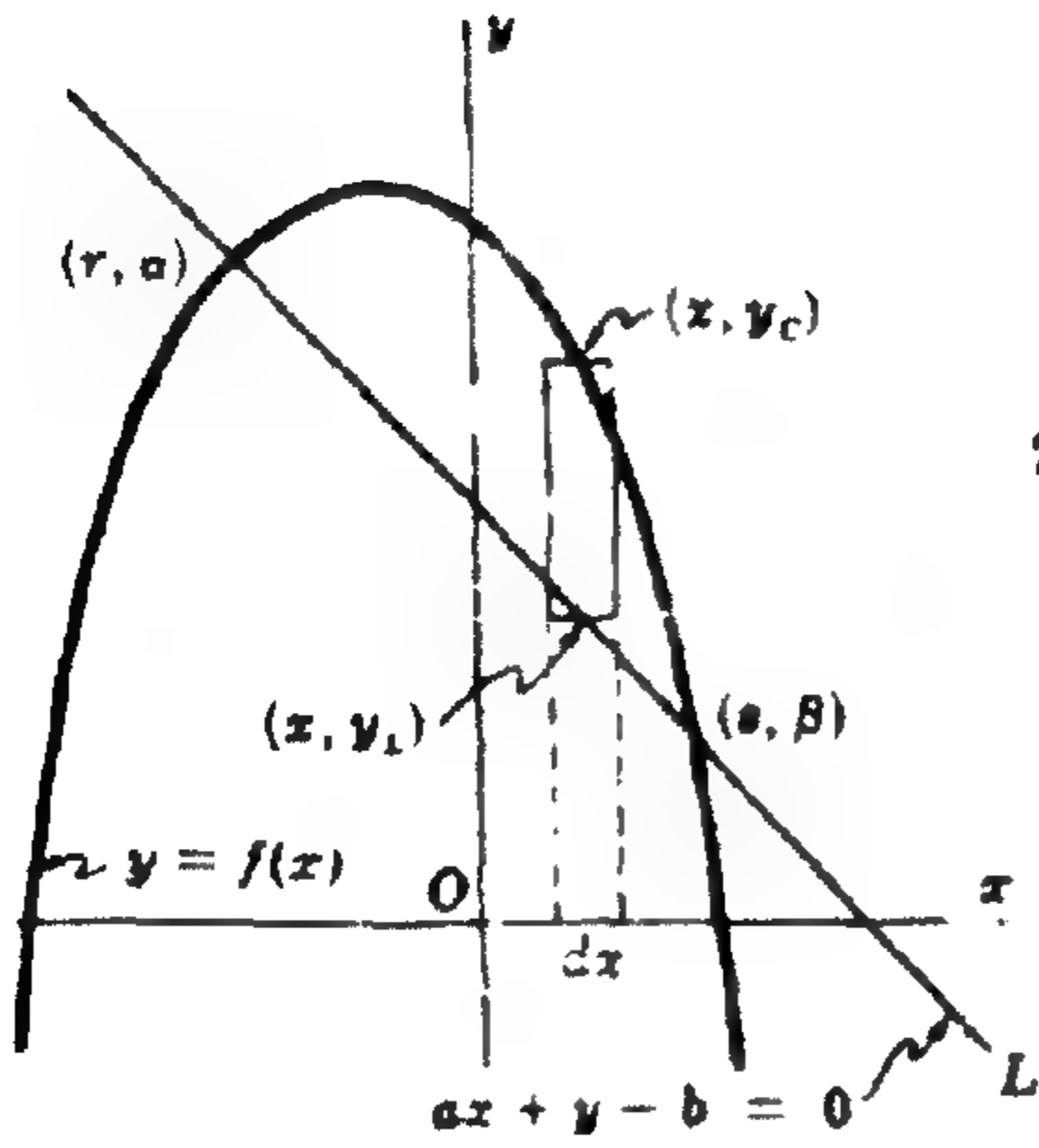
- |                       |   |
|-----------------------|---|
| ج : $\bar{y} = 6$     | ٢٨ - $y = x^2, y = 9, x = 0$ حول المحور y . |
| ج : $\bar{x} = 5/4$   | ٢٩ - $y = x^2, y = 9, x = 0$ حول المحور x . |
| ج : $\bar{x} = 27/16$ | ٣٠ - $y = 4x - x^2, y = x$ حول المحور x .   |

- ٢١ -  $y = 4x - x^2$ ,  $y = x$ ; حول المحور  $y$ .  
 ج :  $\bar{y} = 27/10$   
 ٢٢ -  $x^2 - y^2 = 16$ ,  $y = 0$ ,  $x = 8$ ; حول المحور  $x$ .  
 ج :  $\bar{x} = 27/4$   
 ٢٣ -  $x^2 - y^2 = 16$ ,  $y = 0$ ,  $x = 8$ ; حول المحور  $y$ .  
 ج :  $\bar{y} = 3\sqrt{3}/2$   
 ٢٤ -  $(x-2)y^2 = 4$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ ,  $x = 5$ ; حول المحور  $x$ .  
 ج :  $\bar{x} = (2 + 2 \ln 3)/(\ln 3)$   
 ٢٥ -  $x^2 y = 16(4-y)$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ ; حول المحور  $y$ .  
 ج :  $\bar{y} = 1/(\ln 2)$   
 ٢٦ - السطح الواقع في الربع الأول والمحدد بـ  $y^2 = 12x$  والوتر البؤري العمودي حول المحور  $x$ .  
 ج :  $\bar{x} = 2$   
 ٢٧ - سطح المسألة ٢٦ حول المحور  $y$ .  
 ج :  $\bar{y} = 5/2$   
 ٢٨ - سطح المسألة ٢٦ حول دليل القطع المخالق.  
 ج :  $\bar{y} = 75/32$   
 ٢٩ - برهن نظرية بابوس في هذا الفصل.  
 ٤٠ - استخدم نظرية بابوس لإيجاد :

(أ) حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه  $a$  ونصف قطر قاعدته  $b$ .

(ب) الحلقة الناتجة عن دوران القطع الناقص  $(x-6)^2 + 9(y-5)^2 = 36$  حول المحور  $x$ .

ج : (أ)  $\frac{1}{3}\pi ab^2$  c.u. (ب)  $60\pi^2$  c.u.



٤١ - للسطح  $A$  المحدد بـ  $y = -x^2 - 3x + 6$  و  $x + y - 3 = 0$ .

عين (أ) المركز المتوسط (ب) الحجم الناتج عن دوران  $A$  حول المستقيم المحدد له.

ج : (أ)  $(-1, 28/5)$  (ب)  $2\pi \left( \frac{\bar{x} + \bar{y} - 3}{\sqrt{2}} \right) \cdot A = \frac{256\sqrt{2}}{15} \pi$  cu. un.

٤٢ - بين أنه إذا كان  $K$  الحجم الناتج عن دوران قطعة السطح  $A$

(المبينة في الشكل ٢٧ - ٢١) حول المستقيم  $L$ ، فإن

$$V = 2\pi \left( \frac{a\bar{x} + \bar{y} - b}{\sqrt{a^2 + 1}} \right) \cdot A = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + 1}} (aM_x + M_y - bA)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + 1}} \int_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1)^2 dx$$

شكل ٢٧ - ١٢

٤٣ - استخدم الصيغة الموجودة في المسألة ٤٢ لحساب الحجم الناتج عن دوران السطح المفروض حول المستقيم المفروض :

(أ)  $y = -x^2 - 3x - 6$ ,  $x + y - 3 = 0$

(ب)  $y = 2x^2$ ,  $2x - y + 4 = 0$

ج : (أ) انظر المسألة ٤١ (ب)  $162\sqrt{5}\pi/25$  cu. un.

## الفصل الثامن والثلاثون

### عزم القصور الذاتي السطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة

يمكن إيجاد عزم القصور الذاتي  $I_L$  لسطح مستو  $A$  بالنسبة لمستقيم  $L$  واقع في مستواء كما يلي :

- ١ - نعين برسم تقريبي السطح وشريطاً مثلاً موازياً للمستقيم والمستطيل المقرب .
- ٢ - نشكل حاصل ضرب مساحة المستطيل في مربع بعد مركزه المتوسط عن المستقيم ثم نشكل المجموع بالنسبة لجميع المستطيلات .
- ٣ - نجعل عدد المستطيلات يؤول إلى مالا نهاية ونطبق النظرية الأساسية .

أنظر المسائل ١ - ٤

**لايجاد عزم القصور الذاتي  $I_L$  لجسم حجمه  $V$  يتولد عن دوران سطح مستوي حول مستقيم  $L$  واقع في نفس المستوى بالنسبة لذلك المستقيم ( محور الجسم ) نتج ما يلي :**

- ١ - نعين برسم تقريبي شريحة مثلة موازية للمحور وكذلك المستطيل المقرب .
- ٢ - نشكل حاصل ضرب الحجم الناتج عن دوران المستطيل حول المحور ( القشرة ) في مربع بعد الوتر المتوسط للمستطيل عن المحور ثم نشكل المجموع بالنسبة لجميع المستطيلات .
- ٣ - نجعل عدد المستطيلات يؤول إلى مالا نهاية ونطبق النظرية الأساسية :

أنظر المسائل ٥ - ٨

**نصف قطر الدوران :** نسمي العدد الموجب  $R$  المعروف بالعلامة  $I_L = AR^2$  في حالة السطوح المستوية أو بالعلامة  $I_L = VR^2$  في حالة الحجوم الدورانية ، بنصف قطر الدوران لسطح أو لحجم بالنسبة لـ  $L$  .

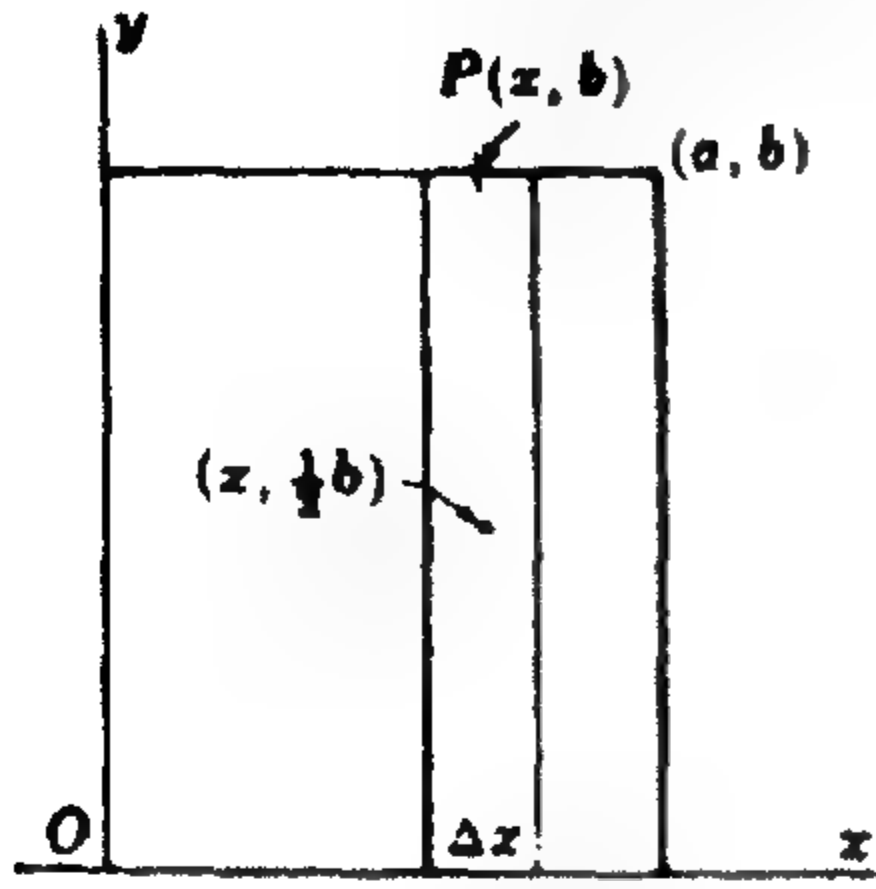
**نظرية المحور الموازي :** إن عزم القصور الذاتي لسطح أو لقوس منحن أو لحجم بالنسبة إلى محور يساوي عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور مواز للأول ومار بالمرکز المتوسط مضافاً لذلك حاصل ضرب المساحة أو طول القوس أو الحجم في مربع البعد بين المحورين المتوازيين .

أنظر المسائل ٩ - ١٠

### مسائل محلولة

- ١ - أوجد عزم القصور الذاتي لسطح مستطيل الشكل  $A$  بعاء  $a$  و  $b$  فك بالنسبة لأحد أضلاعه .





شكل ٢٨ - ١

لنأخذ المستطيل كما في الشكل ولنفرض أن الضلع الذي نريد أن نحسب عزم القصور الذاتي بالنسبة له ينطبق على المحور  $y$ .

إن مساحة المستطيل المقرب تساوي  $b \cdot \Delta x$  والمركز المتوسط لها  $(x, \frac{1}{2}b)$  وبالتالي فإن عنصر عزم القصور الذاتي له هو  $x^2 b \Delta x$  إذن :

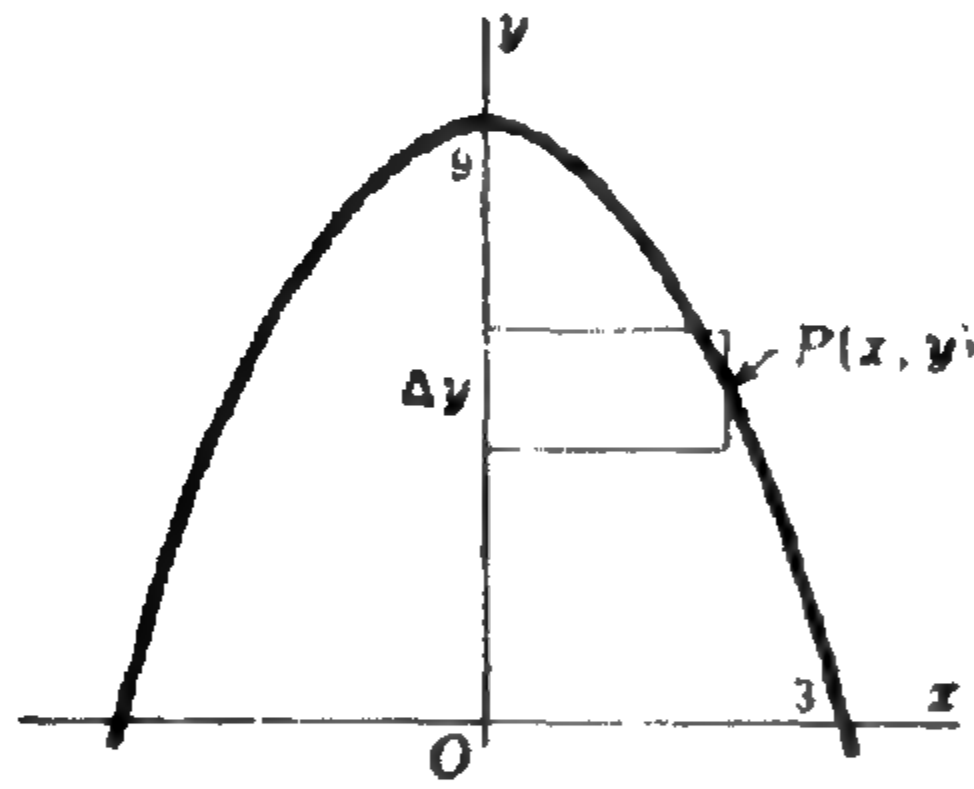
$$I_y = \int_0^a x^2 b dx = b \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ba^3}{3} = \frac{1}{3} A a^2$$

إذن فنرمز القصور الذاتي لسطح مستطيل الشكل حول أحد أضلاعه يساوي  $\frac{1}{3}$  حاصل ضرب مساحته في طول الضلع الآخر.

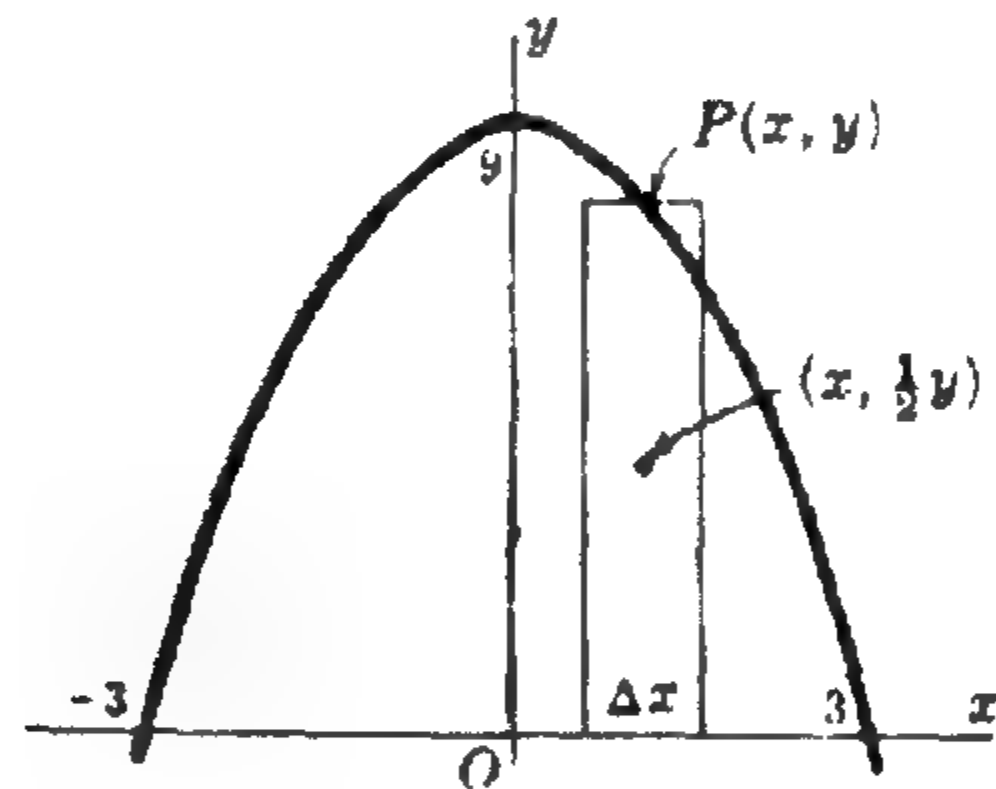
٢- أوجد عزم القصور الذاتي حول المحور  $y$  للسطح المستوي الواقع بين القطع المكافئ  $y = 9 - x^2$  والمحور  $x$ .

الحل الأول : إن مساحة المستطيل المقرب في الشكل ٢٨ - ٢ تساوي  $A = y \cdot \Delta x$  ومركزه المتوسط  $(x, \frac{1}{2}y)$  إذن :

$$I_y = \int_{-3}^3 x^2 y dx = 2 \int_0^3 (9x - x^3) dx = \frac{324}{5}$$



شكل ٢٨ - ٣



شكل ٢٨ - ٢

الحل الثاني : إن مساحة المستطيل المقرب في الشكل ٢٨ - ٣ تساوي  $x \cdot \Delta y$  وبمساحة المستطيل العمودي عن المحور  $y$  يساوي  $x$ . ولذلك فإن عنصر عزم القصور الذاتي استناداً إلى المسألة ١ يساوي  $x^2 (x \Delta y) \frac{1}{3}$ . وبذلك نجد اعتماداً على التناظر أن :

$$I_y = 2 \cdot \frac{1}{3} \int_0^9 x^3 dy = \frac{2}{3} \int_0^9 (9 - y)^{3/2} dy = \frac{324}{5}$$

ونصف قطر الدوران

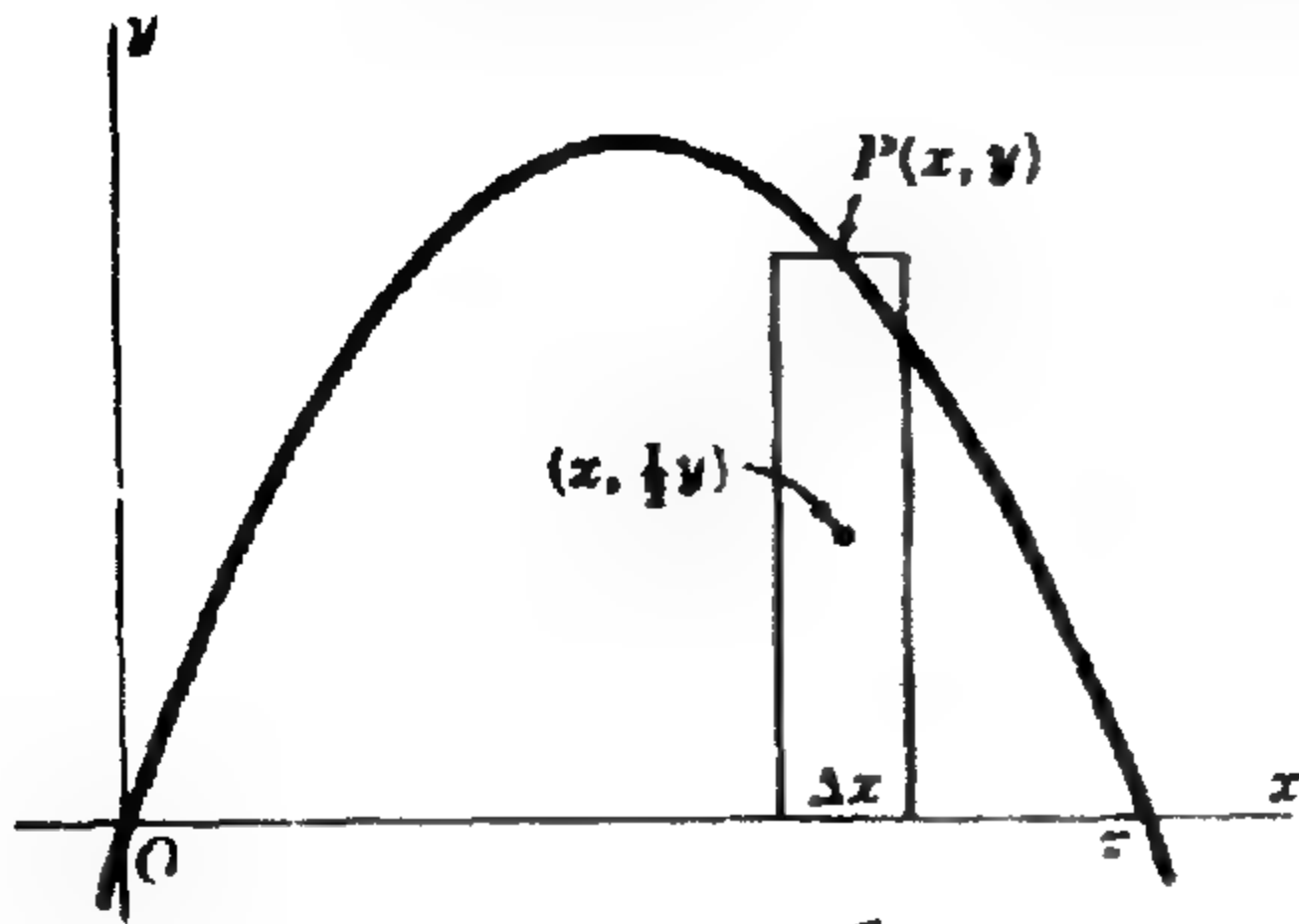
$$I_y = 324/5 = A R^2 \quad \text{فإن} \quad A = 2 \int_0^3 x dy = 2 \int_0^9 \sqrt{9-y} dy = 36$$

هو :  $R = 3/\sqrt{5}$ .

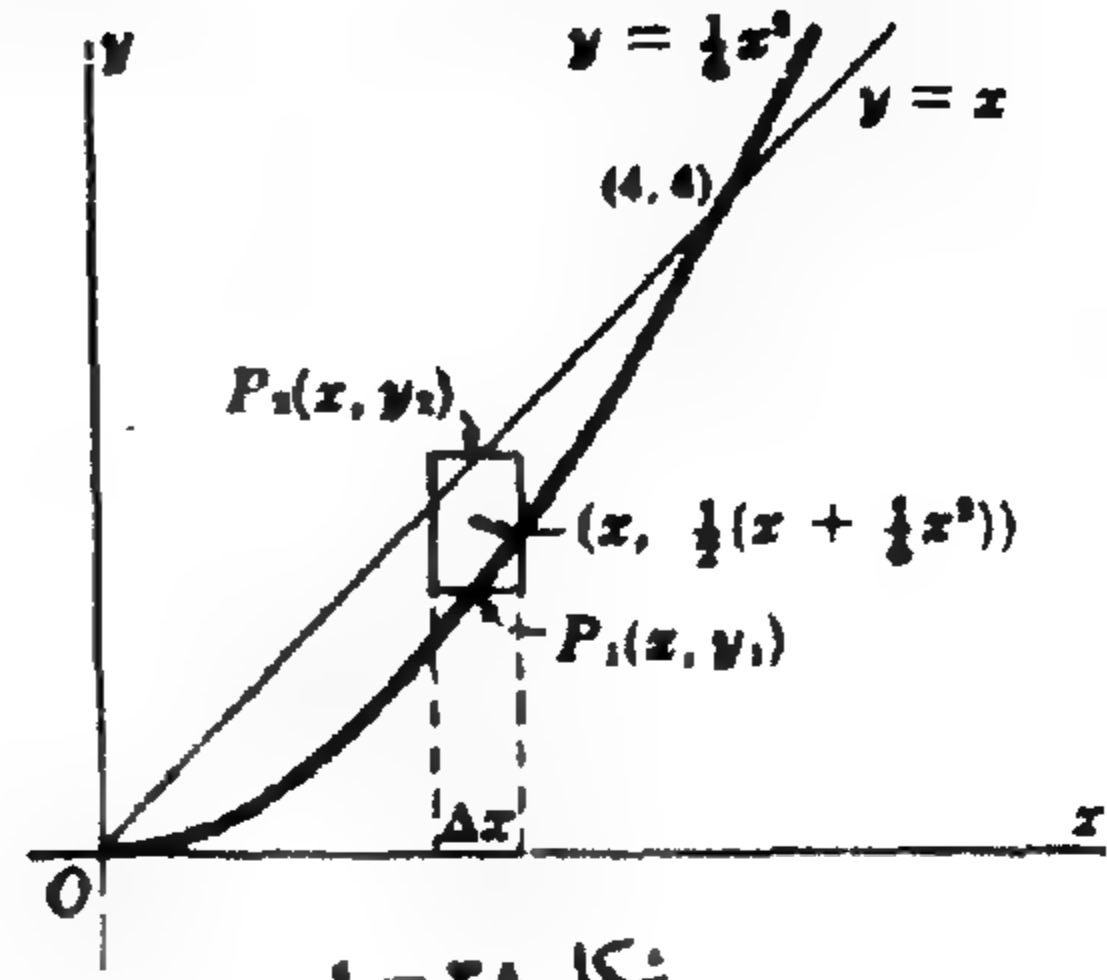
٣- أوجد عزم القصور الذاتي حول المحور  $y$  للسطح المستوي الواقع في الربع الأول ، والمحدد بالقطع المكافئ  $x^2 = 4y$  والمستقيم  $x = 4$ . أنظر الشكل ٢٨ - ٤.

إذا استعملنا المستطيل المقرب المبين في الشكل ٢٨ - ٤ واللفى مساحته  $\Delta x (x - \frac{1}{4}x^2)$  ومركزه المتوسط هو  $[x, \frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}x^2)]$  فإننا نجد :

$$I_y = \int_0^4 x^2 (x - \frac{1}{4}x^2) dx = \frac{64}{5} = \frac{24}{5} A \quad \text{و} \quad A = \int_0^4 (x - \frac{1}{4}x^2) dx = \frac{8}{3}$$



شكل ٢٨ - ٥



شكل ٢٨ - ٤

٤ - أوجد عزم القصور الذاتي حول كل من المحورين الاحداثيين لسطح المستوى الواقع بين المنحنى  $y = \sin x$  من  $x=0$  إلى  $x = \pi$  ومحور السينات. أنظر للشكل ٢٨ - ٥ .

$$A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$$

$$I_x = \int_0^{\pi} y^2 \cdot \frac{1}{3} \sin x \, dx = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx = \frac{1}{3} \left[ -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\pi} = \frac{4}{9} = \frac{2}{9} A$$

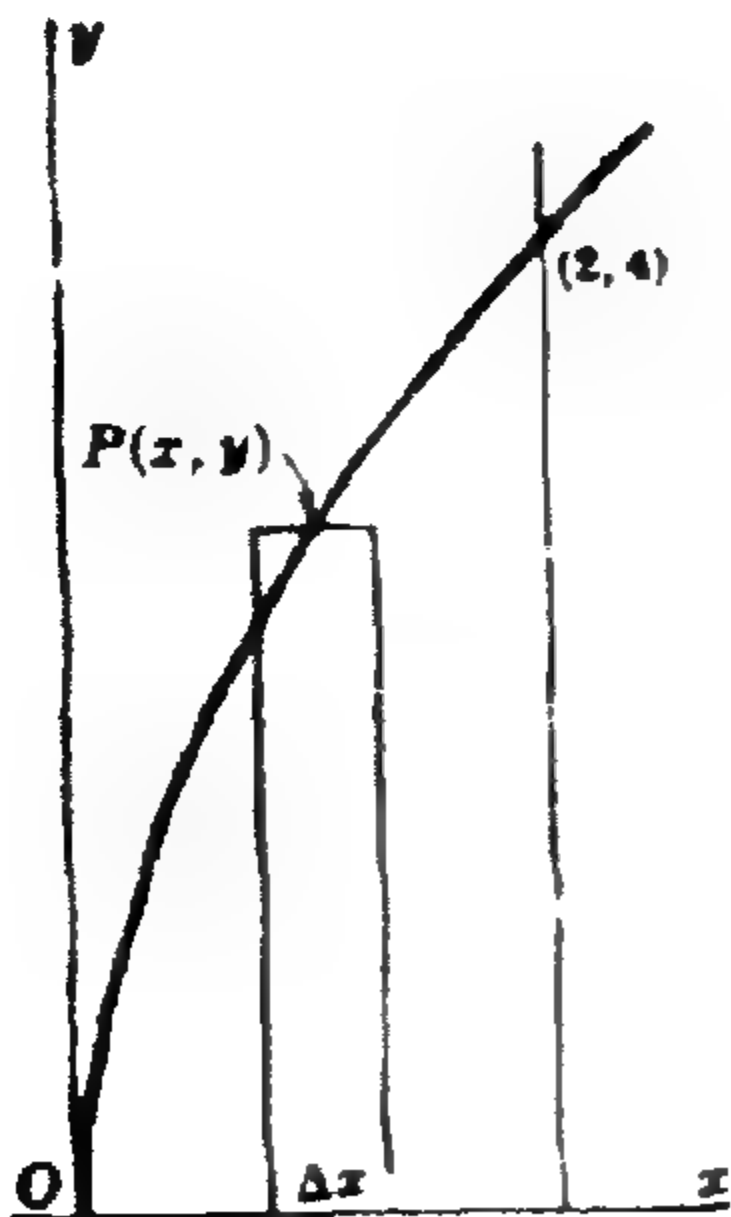
$$I_y = \int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \left[ 2 \cos x + 2x \sin x - x^2 \cos x \right]_0^{\pi} = (\pi^2 - 4) = \frac{1}{2} (\pi^2 - 4) A$$

٥ - أوجد عزم القصور الذاتي لاسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها  $b$  ونصف قطر قاعدتها  $a$  حول محور الاسطوانة. أنظر الشكل ٢٨ - ٦ .

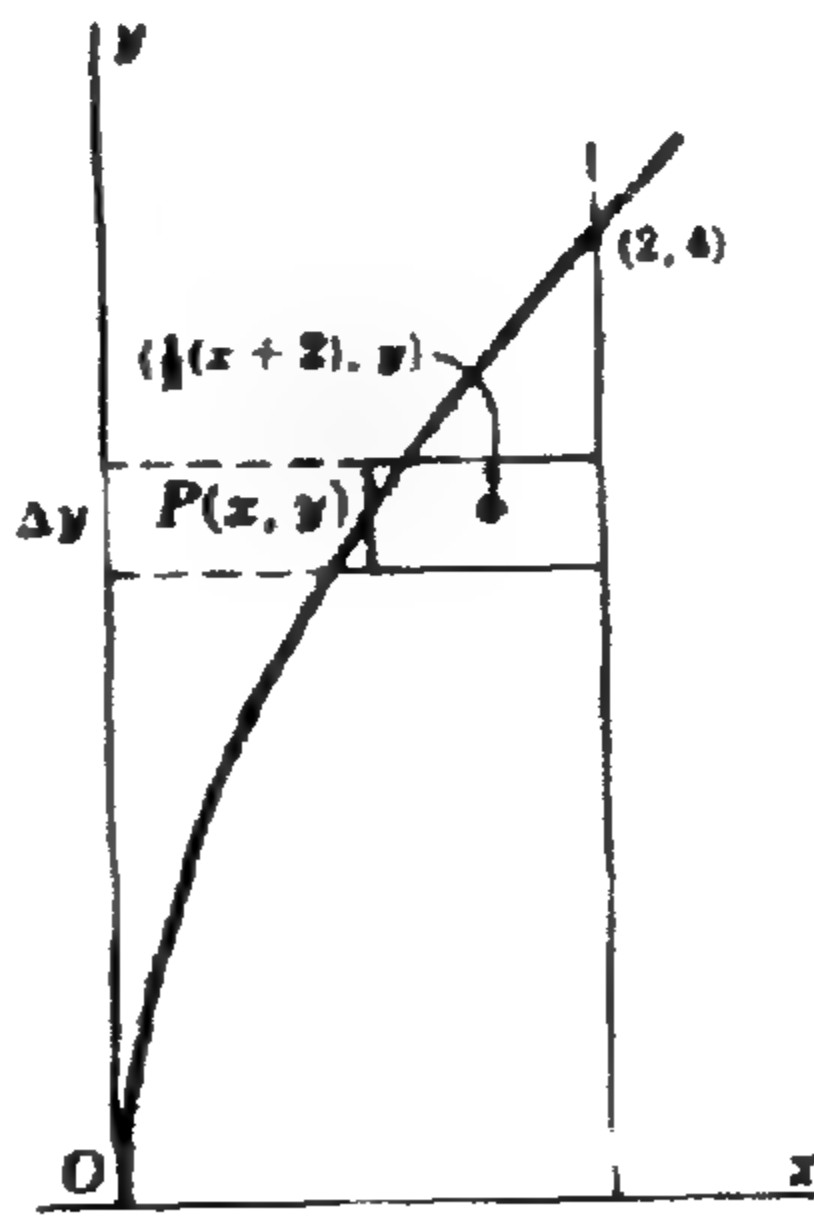
نفرض أن الاسطوانة ناتجة عن دوران المستطيل الذي بعده  $a$  و  $b$  حول المحور  $y$  كما هو مبين في الشكل ٢٨ - ٦ . إذن المركز المتوسط للمستطيل المقرب المبين في الشكل هو  $(x, \frac{1}{2} b)$  ، وحجم القشرة الناتجة عن دوران المستطيل حول المحور  $y$  هو  $\Delta V = 2\pi b x \cdot \Delta x$  وبما أن  $V = \pi b a^2$  ، فإن :

$$I_y = 2\pi \int_0^a x^2 \cdot b x \, dx = \frac{1}{2} \pi b a^4 = \frac{1}{2} \pi b a^3 \cdot a = \frac{1}{2} V a^2$$

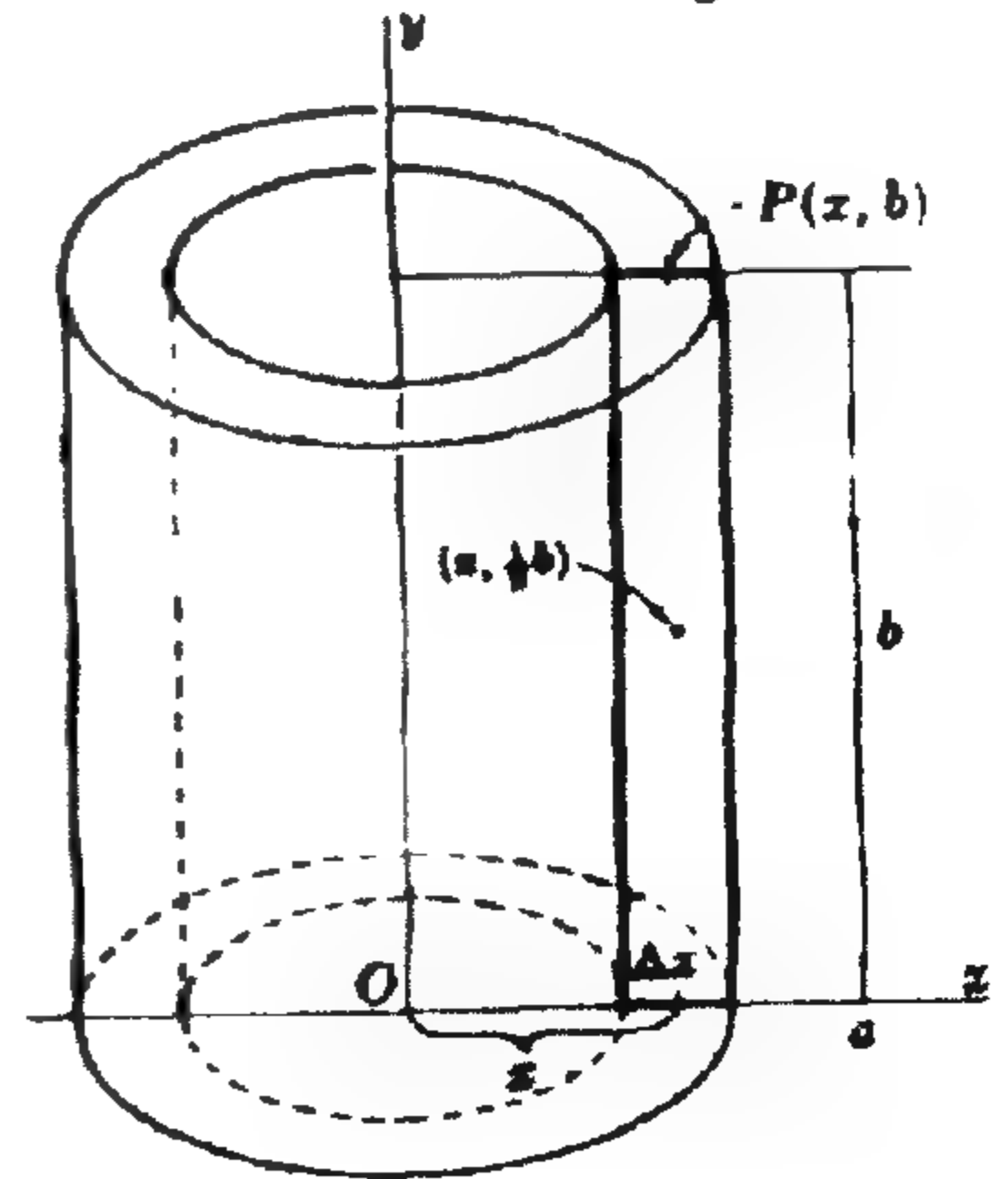
وهكذا نجد أن عزم القصور الذاتي لاسطوانة دائرية قائمة حول محورها يساوي نصف حاصل ضرب حجمها في مربع نصف قطرها .



شكل ٢٨ - ٨



شكل ٢٨ - ٧



شكل ٢٨ - ٦

٦- أوجد عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور الحجم الناتج من الدوران حول المحور السيني لمساحة الواقعة في الربع الأول والمحددة بالقطع المكافئ  $y^2 = 8x$  والمحور السيني والخط  $x = 2$ .

الحل الأول : بالنظر إلى الشكل ٣٨-٧ نجد أن المركز المتوسط للمستطيل المقرب المين في الشكل ٣٨-٧ هو  $[ \frac{1}{2}(x+2), y ]$  وأن الحجم الناتج عن دوران المستطيل حول المحور  $x$  هو  $2\pi y(2-x) \Delta y = 2\pi y(2-y^2/8) \Delta y$  إذن :

$$I_x = 2\pi \int_0^4 y^3 \cdot y(2 - y^2/8) dy = \frac{256}{3}\pi = \frac{16}{3}V \quad \text{و} \quad V = 2\pi \int_0^4 y(2 - y^2/8) dy = 16\pi$$

الحل الثاني : بالنظر إلى الشكل ٣٨-٨ نجد أن الحجم الناتج عن دوران المستطيل المقرب في الشكل ٣٨-٨ حول المحور  $x$  يساوى  $\pi y^2 \Delta x$  وباستخدام نتيجة المسألة ٥ نجد أن عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور  $x$  يساوى  $\frac{1}{2}\pi y^4 \Delta x = \frac{1}{2}\pi y^2 (\pi y^2 \Delta x)$  إذن :

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = 8\pi \int_0^2 x dx = 16\pi$$

$$I_x = \frac{1}{2}\pi \int_0^2 y^4 dx = 32\pi \int_0^2 x^2 dx = \frac{256}{3}\pi = \frac{16}{3}V$$

٧- أوجد عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور الحجم الناتج عن دوران المساحة المغطاة في المسألة ٦ حول المحور الصادي أنظر الشكل ٣٨-٨.

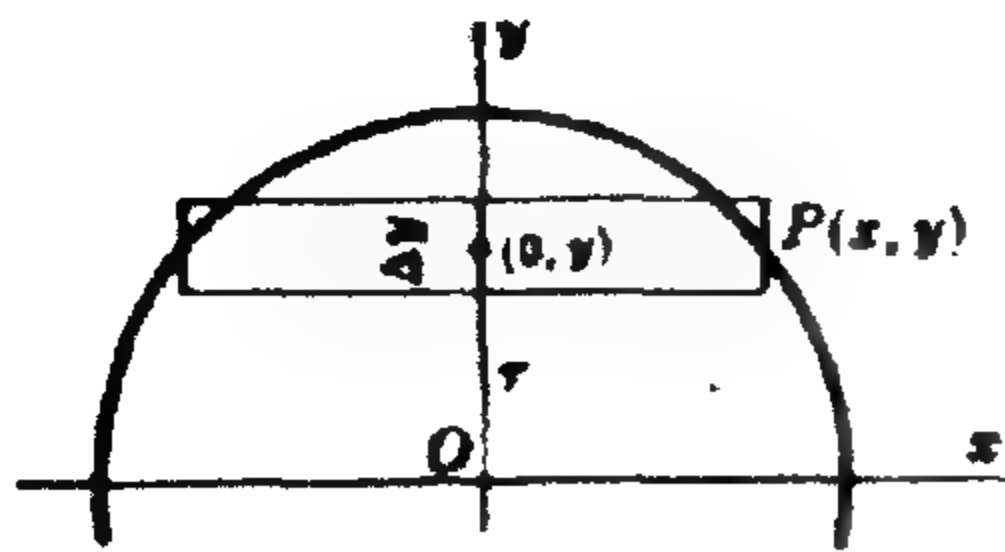
إن الحجم الناتج عن دوران المستطيل المين بالشكل ٣٨-٨ حول المحور  $y$  يساوى  $2\pi xy \Delta x$  إذن :

$$V = 2\pi \int_0^2 xy dx = 4\sqrt{2}\pi \int_0^2 x^{3/2} dx = \frac{64}{5}\pi$$

$$I_y = 2\pi \int_0^2 x^{3/2} xy dx = 4\sqrt{2}\pi \int_0^2 x^{5/2} dx = \frac{256}{9}\pi = \frac{20}{9}V$$

٨- أوجد عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور حجم الكرة الناتجة عن دوران دائرة نصف قطرها  $r$  حول قطر ثابت فيها.

لنأخذ الدائرة كما في الشكل حيث القطر الثابت واقع على المحور  $x$  ونستخدم طريقة القشرة.



شكل ٣٨-٩

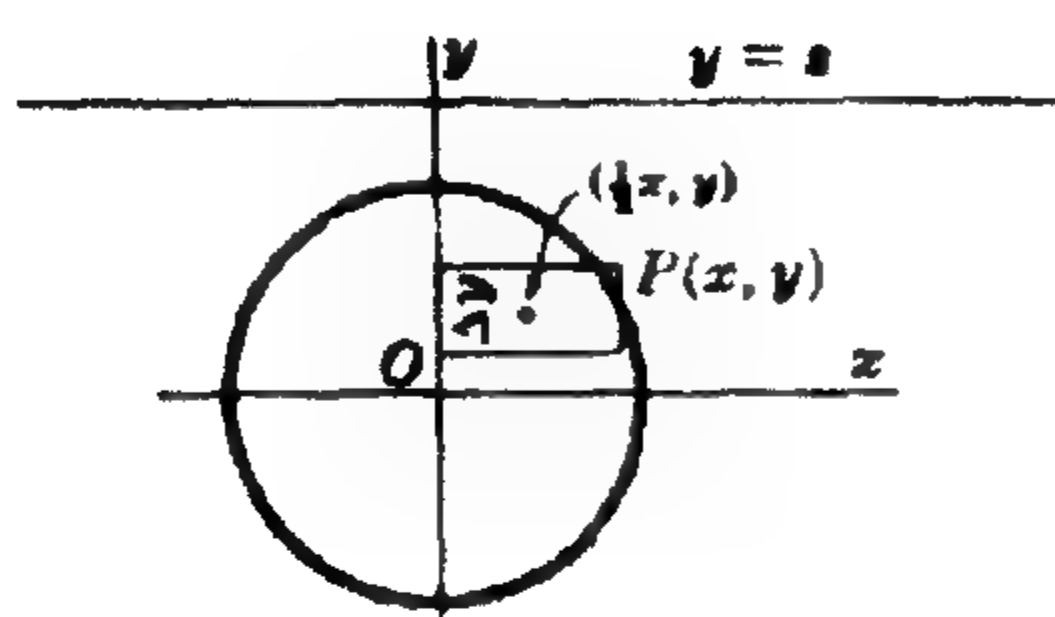
$$V = 2\pi \int_0^r 2x \cdot y dy = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$I_x = 4\pi \int_0^r y^3 \cdot xy dy = 4\pi \int_0^r y^4 \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

لنضع  $y = r \sin z$  فيكون  $\sqrt{r^2 - y^2} = r \cos z$  و  $dy = r \cos z dz$

والحصول على التكامل بالنسبة لـ  $x$  المقابلين لحى التكامل بالنسبة لـ  $y$  نلاحظ أنه عندما  $y = 0$  يكون  $0 = r \sin z$  ومنه  $0 = \sin z$  وبالتالي  $z = 0$  وعندما  $y = r$  يكون  $r = r \sin z$  ومنه  $1 = \sin z$  وبالتالي  $z = \frac{1}{2}\pi$  إذن :

$$I_z = 4\pi r^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 z \cos^2 z dz = 4\pi r^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 z) \cos^2 z \sin z dz = \frac{4}{15}\pi r^3 = \frac{4}{15}\pi V$$



شكل ٢٨ - ١٠

٩- أوجد عزم القصور الذاتي لسطح دائري الشكل نصف قطره  $r$  بالنسبة لمستقيم في مستواه يبعد  $s$  units عن مركزه. لنأخذ مركز الدائرة في نقطة الأصل ولنبحث أولاً عن عزم القصور الذاتي للدائرة بالنسبة لقطرها الموازي للمستقيم المفروض.

$$I_z = 4 \int_0^r y^2 \cdot x dy = 4 \int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{1}{4}r^4\pi = \frac{1}{4}r^2A$$

$$I_z = I_x + A \cdot s^2 = (\frac{1}{4}r^2 + s^2)A \text{ ومنه}$$

١٠- إذا فرضنا أن عزم القصور الذاتي لجسم ناتج عن دوران قوس من المنحنى  $y = \sin 3x$  حول المحور  $x$  بالنسبة لمحور الجسم يساوى  $I_z = \pi^3/16 = 3V/8$ ، فأوجد عزم القصور الذاتي للجسم بالنسبة للمستقيم  $y = 2$ .

$$I_{y,z} = I_z + 2^2V = 3V/8 + 4V = 35V/8$$

### مسائل إضافية

١١- أوجد عزم القصور الذاتي لكل من السطوح التالية بالنسبة للمستقيم الوارد إلى جانب كل منهما :

- (أ)  $y = 4 - x^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  : بالنسبة للمحور  $x$  ؛ بالنسبة للمحور  $y$  : ج .  $128A/35$ ,  $4A/5$   
 (ب)  $y = 8x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  : بالنسبة للمحور  $x$  ؛ بالنسبة للمحور  $y$  : ج .  $128A/15$ ,  $2A/3$   
 (ج)  $x^2 + y^2 = a^2$  : بالنسبة لواحد من أقطارها . ج .  $a^2A/4$   
 (د)  $y^2 = 4x$ ,  $x = 1$  : بالنسبة للمحور  $x$  ؛ بالنسبة للمحور  $y$  : ج .  $4A/5$ ,  $3A/7$   
 (هـ)  $4x^2 + 9y^2 = 36$  : بالنسبة للمحور  $x$  ؛ بالنسبة للمحور  $y$  : ج .  $A$ ,  $9A/4$

١٢- استخدم نتائج المسألة ١١ ونظرية المحور الموازي لتحصل على عزم القصور الذاتي للسطح المفروض حول المستقيم المفروض.

(أ)  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$  : بالنسبة للمستقيم  $x = 4$  (ب)  $x^2 + y^2 = a^2$  : بالنسبة للمماس .

(ج)  $y^2 = 4x$ ,  $x = 1$  : بالنسبة للمستقيم  $x = 1$  .

ج : (أ)  $84A/5$  (ب)  $5a^2A/4$  (ج)  $10A/7$

١٣- أوجد عزم القصور الذاتي حول محور الدوران الجسم الناتج عن دوران السطح المنوى المفروض حول المستقيم المفروض.

(أ)  $y = 4x - x^2$ ,  $y = 0$  : بالنسبة للمحور  $x$  وبالنسبة للمحور  $y$  : (ب)  $y^2 = 8x$ ,  $x = 2$  : بالنسبة

للمحور  $x$  وبالنسبة للمحور  $y$  : (ج)  $4x^2 + 9y^2 = 36$  : بالنسبة للمحور  $x$  وبالنسبة للمحور  $y$  : (د)  $x^2 - y^2 = a^2$  : بالنسبة للمستقيم  $y = b$  حيث  $b > a$  .

ج : (أ)  $128V/21$ ,  $32V/5$  (ب)  $16V/3$ ,  $20V/9$  (ج)  $8V/5$ ,  $18V/5$  (د)  $(b^2 + \frac{1}{3}a^2)V$

١٤ - استخدم نظرية المحور الموازي لتحصل على عزوم القصور الذاتي لـ (١) كرة نصف قطرها  $r$  بالنسبة لمستقيم لها، و (ب) اسطوانة دائرية قائمة بالنسبة لأحد عناصرها.

$$(١) \quad 7r^2V/5, \quad (ب) \quad 3r^2V/2$$

١٥ - برهن أن عزوم القصور الذاتي لسطح مستوي بالنسبة لمستقيم  $L$  عمودي عليه (أو بالنسبة لموقع العمود على المستوى) ي مجموع عزوم القصور الذاتية بالنسبة لأي مستقيمين متعامدين في المستوى وماريين بموقع  $L$ .

١٦ - أوجد عزوم القصور الذاتي القطبي  $I_0$  (عزوم القصور الذاتي بالنسبة لنقطة الأصل) لـ (١) مثلث محدد بـ  $y = 2x, y = 0, x$  (ب) دائرة نصف قطرها  $r$  ومركزها في نقطة الأصل (ج) الدائرة:  $x^2 - 2rx + y^2 = 0$  (د) السطح بالمستقيم  $y = x$  والقطع المكافئ  $y^2 = 2x$ .

$$(١) \quad I_0 = I_x + I_y = 56A/3, \quad (ب) \quad \frac{1}{3}r^2A, \quad (ج) \quad 3r^2A/2, \quad (د) \quad 72A/35$$



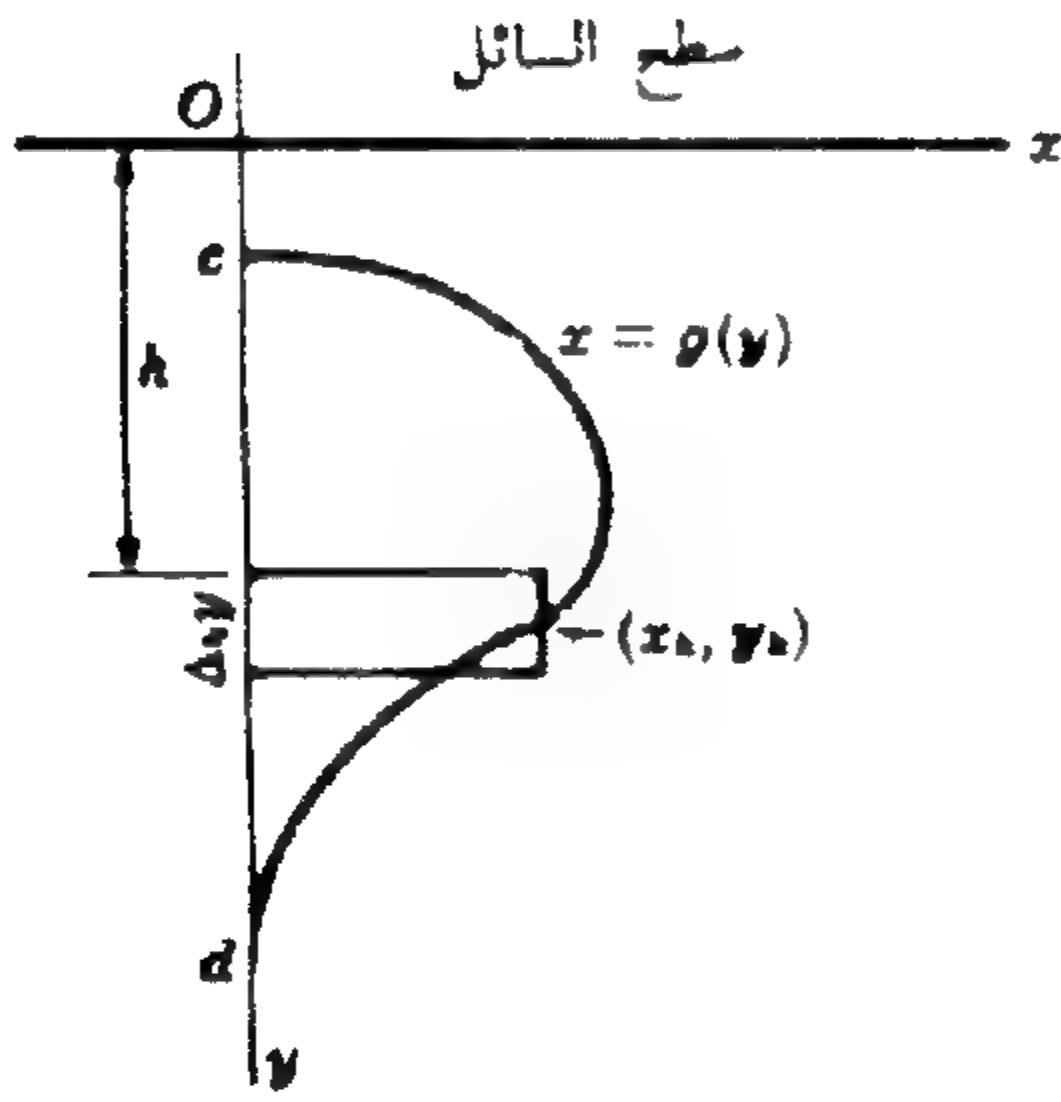
## الفصل التاسع والثلاثون

### ضغط السائل

**الضغط** = القوة الواقعة على وحدة المساحات =  $\frac{\text{القوة المؤثرة عمودياً على مساحة ما}}{\text{المساحة التي تؤثر عليها القوة}}$  إن الضغط  $p$  على سطح أفق

مساحته  $A$  الناتج عن عمود من سائل ارتفاعه  $h$  ويرتفع فوق السطح يساوي  $p = wh$  حيث  $w$  وزن وحدة الحجم من السائل وهو يساوي  $\rho g$  بفرض أن  $\rho$  كثافة السائل و  $g$  ثابت الجاذبية. وإذا أعطيت  $\rho$  بـ  $\text{Kg m}^{-3}$  و  $g$  بـ  $\text{ms}^{-2}$  فإن  $w$  تعطى بـ  $\text{Nm}^{-3}$ . والقوة على السطح المشار إليه تساوي حاصل ضرب الضغط في مساحة السطح  $whA$  والضغط الناتج عن وجود سائل، عند أية نقطة داخل السائل، متساو في جميع الاتجاهات.

### القوة المؤثرة على سطح مستو مغمور :



شكل ٢٩ - ١

يوضح الشكل ٢٩ - ١ سطح مستو مغمور عمودياً في سائل وزن وحدة الحجم منه يساوي  $w \text{ Nm}^{-3}$ . لنأخذ السطح في المستوى  $xy$  بحيث يقع المحور  $x$  على سطح السائل والمحور  $y$  رأسيّاً لأعلى. نقسم السطح إلى شرائح موازية باستمرار لسطح السائل، ولنقترب كل شريحة إلى مستطيل (كما في الفصل ٢٤).

لنرمز لمق الطرف الأعلى للمستطيل المثل المبين في الشكل بـ  $h$ . إذن القوة المؤثرة على هذا المستطيل الذي عرضه  $\Delta y_k$  وطوله  $x_k = g(y_k)$  تساوي

$w \cdot y_k' \cdot g(y_k) \cdot \Delta y_k$  حيث  $y_k$  قيمة ما لـ  $y$  بين  $h$  و  $h + \Delta y_k$ . والقوة الكلية المؤثرة على السطح تساوي، استناداً إلى نظرية بليس :

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n w \cdot y_k' \cdot g(y_k) \cdot \Delta y_k = w \int_c^d y \cdot g(y) dy = w \int_c^d y \cdot x dy$$

إذن القوة المؤثرة على سطح مستو مغمور رأسيّاً في سائل تساوي حاصل ضرب وزن وحدة الحجم من السائل في المساحة المنسوبة في عمق المركز المتوسط للسطح تحت سطح السائل. وهذه الصيغة تستعمل كبداً عند تشكيل جميع التكاملات.

### مسائل محلولة

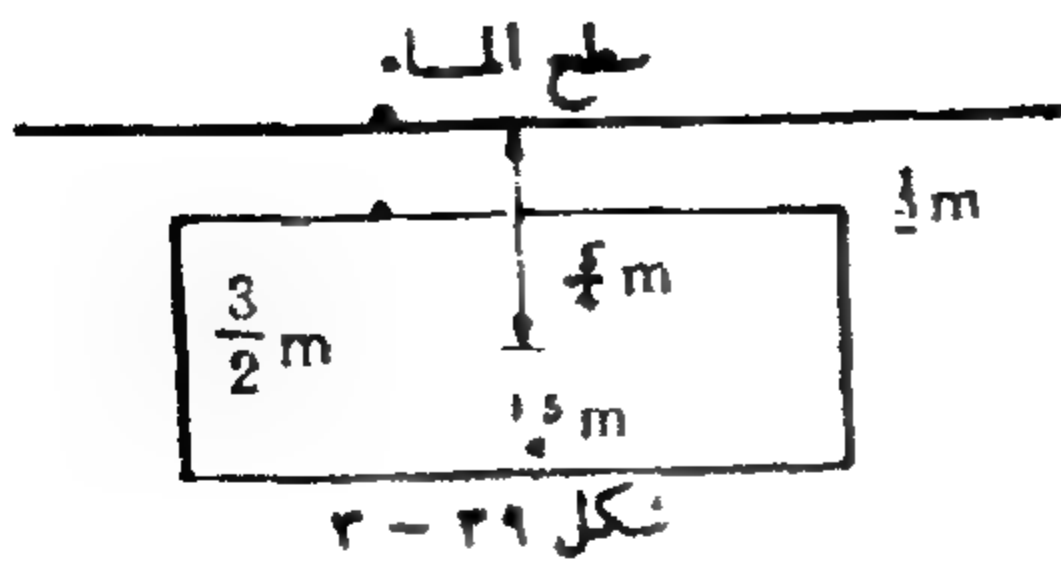
سطح الماء



شكل ٢٩ - ٢

١ - أوجد القوة المؤثرة على أحد وجهي مستطيل مغمور

في الماء كما في الشكل ٢٩ - ٢، عنماً بأن  $1 \text{ m}^3$  من الماء بزن  $1000 \text{ Kg}$  وهذا يساوي قوة مقدارها  $9800 \text{ newtons}$ .



إن مساحة السطح المنغورة  $0.5 \times 2 = 1 \text{ m}^2$  ويقع مركزها المتوسط على عمق  $0.25 \text{ m}$  تحت سطح الماء وبالتالي فإن القوة  $F = \text{الوزن النوعي} \times \text{المساحة} \times \text{عمق المركز المتوسط أي:}$

$$F = 9800 \text{ Nm}^{-3} \times 1 \text{ m}^2 \times 0.25 \text{ m} = 2450 \text{ N}$$

٢- أوجد القوة المؤثرة على أحد وجهي مستطيل منغور في الماء كما في الشكل ٣٩ - ٢ .  
إن مساحة السطح المنغور  $45/8 \text{ m}^2$  ، ويقع المركز المتوسط على عمق  $5/4 \text{ m}$  تحت سطح الماء . إذن :

$$F = 9800 \text{ Nm}^{-3} \times 45/8 \text{ m}^2 \times 5/4 \text{ m} = 68906.25 \text{ N}$$

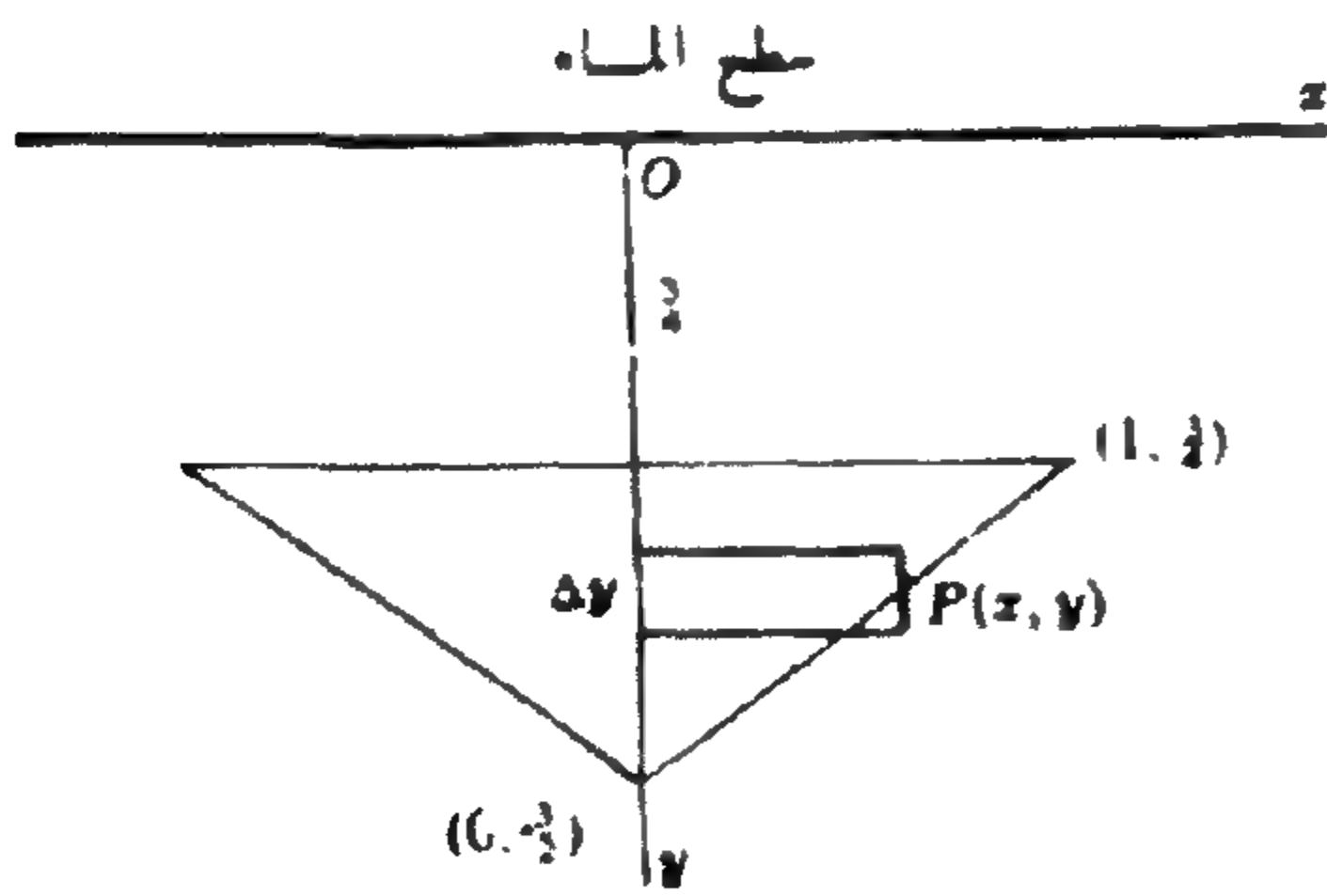
٣- أوجد القوة المؤثرة على أحد وجهي المثلث المبين في الشكل ٣٩ - ٤ ، علماً بأن وحدة الطول هي metres وأن الوزن النوعي السائل هو :  $w = 8000 \text{ Nm}^{-3}$

الحل الأول : إن السطح المنغور محدد بالمستقيات  $3x + 2y = 5/2$  ،  $x = 0$  ،  $y = 1/2$

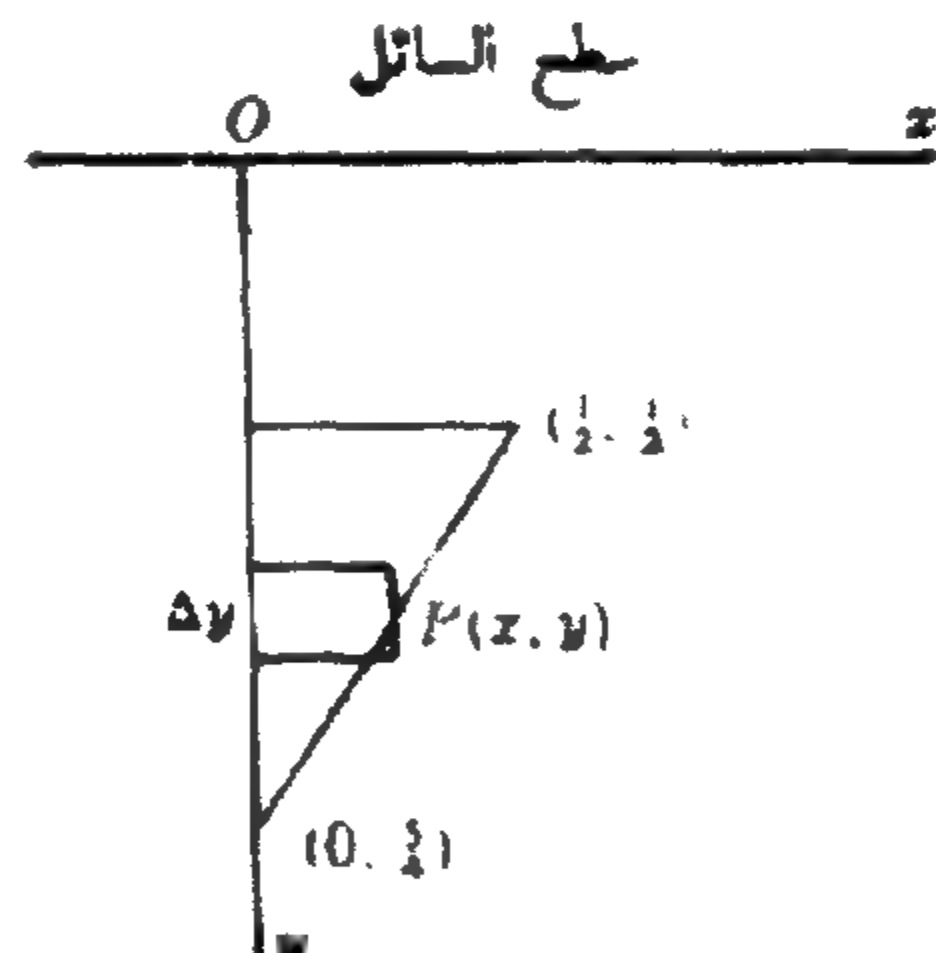
وإن القوة المؤثرة على المستطيل المقرب الذي مساحته  $x \cdot \Delta y$  وعمقه  $y$  تساوي  $w \cdot y \cdot x \cdot \Delta y = w \cdot y \left( \frac{5-4y}{6} \right) \Delta y$  . إذن :

$$F = w \int_{1/2}^{5/4} y \left( \frac{5}{6} - \frac{2y}{3} \right) dy = \frac{5}{64} w = 1125 \text{ N}$$

الحل الثاني : إن مساحة السطح المنغور تساوي  $3/16 \text{ m}^2$  وإن المركز المتوسط على عمق  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left( \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4} \text{ m}$  تحت سطح السائل وبالتالي فإن :  $F = 8000 \times \frac{3}{16} \times \frac{3}{4} = 1125 \text{ N}$



شكل ٣٩ - ٥



شكل ٣٩ - ٦

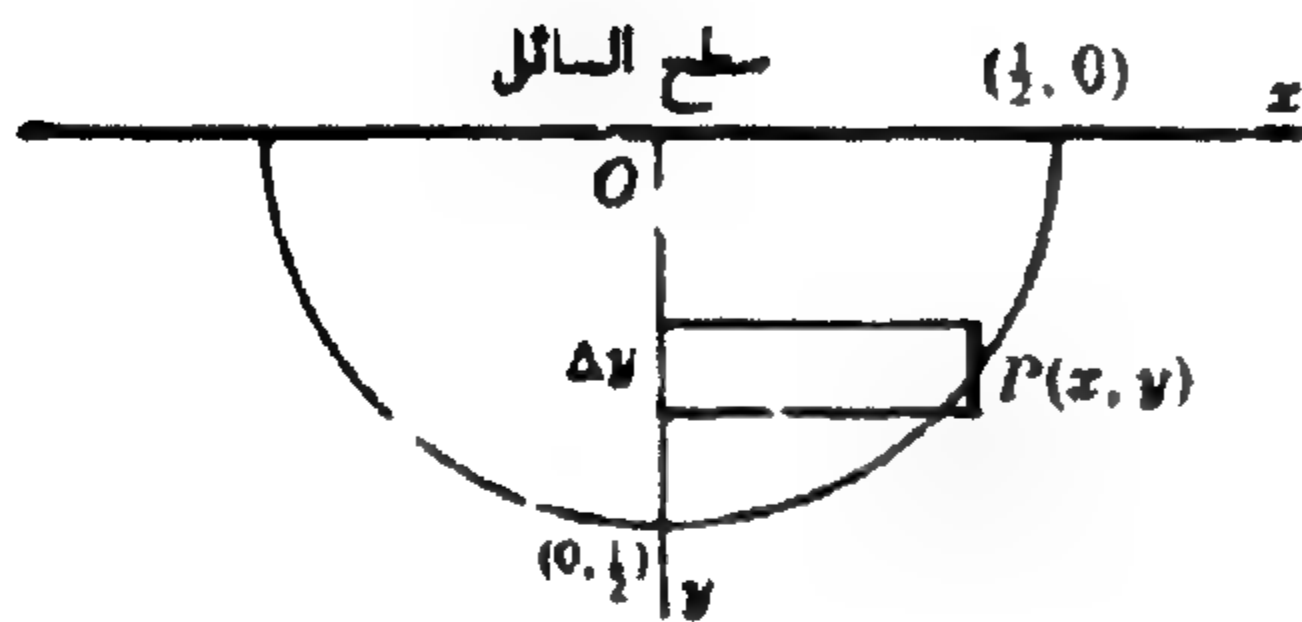
٤- صفيحة مثلثة الشكل أطوال أضلاعها  $5/4 \text{ m}$  و  $5/4$  و  $2$  وضعت رأسها في الماء بحيث كان أطول أضلاعها لأعلى وبشكل أفق وعلى عمق  $3/4 \text{ m}$  تحت سطح الماء . احسب القوة المؤثرة على أحد جانبي الصفيحة . أنظر إلى الشكل ٣٩ - ٥ .

الحل الأول : نأخذ المحورين الإحداثيين كما في الشكل ٣٩ - ٥ . ونلاحظ أن القوة المطلوبة تساوي ضعف القوة المؤثرة على السطح المحدد بالمستقيات  $3x + 4y = 6$  ،  $x = 0$  ،  $y = 3/4$  . إن مساحة المستطيل المقرب  $x \cdot \Delta y$  وعمقه المتوسط  $y$  وبالتالي فإن  $\Delta F = w \cdot y \cdot x \cdot \Delta y = w \cdot y (2 - 4y/3) \Delta y$  ومنه :

$$F = 2w \int_{3/4}^{3/2} y \left(2 - \frac{4}{3}y\right) dy = \frac{3}{4} w = 7350 \text{ N}$$

الحل الثاني : إن مساحة السطح المنحني  $3/4 \text{ m}^2$  والمركز المتوسط على عمق  $3/4 + 1/3(3/4) = 1 \text{ m}$  تحت سطح الماء . وبالتالي فإن :

$$F = 9800 \times 3/4 \times 1 = 7350 \text{ N}$$



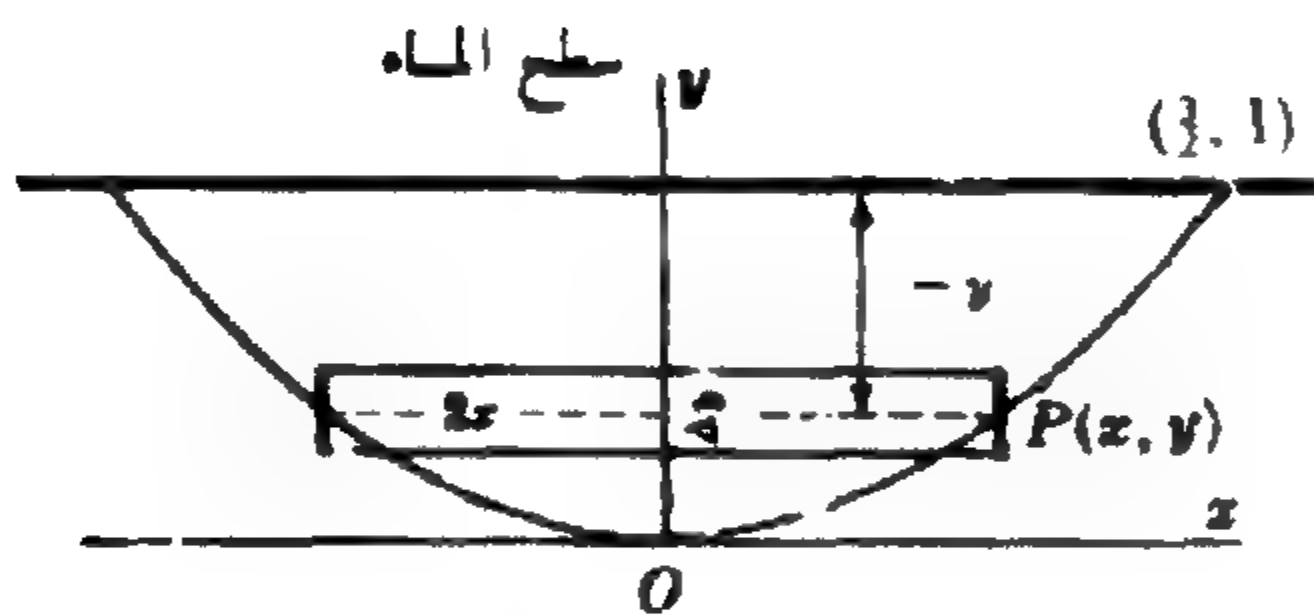
شكل ٢٩ - ٦

٥- أوجد القوة المؤثرة على جدار حوض على شكل نصف دائرة نصف قطرها  $1/2 \text{ m}$  عندما تملؤه بسائل وزنه النوعي

$$w = 9600 \text{ Nm}^{-3}$$

باختيار المحورين الاحداثيين كما في الشكل ٢٩ - ٦ نجد أن القوة المؤثرة على المستطيل المقرب تساوي  $w y \sqrt{1/4 - y^2} \Delta y$  . وبالتالي فإن

$$F = 2w \int_0^{1/2} y \sqrt{1/4 - y^2} dy = \frac{1}{12} w = 800 \text{ N}$$



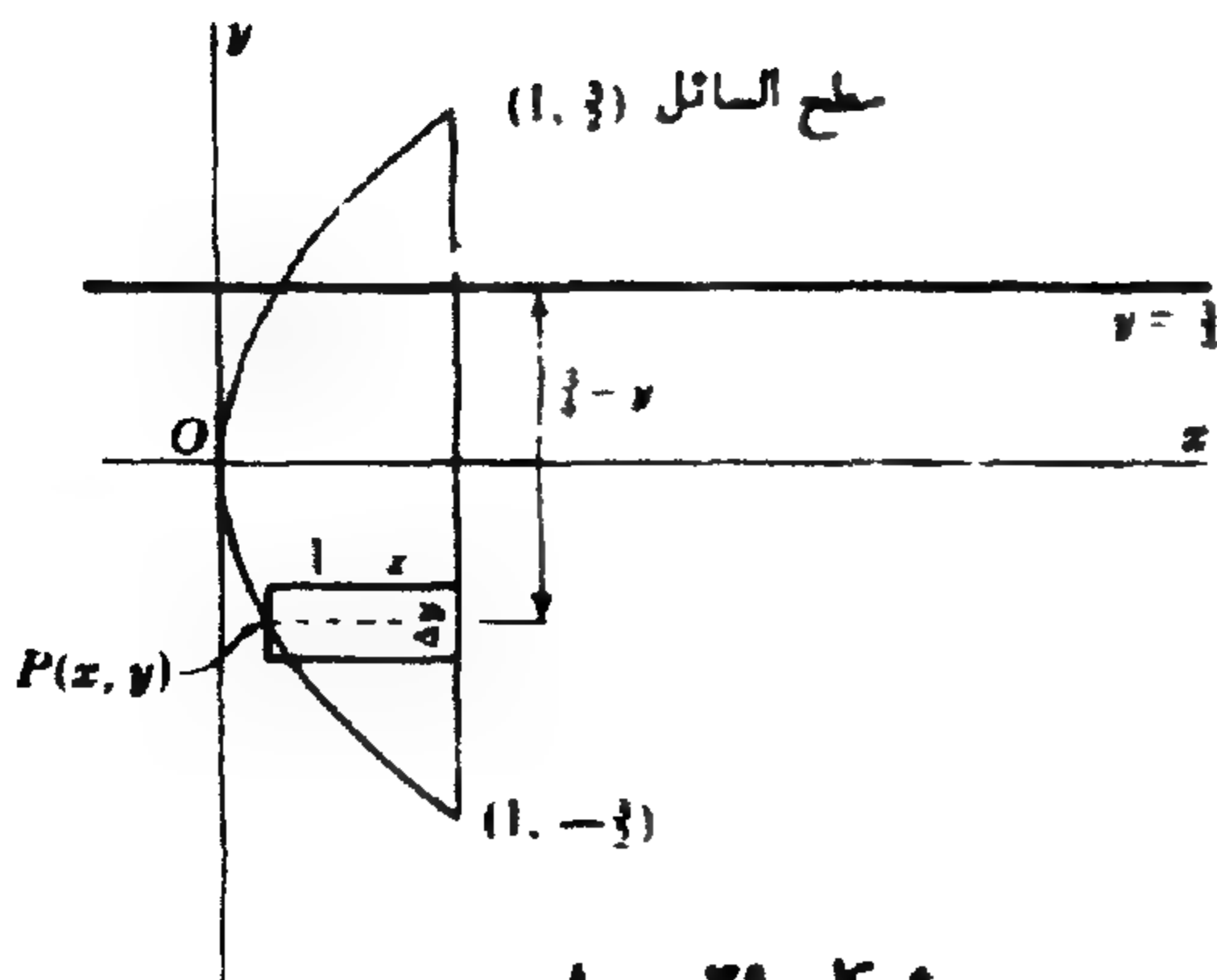
شكل ٢٩ - ٧

٦- سفيحة على شكل قطع مكافئ قاعدتها  $3 \text{ m}$  وارتفاعها  $1 \text{ m}$  غمرت في الماء بحيث تقع قاعدتها على سطح الماء . أوجد القوة المؤثرة على وجه السفيحة .

باختيار المحورين الاحداثيين كما في الشكل ٢٩ - ٧ تكون معادلة القطع المكافئ  $4x^2 = 9y$  ومساحة المستطيل المقرب  $2x \cdot \Delta y$  والعمق المتوسط  $1 - y$  لذلك :

$$\Delta F = 2w(1-y)x \cdot \Delta y = w(1-y) \cdot 3\sqrt{y} \Delta y$$

$$F = 3w \int_0^1 (1-y)\sqrt{y} dy = \frac{4}{5} w = 7820 \text{ N}$$



شكل ٢٩ - ٨

٧- أوجد القوة المؤثرة على سفيحة المسألة ٦ إذا كانت هذه السفيحة منسوبة جزئياً في سائل وزنه النوعي  $w = 7680 \text{ Nm}^{-3}$  بحيث يكون محورها موازياً لسطح السائل ويقع على عمق  $3/4 \text{ m}$  تحت سطح السائل .

باختيار المحورين الاحداثيين كما في الشكل ٢٩ - ٨ تكون معادلة القطع المكافئ  $9x^2 = 4y$  .

ومساحة المستطيل المقرب  $(1-x) \Delta y$  وعمقه المتوسط  $3/4 - y$  والقوة المؤثرة عليه هي :

$$\Delta F = w \left( \frac{3}{2} - y \right) (1 - x) \Delta y = w \left( \frac{3}{2} - y \right) \left( 1 - \frac{4y^2}{9} \right) \Delta y$$

$$F = w \int_{-3/2}^{3/2} \left( \frac{3}{2} - y \right) \left( 1 - \frac{4y^2}{9} \right) dy$$

ومنه :

$$= \frac{405}{256} w = 12150 \text{ N}$$

### مسائل إضافية

٨- صفيحة مستطيلة الشكل ببعديها  $1.5 \text{ m} \times 2 \text{ m}$  غرست رأسياً في سائل ووزنه النوعي  $w \text{ Nm}^{-3}$ . أوجد القوة المؤثرة على أحد وجهيها.

(أ) إذا كان الضلع الأقصر لأعلى ويقع على سطح السائل.

(ب) إذا كان الضلع الأقصر لأعلى ويقع على عمق  $0.5 \text{ m}$  تحت سطح السائل.

(ج) إذا كان الضلع الأكبر لأعلى ويقع على سطح السائل.

(د) إذا كانت السفيحة مائلة بمجلى من إحدى زواياها بحيث تكون هذه الزاوية على عمق  $0.4 \text{ m}$  تحت سطح السائل.

ج : (أ)  $3w \text{ N}$  (ب)  $4.5w \text{ N}$  (ج)  $2.25w \text{ N}$  (د)  $5.25w \text{ N}$

٩- بفرض أن المحور  $x$  أفقى والمحور  $y$  رأسى لأسفل، أوجد القوة المؤثرة على أحد جانبي كل من المساحات التالية. وحدة الطول هي metres والوزن النوعي لسائل  $w \text{ Nm}^{-3}$ .

(أ) $y = 4x^2, y = 1$	سطح السائل عند $y = 0$ .	ج	$2w/5 \text{ N}$
(ب) $y = 4x^2, y = 1$	سطح السائل عند $y = -0.5$ .	ح	$11w/15 \text{ N}$
(ج) $y = 1 - 4x^2, y = 0$	سطح السائل عند $y = 0$ .	ج	$4w/15 \text{ N}$
(د) $y = 1 - 4x^2, y = 0$	سطح السائل عند $y = -0.75$ .	ح	$23w/30 \text{ N}$
(هـ) $y = 1 - 4x^2, y = 0.5$	سطح السائل عند $y = -0.25$ .	ج	$19\sqrt{2}w/120 \text{ N}$

١٠- حوض مقطوع على شكل شبه منحرف عرضه  $0.5 \text{ m}$  عند القاع و  $1 \text{ m}$  عند القمة وعمق الحوض  $0.75 \text{ m}$ . أوجد القوة المؤثرة على أحد طرفيه (أ) إذا كان الحوض مملوفاً بالماء. (ب) إذا كان يحوى ماء إلى ارتفاع  $0.5 \text{ m}$ .

ج : (أ)  $1837.5 \text{ N}$  (ب)  $7.446 \text{ N}$

١١- صفيحة دائرية الشكل نصف قطرها  $0.5 \text{ m}$ ، أنزلت في سائل (وزنه  $w \text{ Nm}^{-3}$ ) بحيث يقع مركزها على عمق  $1 \text{ m}$  تحت سطح السائل. أوجد القوة المؤثرة على النصف الأسفل للصفيحة والقوة المؤثرة على النصف الأعلى.

ج :  $(\frac{5}{8} + \frac{1}{12})w \text{ N}$  ،  $(\frac{5}{8} - \frac{1}{12})w \text{ N}$

١٢ - خزان اسطوانى نصف قطره  $m$  2 ويستند على جانبه . فإذا كان هذا الخزان يحوى زيتا وزنه النوعى  $Nm^{-3}$  وإلى عمق  $m$  3 فأوجد القوة المؤثرة على أحد طرفيه . ج :  $(\frac{8}{3}\pi + 9\sqrt{3})wN$

١٣ - نعرف مركز الضغط لقطعة السطح المستوية فى الشكل ٢٩ - ١ على أنها النقطة  $(\bar{x}, \bar{y})$  التى إذا أثرت فيها قوة متمركزة قياسها  $F$  فإنها تعطى نفس العزم بالنسبة لأى مستقيم أفقى (رأسى) الذى تعطيه القوى الموزعة .

$$F\bar{y} = w \int_0^h y^2 x dy \quad \text{و} \quad F\bar{x} = \frac{1}{2} w \int_0^h y x^2 dy \quad (i)$$

(ب) بين أن عمق مركز الضغط تحت سطح السائل يساوى عزم القصور الذاتى للسطح مقسوما على العزم الأول لهذه القطعة بالنسبة لمستقيم واقع على سطح السائل .

١٤ - استخدم الجزء (ب) من المسألة (١٢) لتحديد عمق مركز الضغط تحت سطح السائل (١) للمألة ٥ ،

(ب) للمألة ٦ ، (ج) للمألة ٧ ، (د) للمألة ٩ (١) ، (ج) للمألة ٩ (ب)

ج :

(١)  $3\pi/32$  ، (ب)  $4/7$  ، (ج)  $32/25$  ، (د)  $5/7$  ، (هـ)  $179/154$



# الفصل الأربعون

## الشغل

**القوة الثابتة :** الشغل  $W$  الذي تبذله قوة ثابتة  $F$  تؤثر لمسافة متجهة  $s$  على خط مستقيم يساوى  $F \cdot s$  وحدة .  
**القوة المتغيرة :** لنفرض الآن أن القوة متغيرة باستمرار وتؤثر في خط مستقيم . لنمرر  $x$  لمسافة الموجهة لنقطة تأثير القوة عن نقطة ثابتة على المستقيم ولنفرض أن القوة مطاة على شكل دالة  $F(x)$  في  $x$  .



شكل ١ - ١

لإيجاد الشغل المبذول عندما تتحرك نقطة التأثير من  $x = a$  إلى  $x = b$  :  
 (أ) قسم الفترة  $a \leq x \leq b$  إلى  $n$  من الفترات الجزئية طول كل منها  $\Delta_k x$  ولنفرض  $x_k$  نقطة ما على الفترة الجزئية  $k$  .  
 (ب) نفرض أن القوة تبقى ثابتة أثناء الإزاحة على طول الفترة الجزئية وأنها تساوى  $F(x_k)$  . إذن الشغل المبذول أثناء هذه الإزاحة يساوى  $F(x_k) \Delta_k x$  ، والشغل الكلى المبذول الناتج من مجموعة القوى الـ  $n$  المفروضة يساوى :

$$\sum_{k=1}^n F(x_k) \Delta_k x.$$

(ج) نجعل عدد الفترات الجزئية يزداد إلى ما لا نهاية بحيث تقرب كل  $\Delta_k x$  إلى الصفر ، ونطبق النظرية الأساسية لنحصل على :

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(x_k) \Delta_k x = \int_a^b F(x) dx$$

## مسائل محلولة

١ - إن القوة اللازمة لإطالة زنبرك ، لحود معينة ، تتناسب مع الاستطالة الناتجة . ويسمى ثابت التناسب معامل الزنبرك ، فإذا كان يلزم لزنبرك مفروض طوله 25 cm قوة قدرها 100 N كي يستطيل 0.5 cm ، فاحسب الشغل المبذول لاستطالة الزنبرك من 27 cm إلى 30 cm .

نرمز به  $x$  للاستطالة فنبتخذ يكون  $F(x) = kx$  .

وعندما  $x = 0.5$  يكون  $F(x) = 100$  وبالتالي فإن  $k = 200$  و  $30x$

والشغل اللازم بذله لاستطالة قدرها  $\Delta x$  يساوى  $200x \cdot \Delta x$  والشغل الكلى اللا

$$W = \int_{27}^{30} 200x dx = 2100 \text{ cmN} = 21 \text{ J}$$

- ٢ - إذا كان معامل زنبرك  $4 \text{ MNm}^{-1}$  . أوجد الشغل اللازم بذله لضغط الزنبرك  $0.025 \text{ m}$  .  
نفرض أن  $x$  مقدار الإزاحة للطرف الحر للزنبرك بالأمتار عندئذ يكون  $F(x) = 4,000,000 x$  ويكون الشغل اللازم بذله لإزاحة  $\Delta x$  هو  $4,000,000 x \cdot \Delta x$  وبالتالي :

$$W = \int_0^{0.025} 4,000,000 x dx = 1250 \text{ J}$$

- ٣ - يزن كابل  $40 \text{ Nm}^{-1}$  ينفلت من ملفه اسطوانة . فإذا كان  $15 \text{ m}$  قد أفلتت مسبقاً فما الشغل الذى تبذله قوة الجاذبية كى يفلت  $75 \text{ m}$  إضافياً .

نفرض أن  $x$  طول الجزء المفلت من الحبل فى لحظة  $t$  . عندئذ يكون  $F(x) = 40x$  ويكون :

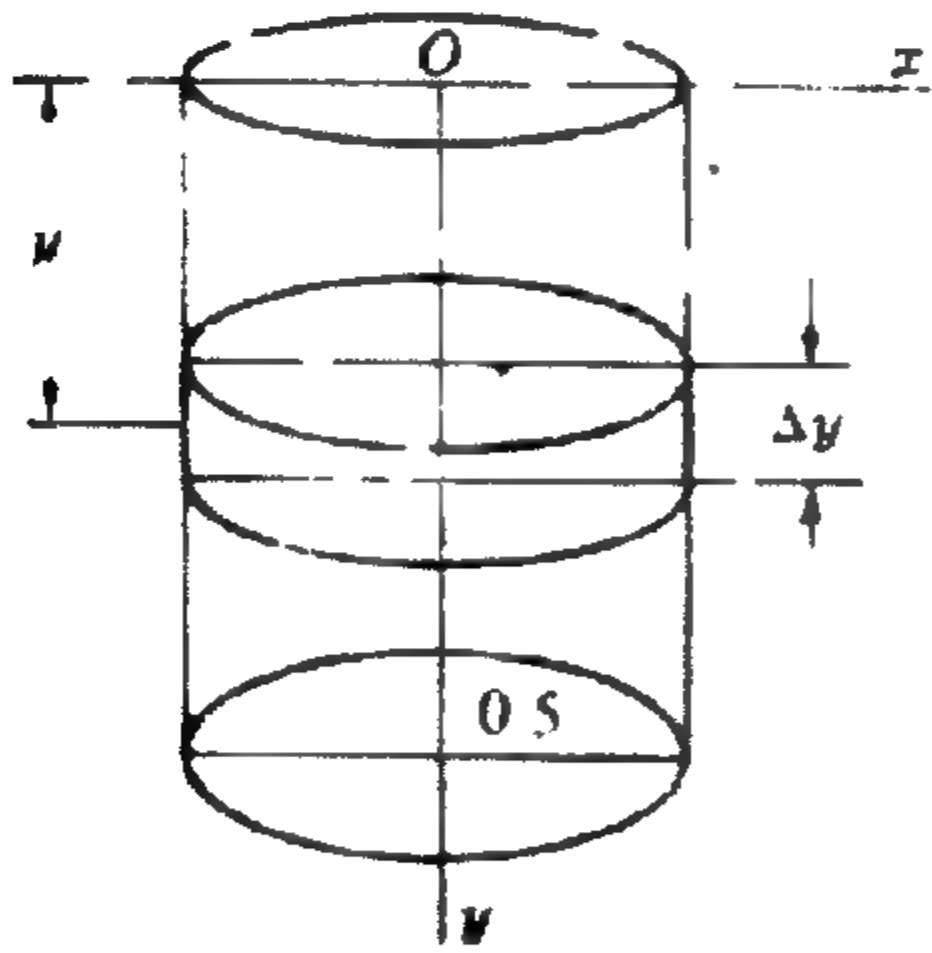
$$W = \int_0^{75} 40x dx = 157500 \text{ J}$$

- ٤ - كابل طوله  $30 \text{ m}$  ويزن  $70 \text{ Nm}^{-1}$  يرتبط بطرف هذا الكابل وزن مقداره  $700 \text{ N}$  . أوجد الشغل اللازم لف  $24 \text{ m}$  من الكابل على ملف .

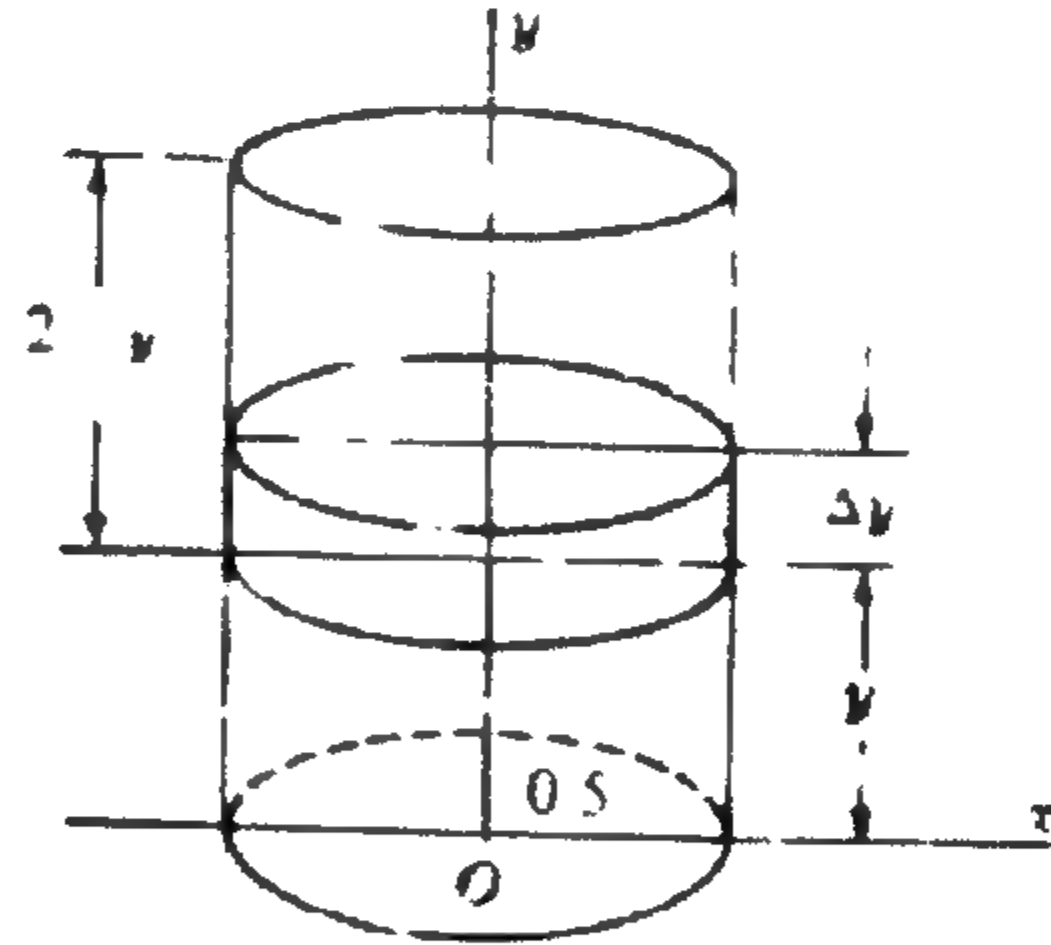
إن الوزن الكلى ( جزء الكبل غير الملفوف مع الوزن ) يساوى  $70(30 - x) = 4900 - 70x$  .  
والشغل اللازم لرفع الوزن مسافة  $\Delta x$  هو  $(4900 - 70x) \Delta x$  . والشغل المطلوب إذن :

$$W = \int_0^{24} (4900 - 70x) dx = 97440 \text{ J}$$

- ٥ - خزان اسطوانى دائرى قائم نصف قطره  $0.5 \text{ m}$  وارتفاعه  $2 \text{ m}$  مملوء بالماء . أوجد الشغل اللازم لتفريغ الماء من أعلى الخزان . بفرض أن الوزن النوعى للماء  $9800 \text{ Nm}^{-3}$  .



شكل ٤ - ٢



شكل ٤ - ٢

الحل الأول : لنظر إلى الشكل ٤ - ٢ ولنتصور أن الماء دفع خارجاً بواسطة مكبس أجبر على الحركة لأعلى بدءاً من أسفل الخزان . ويوضح الشكل ٤ - ٢ المكبس بدءاً من ارتفاع مسافة قدرها  $y \text{ m}$  من أسفل الخزان . إن القوة الرافعة تساوى وزن الماء فوق المكبس وهى تساوى تقريباً  $\frac{1}{4} \pi w (2 - y)$  . والشغل اللازم لإزاحة المكبس مقدار  $\Delta y$  يساوى تقريباً  $\frac{1}{4} \pi w (2 - y) \Delta y$  . وبذلك يكون الشغل اللازم لإفراغ الماء من أعلى الخزان :

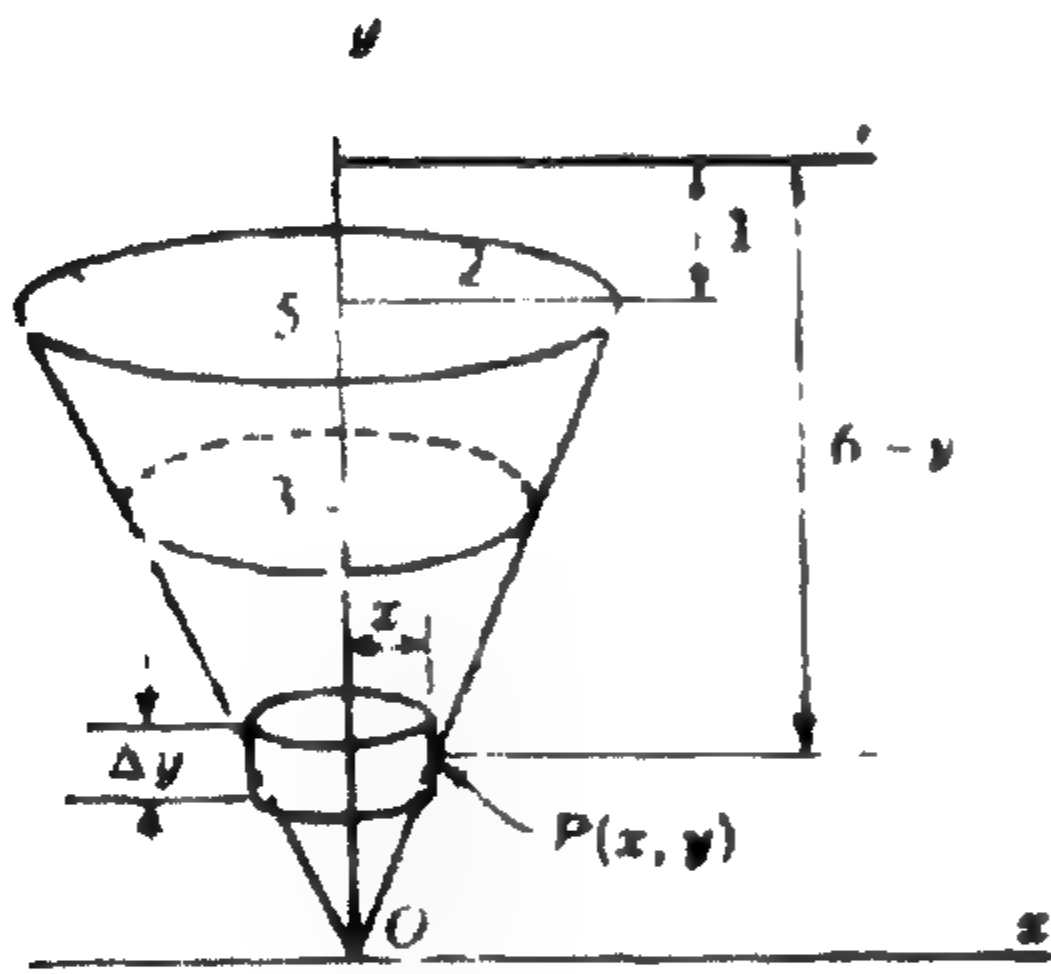
$$W = \frac{1}{4} \pi w \int_0^2 (2 - y) dy = \frac{1}{4} \pi w = \frac{1}{4} \pi (9800) = 4900\pi \text{ J}$$

الحل الثاني : لننظر إلى الشكل ٤٠ - ٣ ولنتصور أن الماء مجزأ إلى  $n$  اسطوانة صغيرة ارتفاع كل منها  $\Delta y$  وأنه يتم تفريغ الخزان برفع كل اسطوانة إلى القمة . لنحسب الشغل اللازم لرفع الاسطوانة الممثلة المبينة في الشكل ٤٠ - ٣ . والذي بعدها المتوسط عن الدف  $y$  ووزنها  $\frac{1}{4}\pi w \Delta y$  . إذن الشغل اللازم لرفعها إلى القمة  $\frac{1}{4}\pi w y \Delta y$  . وبالمجموع بالنسبة للأسطوانات الـ  $n$  وتطبيق النظرية الأساسية نجد :

$$W = \frac{1}{4}\pi w \int_0^3 y dy = \frac{1}{2}\pi w = 4900\pi \text{ J.}$$

٦ - يتسبب تمدد الغاز في اسطوانة في تحريك المكبس فإذا زاد حجم الغاز المحصور من  $250 \text{ cm}^3$  إلى  $400 \text{ cm}^3$  . بفرض أن العلاقة بين الضغط  $(p \text{ Ncm}^{-2})$  والحجم  $(v \text{ m}^3)$  هي  $pv^{1.4} = 3000$  فأه حد الشغل المبذل .  
إذا رمزنا بـ  $A$  لمساحة المقطع الاسطوانة فإن  $pA$  تساوى مقدار القوة المؤثرة بالغاز . وإذا زاد الحجم بمقدار  $\Delta v$  فإن المكبس قد تحرك مسافة  $\Delta v/A$  والشغل اللازم لهذه الإزاحة هو  $pA \cdot \frac{\Delta v}{A} = \frac{3000}{v^{1.4}} \Delta v$  . إذن :

$$W = 3000 \int_{0.25}^{0.4} \frac{dv}{v^{1.4}} = -\frac{3000}{0.4} v^{-0.4} \Big|_{0.25}^{0.4} = -7500 \left( \frac{1}{25^{0.4}} - \frac{1}{0.4^{0.4}} \right) = 1.5 \text{ J}$$



شكل ٤٠ - ٤

٧ - وعاء مخروطي الشكل قطر قاعدته العليا  $4 \text{ m}$  وعمقه  $5 \text{ m}$  . فإذا كان هذا الوعاء يحوى سائلا وزنه النوعي  $w \text{ Nm}^{-3}$  وعمقه  $3 \text{ m}$  . فأوجد الشغل اللازم لضخ هذا السائل من موضع يعلو  $1 \text{ m}$  فوق قمة الوعاء .

لننظر للأسطوانة الممثلة في الشكل ٤٠ - ٤ والتي نصف قطرها  $x$  وارتفاعها  $\Delta y$  ومتوسط بعدها من أسفل الإناء  $y$  . إن وزن هذه الاسطوانة  $\Delta y \pi w x^2$  والشغل اللازم لرفعها إلى الارتفاع المطاوب  $\pi w x^2 (6-y) \Delta y$  .

ومن تشابه المثلثات نجد  $x/y = 2/5$  أو  $x = 2/5 y$  .

إذن :

$$W = \frac{4}{25} \pi w \int_1^3 y^2 (6-y) dy = \frac{27}{5} \pi w \text{ J}$$

### مسائل إضافية

٨ - إذا أثرت قوة مقدارها  $360 \text{ N}$  على زنبرك طوله  $4 \text{ m}$  فأحدثت استطالة مقدارها  $0.3 \text{ m}$  ، فأوجد الشغل اللازم لاستطالة الزنبرك : (أ) من  $4 \text{ m}$  إلى  $5 \text{ m}$  (ب) من  $5 \text{ m}$  إلى  $5.3 \text{ m}$  .

ج : (أ)  $600 \text{ J}$  (ب)  $414 \text{ J}$  .

٩ - جسمان يجذبان كل منهما الآخر بقوة تتناسب عكسيا مع مربع المسافة بينهما ، فإذا بقى أحدهما ثابتا في موضع على المحور  $x$  واقع على يمين نقطة الأصل ويبعد عنها بمقدار وحدتين ، فأوجد الشغل اللازم لتحريك الجسم الآخر على المحور  $x$  من الموضع الذي يقع على يسار نقطة الأصل ويبعد عنها ثلاثة وحدات إلى نقطة الأصل .

ج :  $3k/10$  .

١٠ - تقدر القوة التي تجذب بها الكرة الأرضية كتلة مقدارها  $w$  kg تبعد مسافة  $s$  km عن مركزها بـ  $F = 9.8 (6400)^2 w/s^2$  . بفرض أن نصف قطر الأرض  $6400$  km . أوجد الشغل اللازم بذله ضد قوة الجاذبية لتحريك كتلة  $1$  kg من سطح الأرض إلى نقطة تبعد  $1600$  km عن السطح

ج :  $12.5 \text{ MJ} = 12544 \text{ kmN}$  (تقريباً) .

١١ - أوجد الشغل اللازم بذله ضد قوة الجاذبية لتحريك صاروخ كتلته  $8000$  kg إلى ارتفاع  $320$  km فوق سطح الأرض .

ج :  $23.9 \text{ GJ} = 23.9 \times 10^9 \text{ kmN}$  .

١٢ - أوجد الشغل اللازم لرفع  $500$  kg فحم من منجم عمقه  $500$  m بواسطة ميل يزن  $30 \text{ Nm}^{-1}$  .  
ج :  $6.2 \text{ MJ}$  .

١٣ - صيريج مقطعة  $2.5 \text{ m}^2$  أمتار وعمقه  $2$  m . أوجد الشغل اللازم لتفريغه من أعلاه إذا كان (أ) مليئاً بالماء .  
(ب) مليئاً إلى ثلاثة أرباعه فقط بالماء .

ج : (أ)  $125\,000 \text{ J}$  (ب)  $117\,187.5 \text{ J}$

١٤ - خزان على شكل نصف كرة نصف قطرها  $1$  m مملوء بالماء . (أ) أوجد الشغل اللازم لتفريغ الماء من أعلى الخزان . (ب) أوجد الشغل اللازم لتفريغه بواسطة أنبوب يرتفع  $0.5$  m فوق سقف الخزان .

ج : (أ)  $2500 \pi \text{ J}$  (ب)  $5833 \pi \text{ J}$  .

١٥ - ما هو الشغل اللازم لملء خزان اسطوانى قائم نصف قطره  $1$  m وارتفاعه  $3$  m بسائل ورنه النوعى  $w \text{ Nm}^{-3}$  وذلك بواسطة فتحة في أسفله ؟ وكم يكون هذا الشغل إذا كان الخزان أفقياً .

ج :  $9/2 \pi w \text{ J}$  .  $3 \pi w \text{ J}$  .

١٦ - بين أن الشغل اللازم لتفريغ خزان ما متوالياً للثقل اللازم لرفع محتواه من مركز ثقل السائل إلى الموضع الذى يفرغ منه السائل .

١٧ - يراد سحب كتلة مقدارها  $100$  kg مسافة  $20$  m على مستوى يميل  $30^\circ$  عن الأفقى . احسب الشغل اللازم بفرض أن قوة الاحتكاك التي تعاكس الحركة هي  $N\mu$  حيث  $\mu = 1/\sqrt{3}$  هو معامل الاحتكاك و  $N = 980 \cos 30^\circ$  هو رد فعل المستوى .

ج :  $19600 \text{ J}$  .

١٨ - حل المسألة ١٧ بفرض أن المستوى يميل  $45^\circ$  عن الأفقى وأن معامل الاحتكاك  $\mu = 1/\sqrt{2}$  .

ج :  $9800(1 + \sqrt{2}) \text{ J}$  .

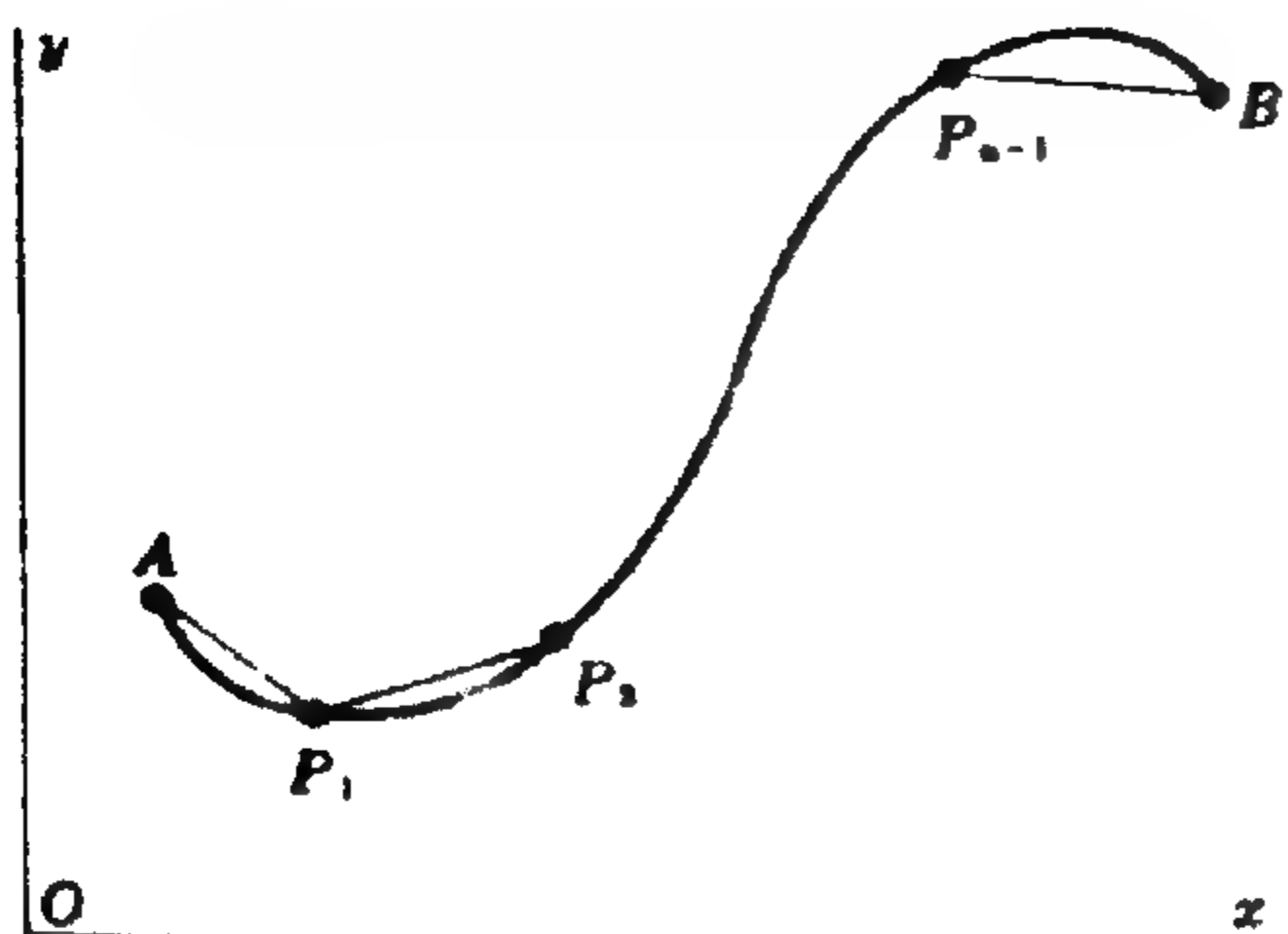
١٩ - اسطوانة مكبس تحتوى هواء . فإذا كان حجم الهواء تحت ضغط  $1000 \text{ Nm}^{-2}$  يساوى  $3 \text{ m}^3$  . أوجد الشغل المبذول على المكبس لضغط الهواء إلى الحجم  $0.06 \text{ m}^3$  .

(أ) بفرض أن  $p \propto v^{-1.4}$  ثابت (ب) بفرض أن  $p \propto v^{-1.4}$  ثابت .

ج :  $11\,735.7 \text{ J}$  (ب)  $28\,365 \text{ J}$  .

# الفصل الحادى والأربعون

## طول قوس



طول قوس  $AB$  لمنحنى هو بالتعريف نهاية مجموع أطوال مجموعة من الأوتار المتتالية  $AP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}B$  .  
تصل بين نقط على القوس ، عندما يزداد عدد النقط إلى ما لا نهاية بحيث يؤول طول كل وتر إلى الصفر .

وإذا كانت  $A(a, c)$  و  $B(b, d)$  نقطتين على المنحنى  $y = f(x)$  حيث  $f(x)$  ومشتقها الأول  $f'(x)$  متصلتان في الفترة  $a \leq x \leq b$  فإن طول القوس  $AB$  يعطى بـ

شكل ١ -

$$s = \int_{AB} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

وبالمثل إذا كانت  $A(a, c)$  و  $B(b, d)$  نقطتين على المنحنى  $x = g(y)$  حيث  $g(y)$  ومشتقها الأولى بالنسبة لـ  $y$  متصلتان في الفترة  $c \leq y \leq d$  فإن طول القوس  $AB$  يعطى بـ :

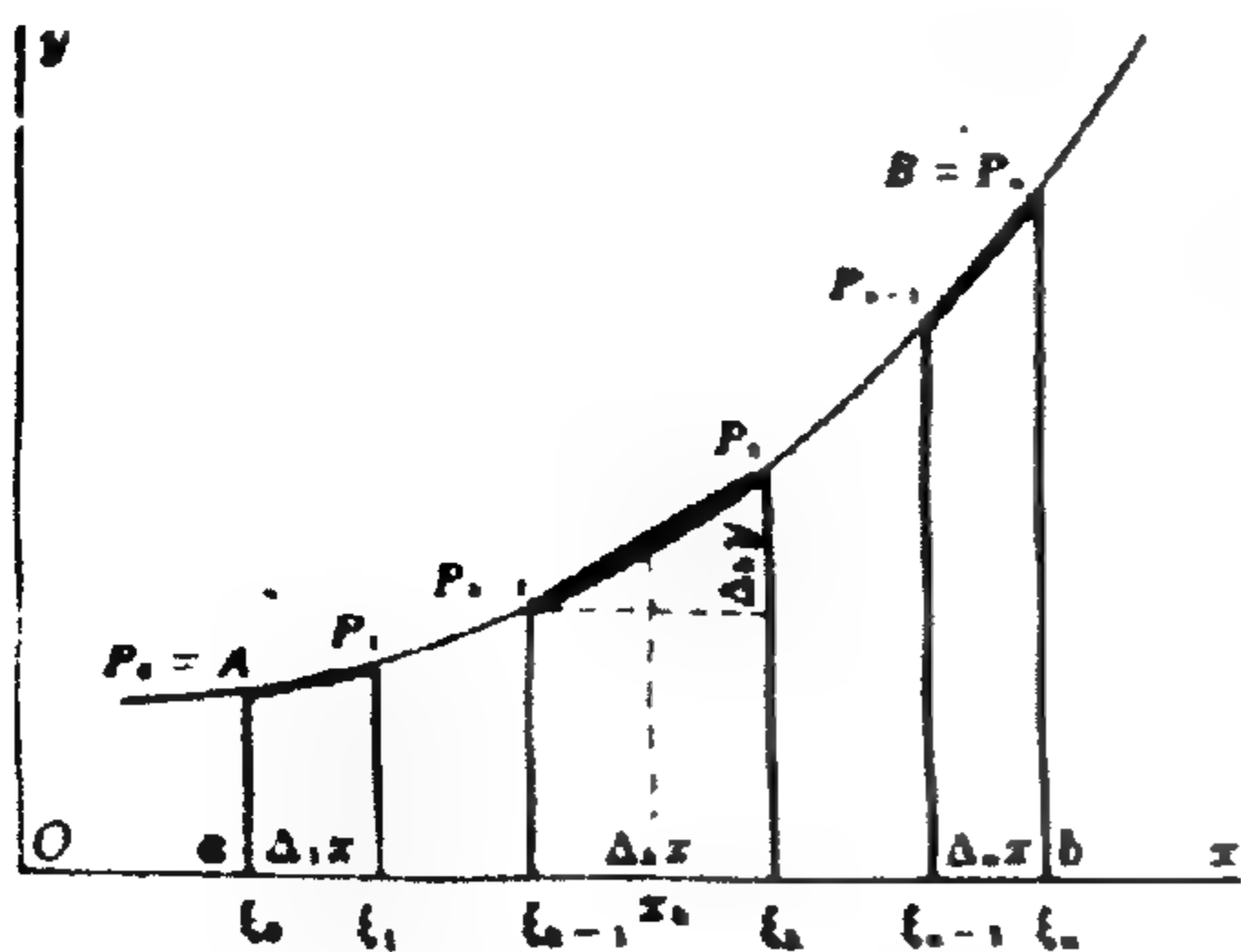
$$s = \int_{AB} ds = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

أما إذا كانت  $A(u = u_1)$  و  $B(u = u_2)$  نقطتين من منحنى معطى بالتحويل البارامتري  $x = f(u)$  و  $y = g(u)$  وإذا كانت شروط الاتصال محققة فإن طول القوس  $AB$  يعطى بـ :

$$s = \int_{AT} ds = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

لبرهان أنظر المسألة ١ .

## مسائل محلولة



شكل ٢ -

استنتج الصيغة التى تعطى طول القوس :

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

لتفرض أن الفترة  $a \leq x \leq b$  قسمت إلى  $n$  من الفترات الجزئية بالنقط  $\xi_0 = a, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n = b$  وأتينا أوتاراً عمودية لتممين النقط  $P_0 = A, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n = B$  على القوس كما هو مبين فى الشكل ٢ - ٤١ . عندئذ يكون طول الوتر المثلثين بالشكل هو :

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$



واستنادا إلى قانون القيمة المتوسطة (الفصل ٢١) يوجد على القوس  $P_{k-1}P_k$  نقطة واحدة على الأقل ، ولكن

$x = x_k$  بحيث يكون ميل المماس عندها  $f'(x)$  مساويا لـ  $\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}$  وهو ميل الوتر  $P_{k-1}P_k$  وهذا يكون

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2} \Delta_k x, \quad x_{k-1} < x_k < x_k$$

• باستخدام النظرية الأساسية نجد :

$$AB = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2} \Delta_k x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

٢ - احسب طول قوس المنحنى  $y = x^{3/2}$  من  $x = 0$  إلى  $x = 5$  .

أن  $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$  ومنه يكون طول القوس :

$$s = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^5 = \frac{335}{27} \text{ units}$$

٣ - احسب طول قوس المنحنى  $x = 3y^{3/2}$  من  $y = 0$  إلى  $y = 4$  .

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{91}{4}y} dy = \frac{8}{243} (82\sqrt{82} - 1) \text{ units} \quad \text{وإن } \frac{dx}{dy} = \frac{9}{2}y^{1/2}$$

٤ - احسب طول قوس المنحنى  $24xy = x^4 + 48$  من  $x = 2$  إلى  $x = 4$  .

$$s = \frac{1}{8} \int_2^4 \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) dx = \frac{17}{6} \text{ units} \quad \text{وإن } \frac{dy}{dx} = \frac{x^4 - 16}{8x^3} \quad \text{وبالتالى } 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{64} \left(\frac{x^4 + 16}{x^2}\right)^2$$

٥ - احسب طول قوس منحنى الخصلة  $y = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$  من  $x = 0$  إلى  $x = a$  .

$$\text{وإن } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}) \quad \text{وإن } 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x/a} - 2 + e^{-2x/a}) = \frac{1}{4}(e^{2x/a} + e^{-2x/a})$$

$$s = \frac{1}{2} \int_0^a (e^{x/a} + e^{-x/a}) dx = \frac{1}{2} a [e^{x/a} - e^{-x/a}]_0^a = \frac{1}{2} a (e - 1) \text{ units}$$

٦ - احسب طول قوس القطع المكافئ  $y^2 = 12x$  المقطوع بالوتر البؤرى العمودى .

إن الطول المطلوب يساوى ضعف طول القوس من النقطة  $(0, 0)$  إلى النقطة  $(3, 6)$  .

$$\text{وإن } \frac{dx}{dy} = \frac{y}{6} \quad \text{وإن } 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{36 + y^2}{36} \quad \text{وبالتالى}$$

$$s = 2 \left(\frac{1}{6}\right) \int_0^6 \sqrt{36 + y^2} dy = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} y \sqrt{36 + y^2} + 18 \ln (y + \sqrt{36 + y^2}) \right]_0^6 = 6(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \text{ units}$$

٧ - احسب طول قوس المنحنى  $x = t^2, y = t^3$  من  $t = 0$  إلى  $t = 4$  .

$$\text{وإن } \frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 3t^2 \quad \text{وإن } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4t^2 + 9t^4 = 4t^2 \left(1 + \frac{9}{4}t^2\right)$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t^2} \cdot 2t dt = \frac{8}{27} (37\sqrt{37} - 1) \text{ units}$$

٨ - احسب طول قوس من المنحنى اللوىرى  $x = \theta - \sin \theta$ ,  $y = 1 - \cos \theta$ .  
يرسم أحد أقواس المنحنى اللوىرى عندما تتغير  $\theta$  من  $\theta = 0$  إلى  $\theta = 2\pi$ .

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 2(1 - \cos \theta) = 4 \sin^2 \frac{1}{2}\theta. \quad \text{و منه} \quad \frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta, \quad \text{ثم إن}$$

$$s = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2}\theta d\theta = -4 \cos \frac{1}{2}\theta \Big|_0^{2\pi} = 8 \text{ units}$$

### مسائل اضافية

احسب في كل من المسائل من ٩ - ٢٠ طول المنحنى كاملاً أو طول القوس المشار إليه :

- ٩ -  $y^2 = 8x^2 - 4$  من  $x=1$  إلى  $x=8$ . ج :  $(104\sqrt{13} - 125)/27$  units
- ١٠ -  $6xy = x^3 + 3$  من  $x=1$  إلى  $x=2$ . ج :  $17/12$  units
- ١١ -  $y = \ln x - 1$  من  $x=1$  إلى  $x=2\sqrt{2}$ . ج :  $3 - \sqrt{2} + \ln \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$  units
- ١٢ -  $27y^2 = 4(x-2)^2 - 12$  من  $(2,0)$  إلى  $(11,6\sqrt{3})$ . ج :  $14$  units
- ١٣ -  $y = \ln(e^x - 1)/(e^x + 1)$  من  $x=2$  إلى  $x=4$ . ج :  $\ln(e^4 + 1) - 2$  units
- ١٤ -  $y = \ln(1-x)$  من  $x=1/4$  إلى  $x=3/4$ . ج :  $\ln 21/5 - 1/2$  units
- ١٥ -  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$  من  $x=1$  إلى  $x=e$ . ج :  $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$  units
- ١٦ -  $y = \ln \cos x$  من  $x=\pi/6$  إلى  $x=1/4\pi$ . ج :  $\ln(1 + \sqrt{2})/\sqrt{2}$  units
- ١٧ -  $x = a \cos \theta$ ,  $y = a \sin \theta$ . ج :  $2\pi a$  units
- ١٨ -  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$  من  $t=0$  إلى  $t=4$ . ج :  $\sqrt{2}(e^4 - 1)$  units
- ١٩ -  $x = \ln \sqrt{1+t^2}$ ,  $y = \arctan t$  من  $t=0$  إلى  $t=1$ . ج :  $\frac{1}{2}\pi$  units
- ٢٠ -  $x = 2 \cos \theta + \cos 2\theta + 1$ ,  $y = 2 \sin \theta + \sin 2\theta$ . ج :  $16$  units

٢١ - إذا كان موضع نقطة في اللحظة  $t$  يتعين به  $x = \frac{1}{2}t^2$ ,  $y = \frac{1}{6}(6t + 9)^{3/2}$  فاحسب طول المنحنى الذى ترسمه النقطة من  $t=0$  إلى  $t=4$ .

ج :  $20$  units

٢٢ - لتكن  $P(x, y)$  نقطة ثابتة و  $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$  نقطة متغيرة على المنحنى  $y = f(x)$ . أنظر الشكل ١٧ - ١ من الفصل ١٧.

برهن أن :

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\text{arc } PQ}{\text{chord } PQ} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{ds/dx}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = 1$$

٢٣- (١) برهن أن طول قوس المنحنى  $x = a \cos^3 \theta$ ,  $y = a \sin^3 \theta$  الواقع في الربع الأول يساوى  $3a/2$ .

(ب) بين أننا لو حسبنا طول قوس (١) من المعادلة  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  فإننا نحصل على  $a^{1/3} \int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}$  الذى تصبح فيه الدالة المكاملة لانهائية عند الحد الأدنى لتكامل. سيجر معنا تكاملات محددة من هذا النمط في الفصل ٤٦.

٢٤- يمكن صياغة المسألة التى تقودنا إلى ما يسمى منحنى المطاردة على النحو التالى :

يرى كلب  $A$  في الموضع  $A(1,0)$  صاحبه في الموضع  $O(0,0)$  ماشيا على طول المحور  $y$ ، فيركض ( في الربع الأول ) ليلحق به أوجد مسار الكلب بفرض أنه يتجه دوما نحو صاحبه وأن كلا من الكلب وصاحبه يتحرك بمعدل ثابت وهو  $p$  لصاحب الكلب و  $q$  للكلب .

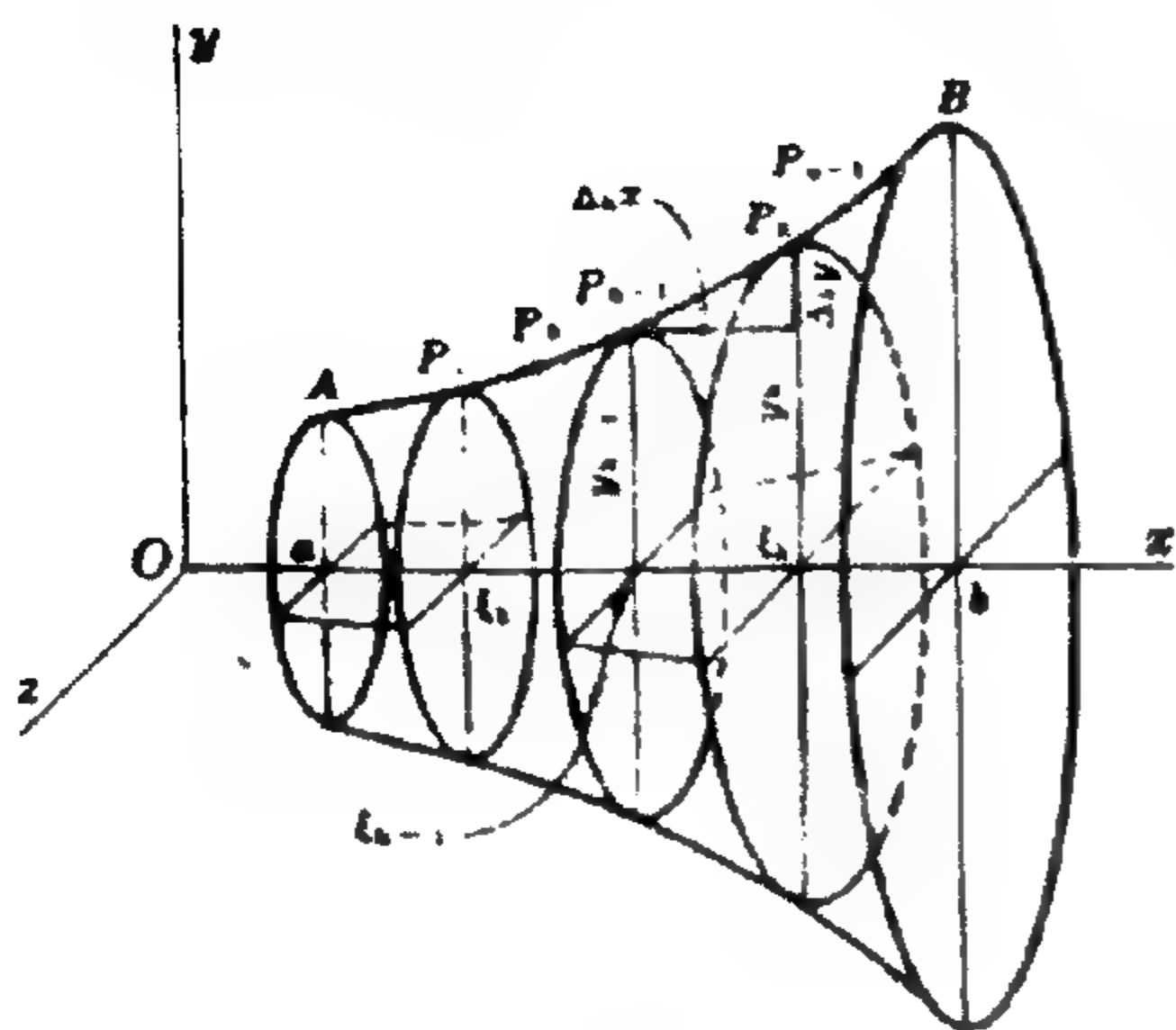
يمكن حل هذه المسألة في الفصل ٧٠. وأما الآن فالمطلوب هو التحقق من أنه يمكن الحصول على معادلة المسار  $y = f(x)$  بتكامل

$$y' = \frac{1}{3}(x^{2/3} - x^{-2/3})$$

إرشاد : ليكن  $P(a, b)$  حيث  $0 < a < 1$  موضع الكلب ولترمز بـ  $Q$  لنقطة تقاطع عماس المسار  $y = f(x)$  عند النقطة  $P$  مع المحور  $y$ . أوجد الزمن اللازم ليصل الكلب إلى النقطة  $P$  وبين أن صاحبه يكون عندئذ في النقطة  $Q$ .

## الفصل الثاني والأربعون

### مساحة السطح الدوراني



شكل ٢١ - ١

إن مساحة السطح الذي ينتج عن دوران القوس  $AB$  من منحنى متصل حول مستقيم واقع في مستواه هو بالتعريف نهاية مجموع المساحات التي تنتج عن دوران  $n$  وقوا  $AP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}B$  حول هذا المستقيم عندما يزداد عدد الأوتار إلى ما لا نهاية بحيث يؤول طول كل وتر إلى الصفر.

إذا كانت  $A(a, c)$  ،  $B(b, d)$  نقطتين على المنحنى  $y' = f(x)$  حيث  $f(x)$  ومشتقتها الأولى  $f'(x)$  متصلتان وبحيث لا تغير  $f(x)$  إشارتها في الفترة  $a \leq x \leq b$  فإن مساحة السطح الناتج عن دوران القوس  $AB$  حول المحور  $x$  تعطى بـ :

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y \, ds = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

وإذا كان بالإضافة لذلك  $f'(x) \neq 0$  في الفترة المفروضة فإن مساحة السطح تعطى كذلك بـ :

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y \, ds = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

وإذا كانت  $A(a, c)$  ،  $B(b, d)$  نقطتين على المنحنى  $x = g(y)$  حيث  $g(y)$  ومشتقتها الأولى بالنسبة لـ  $y$  تحقق شروطا مماثلة لتلك التي مرت في الفقرة السابقة فإن مساحة السطح الناتج عن دوران القوس  $AB$  حول المحور  $y$  تعطى بـ :

$$S_y = 2\pi \int_{AB} x \, ds = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

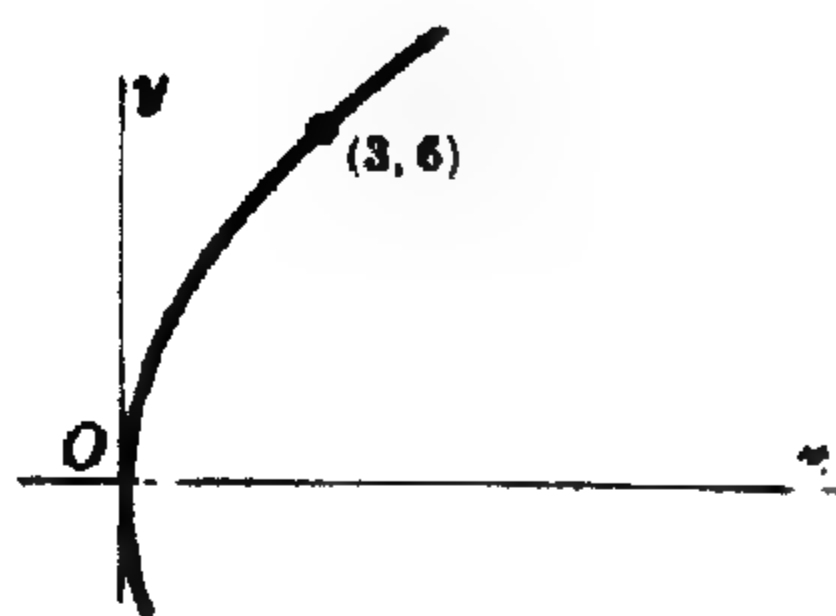
أما إذا كانت  $A(u = u_1)$  ،  $B(u = u_2)$  نقطتين على المنحنى المعطى بالمعادلتين البارامتريتين  $x = f(u)$  ،  $y = g(u)$  وإذا كانت شروط الاتصال محققة فإن مساحة السطح الناتج عن دوران القوس  $AB$  حول المحور  $x$  تعطى بـ :

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y \, ds = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

وإن مساحة السطح الناتج عن دوران القوس  $AB$  حول المحور  $y$  تعطى بـ :

$$S_y = 2\pi \int_{AB} x \, ds = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} x \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

### مسائل مطولة



شكل ٢ - ٢

١ - أوجد مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران قوس القطع المكافئ  $y^2 = 12x$  من  $x = 0$  إلى  $x = 3$  حول المحور  $x$ .

$$(أ) \text{ لنطبق الصيغة } S_x = 2\pi \int_0^3 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

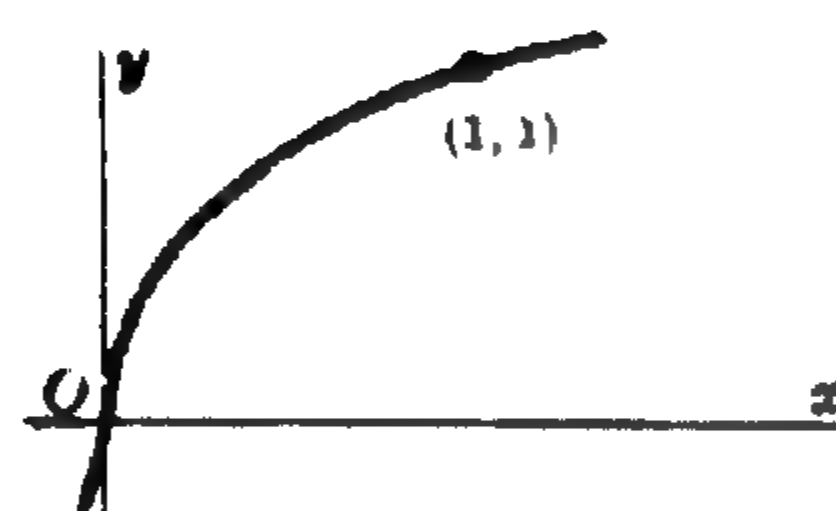
$$\text{إن } 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2 + 36}{y^2} \text{ ومنه}$$

$$S_x = 2\pi \int_0^3 y \frac{\sqrt{y^2 + 36}}{y} dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{12x + 36} dx = 24(2\sqrt{2} - 1)\pi$$

(ب) لنطبق الصيغة  $S_x = 2\pi \int_0^6 y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$ . أن  $S_x = 2\pi \int_0^6 y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$ ، ومنه  $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{6}$ ،  $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{36 + y^2}{36}$ ،

$$S_x = 2\pi \int_0^6 y \frac{\sqrt{36 + y^2}}{6} dy = \frac{\pi}{9} (36 + y^2)^{3/2} \Big|_0^6 = 24(2\sqrt{2} - 1)\pi$$

٢ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران القوس  $x = y^2$  من  $y = 0$  إلى  $y = 1$  حول المحور  $y$ .



شكل ٢ - ٣

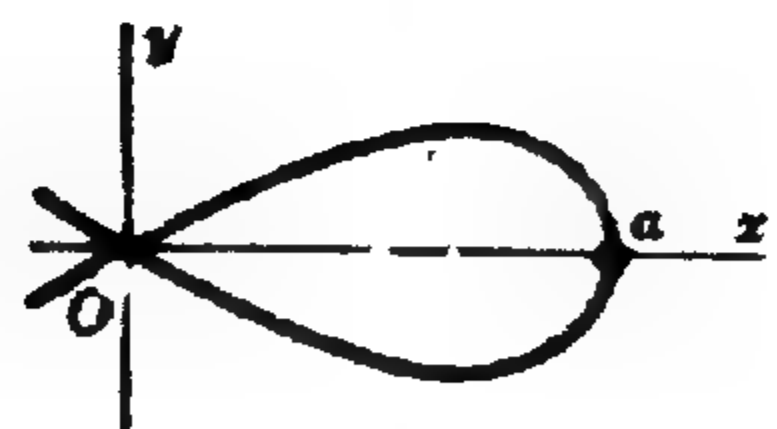
$$S_y = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2\pi \int_0^1 y^2 \sqrt{1 + 4y^2} dy$$

$$= \frac{\pi}{27} (1 + 9y^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

٣ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران القوس  $y^2 + 4x = 2 \ln y$  من  $y = 1$  إلى  $y = 3$  حول المحور  $x$ .

$$S_x = 2\pi \int_1^3 y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2\pi \int_1^3 y \frac{1 + y^2}{2y} dy = \pi \int_1^3 (1 + y^2) dy = \frac{32}{3}\pi$$

٤ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران عقدة المنحنى  $8a^3y^3 = a^3x^3 - x^4$  حول المحور  $x$ .



شكل ٢ - ٤

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{(a^3 - 2x^3)^2}{8a^3(a^3 - x^3)} = \frac{(3a^3 - 2x^3)^2}{8a^3(a^3 - x^3)} \text{ ومنه } \frac{dy}{dx} = \frac{a^3x - 2x^3}{8a^3y}$$

$$S_x = 2\pi \int_0^a y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^a \frac{x\sqrt{a^3 - x^3}}{2a\sqrt{2}} \cdot \frac{3a^3 - 2x^3}{2a\sqrt{2}\sqrt{a^3 - x^3}} dx$$

$$= \frac{\pi}{4a^2} \int_0^a (3a^3 - 2x^3)x dx = \frac{1}{4}\pi a^3 \text{ square units}$$

٥ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران القطع الناقص  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$  حول المحور  $x$ .



$$\begin{aligned}
 S_x &= 2\pi \int_{-4}^4 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_{-4}^4 y \frac{\sqrt{16y^2 + x^2}}{4y} dx = \frac{1}{2}\pi \int_{-4}^4 \sqrt{64 + 3x^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left[ \frac{x\sqrt{3}}{2} \sqrt{64 + 3x^2} + 32 \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{8} \right]_{-4}^4 = 8\pi \left( 1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi \right) \text{ square units}
 \end{aligned}$$

٦ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى التويزي التحي حول المحاور  $x$  و  $y$ .

إن المساحة المطلوبة تنتج بدوران القوس عندما تتغير  $\theta$  من  $\theta = 0$  إلى  $\theta = \pi$ .

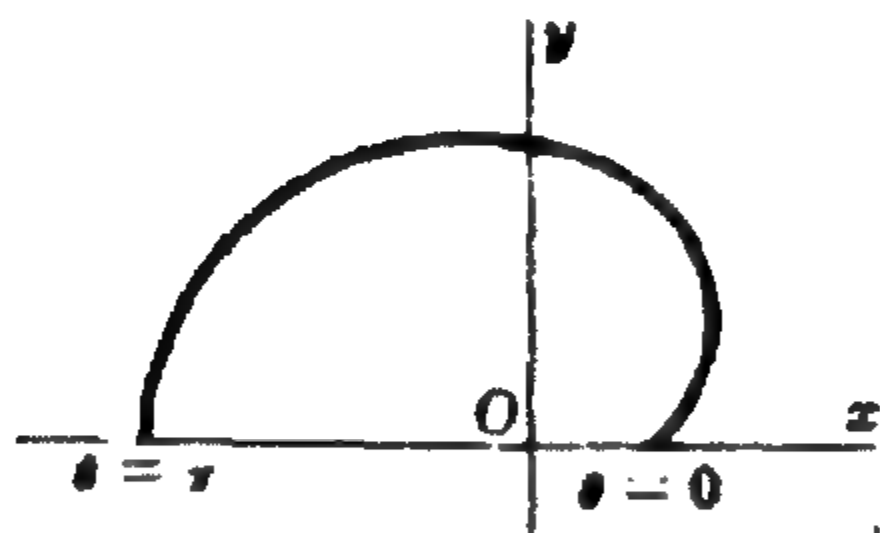
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 9a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta. \text{ ومنه } \frac{dx}{d\theta} = -3a \cos^2 \theta \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 3a \sin^2 \theta \cos \theta, \text{ وإن}$$

$$S_x = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} (a \sin^2 \theta) 3a \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{12a^2\pi}{5} \text{ sq. un}$$

ملاحظة : يبدو من الطبيعي أن نكتب  $2\pi \int_0^{\pi/2} (a \sin^2 \theta) 3a \cos \theta \sin \theta d\theta$  ولكن القيمة تكون عندئذ مساوية للصفر.

لذا ينبغي أن لا يغيب عن بالنا أنه في الوقت الذي تعطى فيه المساحات والحجوم . . . إلخ . . . بتكاملات محددة فإنه لا يمكن تفسير كل تكامل عدد على أنه مساحة . . . إلخ .

٧ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران منحنى القلب حول المحور  $x$ .



شكل ٢ -

إن السطح المطلوب ينتج بدوران القوس عندما تتغير  $\theta$  من  $\theta = 0$  إلى  $\theta = \pi$ .

$$\text{وإن } dx/d\theta = -2 \sin \theta + 2 \sin 2\theta, \quad dy/d\theta = 2 \cos \theta - 2 \cos 2\theta$$

$$(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2 = 8(1 - \sin \theta \sin 2\theta - \cos \theta \cos 2\theta) = 8(1 - \cos \theta)$$

$$\begin{aligned}
 S_x &= 2\pi \int_0^{\pi} (2 \sin \theta - \sin 2\theta) \cdot 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta \\
 &= 8\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi} \sin \theta (1 - \cos \theta)^{3/2} d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{5} (1 - \cos \theta)^{5/2} \Big|_0^{\pi} = \frac{128\pi}{5} \text{ square units}
 \end{aligned}$$

$$S_x = 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \text{ استنتج الصيغة}$$

لتقريب القوس  $AB$  بـ  $n$  وتراتنا هو مبين في الشكل ٢٢ - ١ عندما يدور الوتر المثلث  $P_{k-1}P_k$  حول المحور  $x$  ينتج جذع مخروط نصف تطري قاعدتيه  $y_k, y_{k-1}$  وارتفاعه المائل :

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x = \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2} \Delta x$$

(أنظر المسألة ١ من الفصل ١١) ومساحته الجانبية (محيط مقطع الأوسط  $\times$  ارتفاع المائل) هي :

$$S_k = 2\pi \left( \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \right) \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2} \Delta x$$

وبما أن  $f(x)$  دالة متصلة فإنه يوجد على القوس  $P_{k-1}P_k$  نقطة واحدة  $x'_k$  على الأقل بحيث يكون :

$$f(x'_k) = \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k) = \frac{1}{2}\{f(x_{k-1}) + f(x_k)\}$$

$$S_k = 2\pi f(x'_k) \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2} \Delta_k x \quad \text{ومن ثم}$$

واستنادا إلى نظرية بليس نجد أخيرا :

$$\begin{aligned} S_s &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n S_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n 2\pi f(x'_k) \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2} \Delta_k x \\ &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \end{aligned}$$

### مسائل إضافية

احسب في كل من المسائل من ٩ إلى ١٨ مساحة السطح الناتج عن دوران القوس المفروض حول المحور المعطى :

- ١٠-  $y = mx - 4$  من  $x=0$  إلى  $x=2$  حول المحور  $x$  . ج :  $4m\pi\sqrt{1+m^2}$  square units  
 ١١-  $y = \frac{1}{3}x^3 - 10$  من  $x=0$  إلى  $x=3$  حول المحور  $x$  . ج :  $\pi(82\sqrt{82} - 1)/9$  square units  
 ١٢-  $y = \frac{1}{3}x^3 - 11$  من  $x=0$  إلى  $x=3$  حول المحور  $y$  . ج :  $\frac{1}{2}\pi[9\sqrt{82} + \ln(9 + \sqrt{82})]$  square units  
 ١٣-  $8y^3 = x^2(1-x^2)$  ، المقدة ، حول المحور  $x$  . ج :  $\frac{1}{4}\pi$  square units  
 ١٤-  $y = x^3/6 + 1/2x$  من  $x=1$  إلى  $x=2$  حول المحور  $y$  . ج :  $(15/4 + \ln 2)\pi$  square units  
 ١٥-  $y = \ln x$  من  $x=1$  إلى  $x=7$  حول المحور  $y$  . ج :  $[34\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2})]\pi$   
 ١٦-  $9y^3 = x^2(3-x)^2$  ، المقدة ، حول المحور  $y$  . ج :  $28\pi\sqrt{3}/5$  square units  
 ١٧-  $y = a \cosh x/a$  من  $x=-a$  إلى  $x=a$  حول المحور  $x$  . ج :  $\frac{1}{2}\pi a^2(e^3 - e^{-3} + 4)$  square units  
 ١٨- قوس من  $x = a(\theta - \sin \theta)$  ,  $y = a(1 - \cos \theta)$  حول المحور  $x$  . ج :  $64\pi a^3/3$  square units  
 ١٩-  $x = e^t \cos t$  ,  $y = e^t \sin t$  من  $t = 0$  إلى  $t = 1/2\pi$  حول المحور  $x$  . ج :  $2\pi\sqrt{2}(2e^\pi + 1)/5$

٢٠- احسب مساحة منطقة كروية قطعت من كرة نصف قطرها  $r$  بمستويين متوازيين يبعد كل منهما عن المركز  $a$  . ج :  $2\pi ar$

٢١- احسب المساحة المقطوعة من كرة نصف قطرها  $r$  بمخروط نصف زاوية رأسه  $\alpha$  ورأسه في مركز الكرة . ج :  $2\pi r^2(1 - \cos \alpha)$

## الفصل الثالث والأربعون

### المركز المتوسط وعزوم القصور الذاتي لأقواس المنحنيات والسطوح الدورانية

**المركز المتوسط لقوس** : أن الإحداثيين  $(\bar{x}, \bar{y})$  للمركز المتوسط لقوس  $AB$  من منحنى مستو معادلته  $F(x, y) = 0$  أو  $x = f(u), y = g(u)$  محققان العلاقات :

$$\bar{y} \cdot s = \bar{y} \int_{AB} ds = \int_{AB} y ds \quad , \quad \bar{x} \cdot s = \bar{x} \int_{AB} ds = \int_{AB} x ds$$

أنظر المسائلين ١ - ٢

**نظرية باغوس الثانية** : إذا دار منحنى حول محور في مستواه وغير قاطع له . فإن مساحة السطح الناتج عن هذا الدوران تساوى حاصل ضرب طول المنحنى في طول المسار الذي يرسمه المركز المتوسط للمنحنى .

أنظر المسألة ٣

**عزوم القصور الذاتي لقوس** : يعطى عزوم القصور الذاتي لقوس  $AB$  من منحنى مستو ( مثلاً : قطعة من سلك رفيع متجانس ) بالنسبة لمحورين الإحداثيين بالصيغتين :

$$I_y = \int_{AB} x^2 ds \quad , \quad I_x = \int_{AB} y^2 ds$$

أنظر المسائلين ٤ - ٥

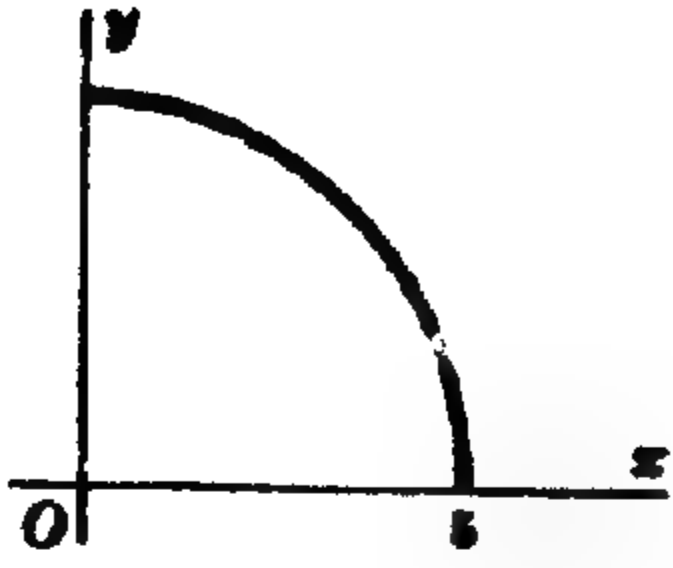
**المركز المتوسط لسطح دوراني** : يعطى الإحداثي  $\bar{x}$  للمركز المتوسط لسطح ناتج عن دوران قوس  $AB$  من منحنى حول المحور  $x$  بالعلاقة :

$$\bar{x} \cdot S_x = 2\pi \int_{AB} x \cdot y ds$$

**عزم القصور الذاتي لسطح دوراني** : إن عزوم القصور الذاتي لسطح ناتج عن دوران قوس  $AB$  من منحنى مستو حول المحور  $x$  بالنسبة لمحور الدوران هو :

$$I_x = 2\pi \int_{AB} y^2 \cdot y ds$$

### مسائل محلولة



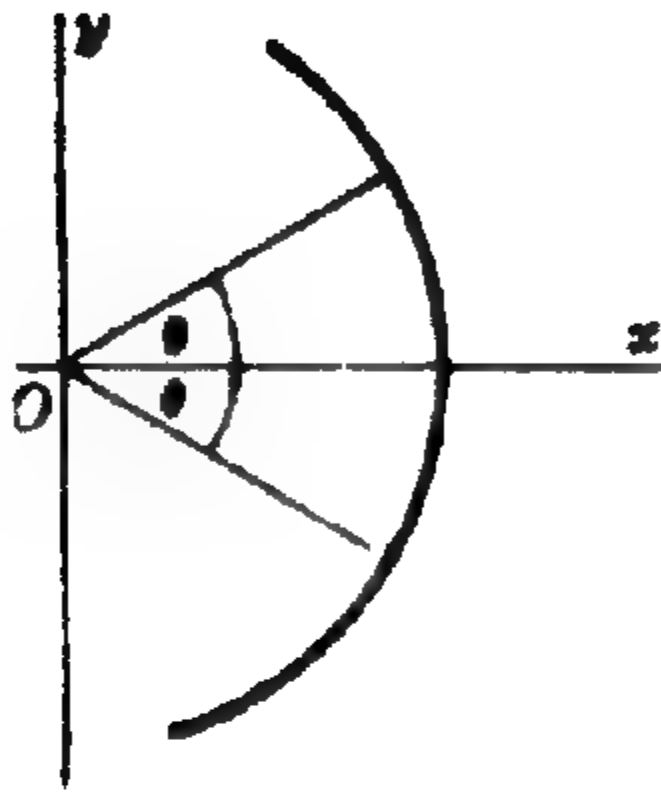
شكل ١ - ١٢

١ - عين المركز المتوسط لقوس الدائرة  $x^2 + y^2 = 25$  الذي يقع في الربع الأول.

إن  $s = \frac{5}{2}\pi$ ، وبما أن  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  and  $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{25}{y^2}$ .

$$\bar{x} = 10/\pi, \quad \bar{y} = 10/\pi \quad \text{فإن} \quad \frac{5}{2}\pi \bar{y} = \int_0^5 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^5 5 dx = 25$$

واستنادا إلى التناظر يكون  $\bar{x} = \bar{y}$  وبالتالي فإن المركز المتوسط هو النقطة  $(10/\pi, 10/\pi)$



شكل ٢ - ١٢

٢ - عين المركز المتوسط لقوس دائرة نصف قطرها  $r$  إذا كانت الزاوية المركزية لقوس  $2\theta$ .

لنأخذ القوس كما في الشكل ٢ - ١٢، وعندئذ يكون  $\bar{x}$  للقوس كله منطبقا على المحور السيني للمركز المتوسط لنصف القوس ويكون  $\bar{y} = 0$

أو  $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$ ، ومنه  $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{r^2}{x^2}$ ، ويكون بالنسبة للنصف العلوي من القوس  $s = r\theta$ .

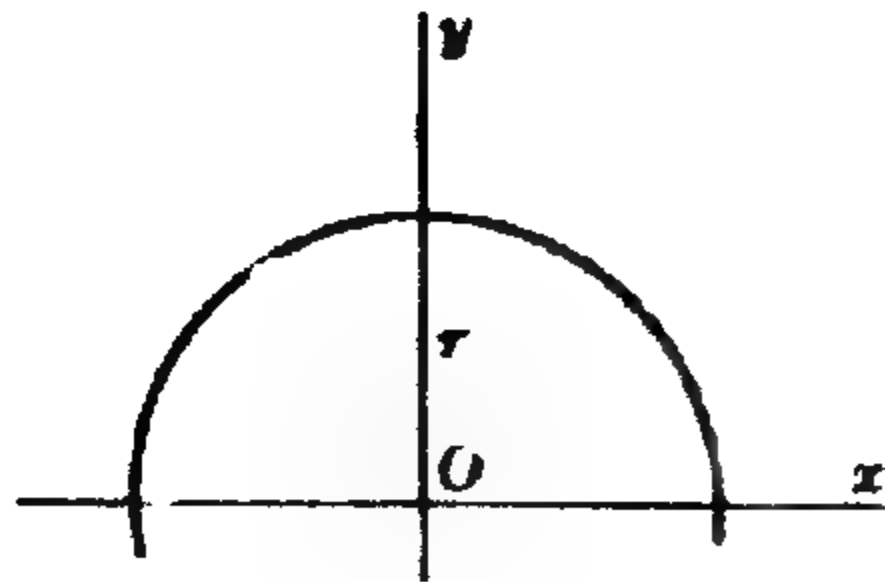
$$r\theta \cdot 2 = \int_0^{r \sin \theta} x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = r \int_0^{r \sin \theta} dy = r^2 \sin \theta \quad \text{إذن}$$

والمركز المتوسط يقع على نصف القطر النصف وعلى بعد  $(r \sin \theta)/2$  من مركز الدائرة.

٣ - أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران مستطيل  $a, b$  حول محور يبعد  $c$  units عن المركز بفرض أن  $c$  أكبر من كل من  $a, b$ .  
إن محيط المستطيل  $2(a + b)$  وبما أن مركز المتوسط يرسم دائرة نصف قطرها  $c$  فإن:

$$S = 2(a + b) \cdot 2\pi c = 4\pi(a + b)c \text{ square units}$$

٤ - احسب عزوم القصور الذاتي لقوس دائرة بالنسبة لقطر ثابت منها.

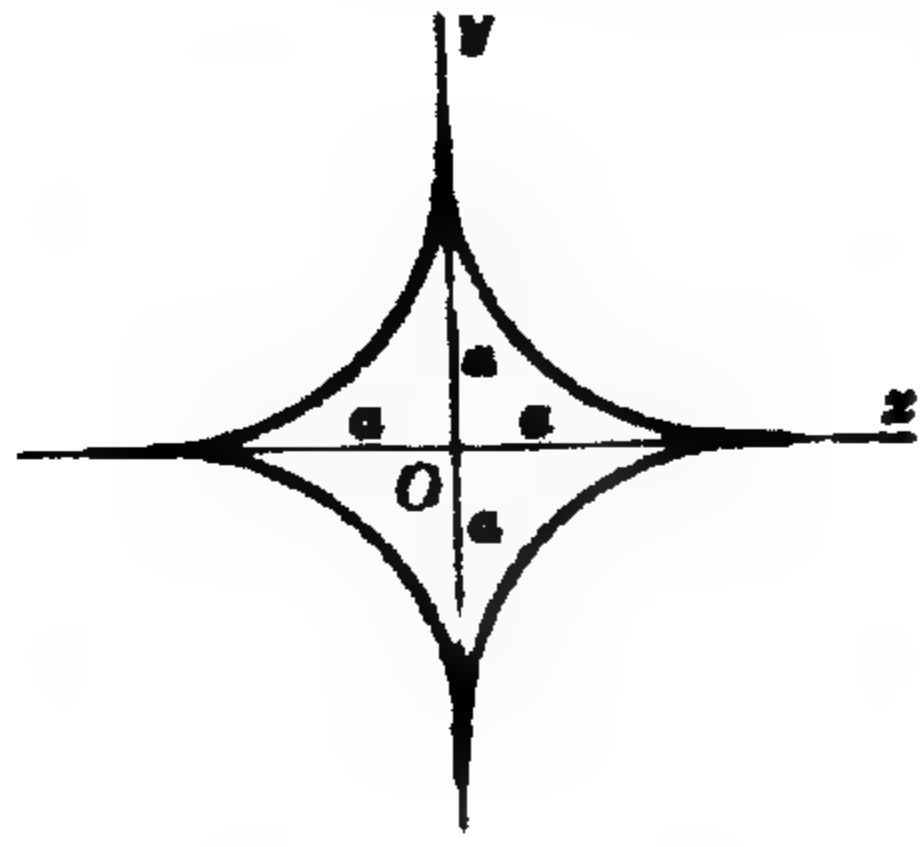


شكل ٣ - ١٢

لنأخذ الدائرة كما في الشكل ٣ - ١٢، ولنأخذ القطر الثابت منطبقا على المحور  $x$ .  
إن العزم المطلوب يساوي أربع مرات عزوم القوس الموجود في الربع الأول ثم إن  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

ومنه  $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{r}{y}$ ، كذلك  $s = 2\pi r$ ، وعلى هذا يكون

$$\begin{aligned} I_x &= 4 \int_0^r y^2 ds = 4 \int_0^r y^2 \cdot \frac{r}{y} dx = 4r \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= 4r \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2} r^2 \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = \pi r^3 = \frac{1}{2} \pi r^3 \end{aligned}$$



شكل ٣ — ٥

٥ — احسب عزم القصور الذاتي حول المحور  $x$  لقوس المنحنى الدورى المنحنى (الهيوسكلويد)  $x = a \sin^3 \theta$ ,  $y = a \cos^3 \theta$ .

إن العزم المطلوب يساوى أربع مرات عزم قوس المنحنى الموجود فى الربع الأول :

$$\text{ثم إن } \frac{dx}{d\theta} = 3a \sin^2 \theta \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -3a \cos^2 \theta \sin \theta, \quad \text{ومن ثم :}$$

$$s = 4 \int ds = 4 \int_0^{\pi/2} 3a \sin \theta \cos \theta d\theta = 6a$$

$$I_x = 4 \int y^2 ds = 12a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{3}{4}a^3 = \frac{1}{4}a^3 s$$

### مسائل إضافية

٦ — عين المركز المتوسط  $I$  :

(أ) قوس المنحنى  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  الواقع فى الربع الأول . استخدام  $s = 3a/2$  . ج :  $(2a/5, 2a/5)$

(ب) قوس العقدة  $9y^2 = x(3-x)^2$  الواقع فى الربع الأول . استخدام  $s = 2\sqrt{3}$  . ج :  $(7/5, \sqrt{3}/4)$

(ج) القوس الأول من  $x = a(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = a(1 - \cos \theta)$  . ج :  $(\pi a, 4a/5)$

(د) قوس المنحنى  $x = a \cos^3 \theta$ ,  $y = a \sin^3 \theta$  الذى يقع فى الربع الأول . ج : أنظر (أ)

٧ — احسب عزم القصور الذاتي للقوس المفروض بالنسبة للمستقيم المذكور أمامه .

(أ) عقدة المنحنى  $9y^2 = x(3-x)^2$  . المحور  $x$  : المحور  $y$  . استخدم  $s = 4\sqrt{3}$  . ج :  $I_x = 8a/35$ ,  $I_y = 99a/35$

(ب)  $y = a \cosh x/a$  من  $x=0$  إلى  $x=a$  ، المحور  $x$  . ج :  $(a^2 + \frac{1}{2}a^2)a$

٨ — عين المركز المتوسط لسطح نصف كرة . ج :  $\bar{y} = \frac{1}{2}r$

٩ — عين المركز المتوسط لسطح ناتج عن دوران :

(أ)  $4y + 3x = 8$  من  $x=0$  إلى  $x=2$  حول المحور  $x$  . ج :  $\bar{x} = 4/5$

(ب) قوس من  $x = a(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = a(1 - \cos \theta)$  حول المحور  $y$  . ج :  $\bar{y} = 4a/3$



٣٦. الفصل الثالث والعشرون - المركز المتوسط وعزوم القصور الذاتي للقواس المقنطرات والسطوح الدورانية

١٠ - استخدم نظرية نظرية بابوس الثانية لحصل على :

( أ ) المركز المتوسط لقوس دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها  $r$  وواقع في الربع الأول . ج :  $(2r/\pi, 2r/\pi)$

( ب ) مساحة السطح الناتج عن دوران مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه  $a$  حول محور يبعد  $c$  units عن المركز المتوسط للمثلث .

ج :  $8\pi ac$  square units

١١ - احسب عزوم القصور الذاتي حول محور الدوران لـ :

( أ ) سطح كرة نصف قطرها  $r$  . ج :  $\frac{8}{3}\pi r^3$

( ب ) السطح الجانبي لمخروط ينتج عن دوران المستقيم  $y = 2x$  من  $x = 0$  إلى  $x = 2$  حول المحور  $x$  .

ج :  $8\pi$

١٢ - استنتج كل صيغة من صيغ هذا الفصل .

## الفصل الرابع والأربعون

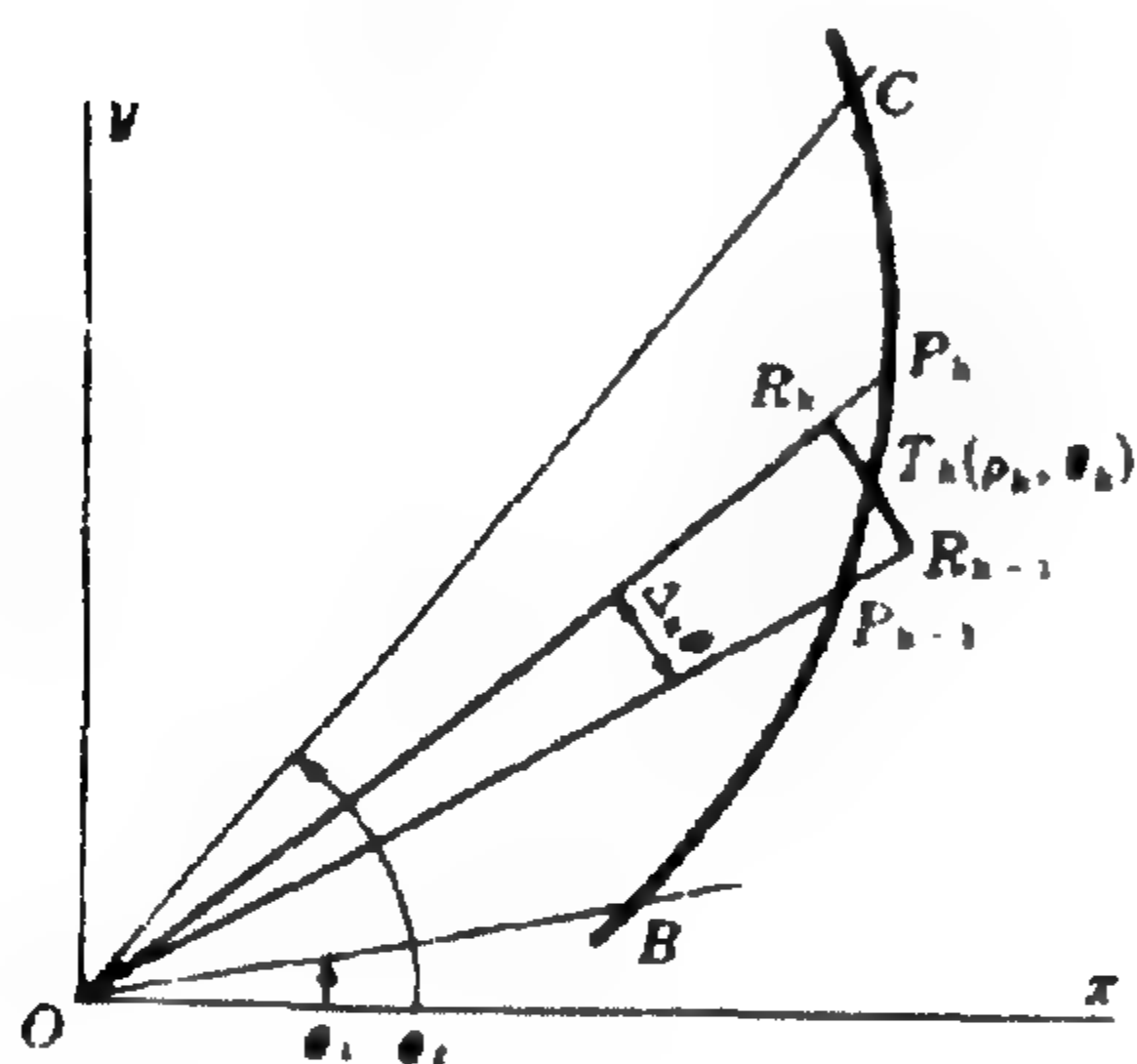
### مساحات المسطوح المستوية ومراكزها المتوسطة في الإحداثيات القطبية

تغطي مساحة سطح مستوي محصورة بين المنحنى  $\rho = f(\theta)$  ونصفي القطرين المنجهين  $\theta = \theta_1$  و  $\theta = \theta_2$  بـ :

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$$

ينبغي ، عند استخدام الإحداثيات القطبية ، الانتباه الشديد لتحديد حدود التكامل الملائمة ، ويتطلب هذا الاستفادة من أي تناظر لتضييق مجال التكامل بقدر الإمكان .

أنظر المسائل ١ - ٧



شكل ١ - ١

**المركز المتوسط لسطح مستوي** • يعطى الإحداثيان  $(x, y)$

لمركز المتوسط لسطح مستوي محصور بين المنحنى  $\rho = f(\theta)$  ونصفي القطرين المنجهين  $\theta = \theta_1$  و  $\theta = \theta_2$  بـ :

$$A\bar{x} = \bar{x} \cdot \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2}{3} x \cdot \rho^2 d\theta$$

$$A\bar{y} = \bar{y} \cdot \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2}{3} y \cdot \rho^2 d\theta$$

أنظر المسائل ٩ - ١٠

### مسائل محلولة

$$١ - \text{استنتج أن } A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$$

انقسم الزاوية  $BOC$  الموضحة بالشكل إلى  $n$  قسماً بالأشعة  $OP_0 = OB, OP_1, \dots, OP_n, OP_{n-1}, OP_n = OC$ . يوضح الشكل شريحة ممثلة  $OP_k, P_{k-1}$  تقابل الزاوية المركزية  $\Delta_k \theta$  وتقرب هذه الشريحة بالقطاع الدائري  $OR_k, R_{k-1}$  التي نصف قطرها  $\rho_k$  ، وزاويتها المركزية  $\Delta_k \theta$  وتقدر مساحتها . ( أنظر المسألة ١٥ (ج) الفصل ٢٤ ) بـ :

$$\frac{1}{2} \rho_k^2 \Delta_k \theta = \frac{1}{2} \{f(\theta_k)\}^2 \Delta_k \theta$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \{f(\theta_k)\}^2 \Delta_k \theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{f(\theta)\}^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$$

٢ - احسب مساحة السطح المنحني المستوي المحدد بالمنحنى  $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ .

يتضح من الشكل ١١ - ٢ أن السطح المطلوب حساب مساحته يتكون من أربع قطع يمسح أحدها بنصف القطر المتجه عندما تتغير  $\theta$  من  $0$  إلى  $\theta = \pi/4$  لذلك .

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \rho^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = a^2 \text{ square units}$$

ربما أن كل ربع من المنحني يحوى جزءا من السطح المطلوب مساحته فإنه يبدو من المقبول أن نكتب :

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi} \cos 2\theta d\theta = 0$$

شكل ١١ - ٢

يمكن إيجاد سبب هذه النتيجة الخاطئة بإيمان النظر في :

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \rho^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \rho^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{3\pi/4}^{\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} a^2$$

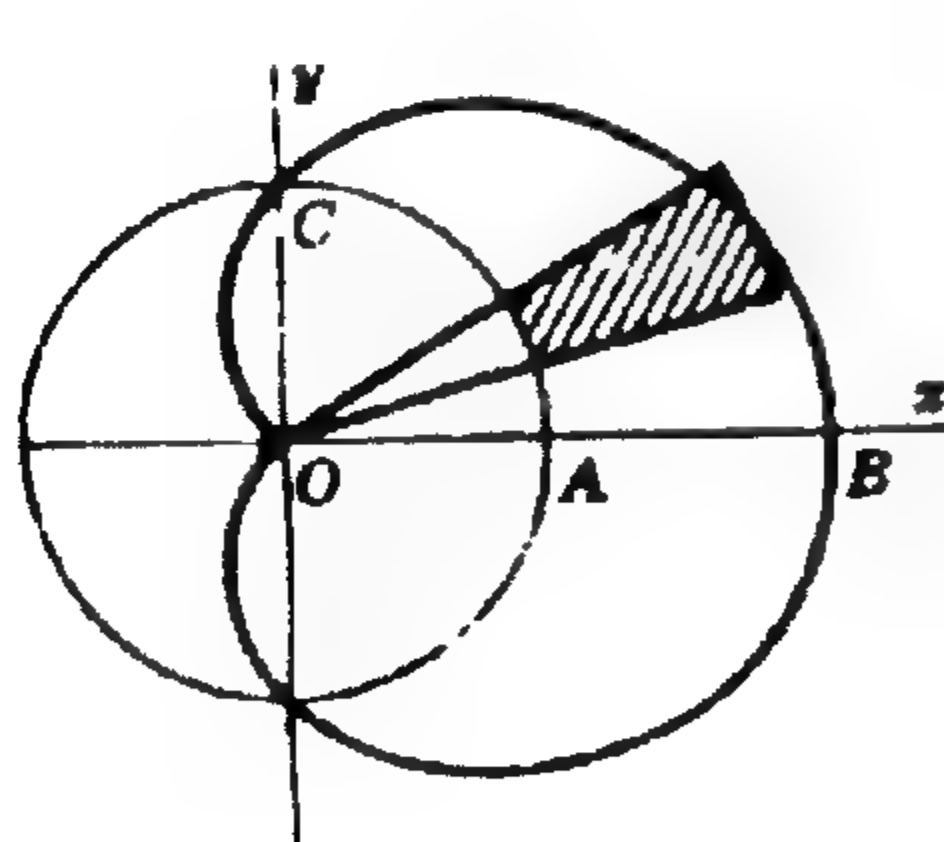
في الفترتين  $(0, \pi/4)$  و  $(3\pi/4, \pi)$  يكون  $\rho = a \sqrt{\cos 2\theta}$  حقيقيا ، وبالتالي فإن التكاملين الأول والثالث يعطيان المساحتين الموافقتين للسطحين اللذين يمسحهما نصف القطر المتجه عندما تتغير  $\theta$  هاتين الفترتين .

أما في الفترة  $(\pi/4, 3\pi/4)$  فإن  $\rho^2 < 0$  وبالتالي فإن  $\rho$  تخيل . وهكذا على الرغم من كون  $\frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} a^2 \cos 2\theta d\theta$  تكاملا صحيحا تماما ، فإنه لا يمكن تفسيره هنا على أنه مساحة قطعة سطح .

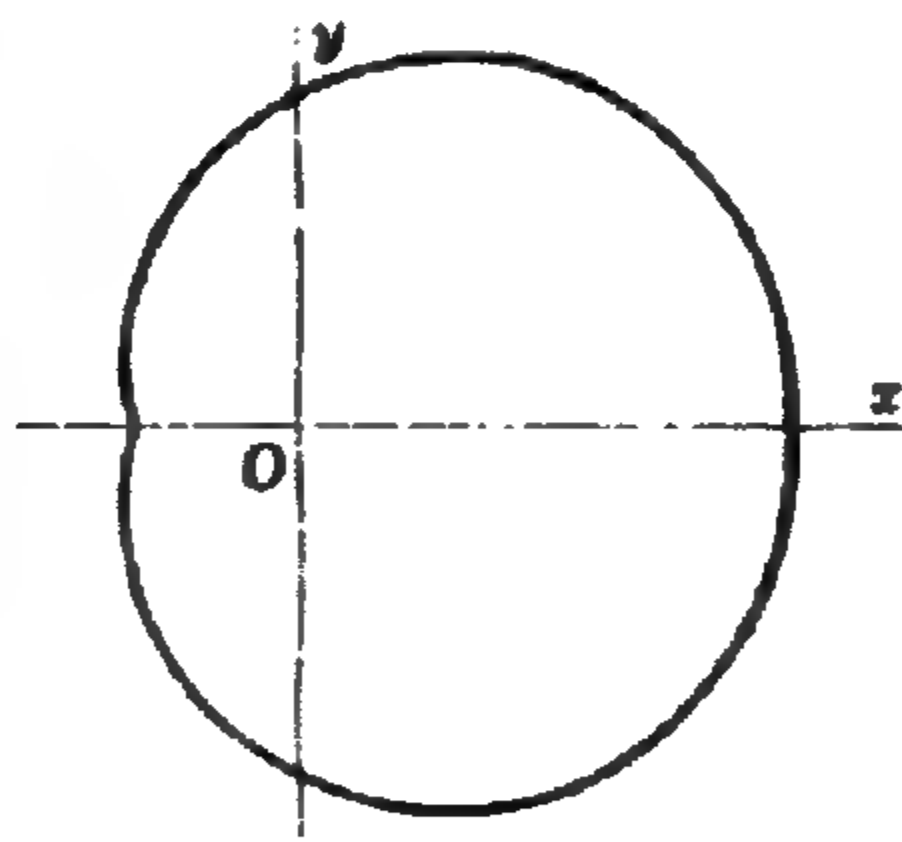
٣ - احسب مساحة السطح المحدد بالوردة ثلاثية الوريقة  $\rho = a \cos 3\theta$ .

إن المساحة المطلوبة تساوى ست مرات مساحة قطعة السطح المظلة في الشكل ١١ - ٣ والتي نحصل عليها عندما تتغير  $\theta$  من  $0$  إلى  $\pi/6$  . لذلك .

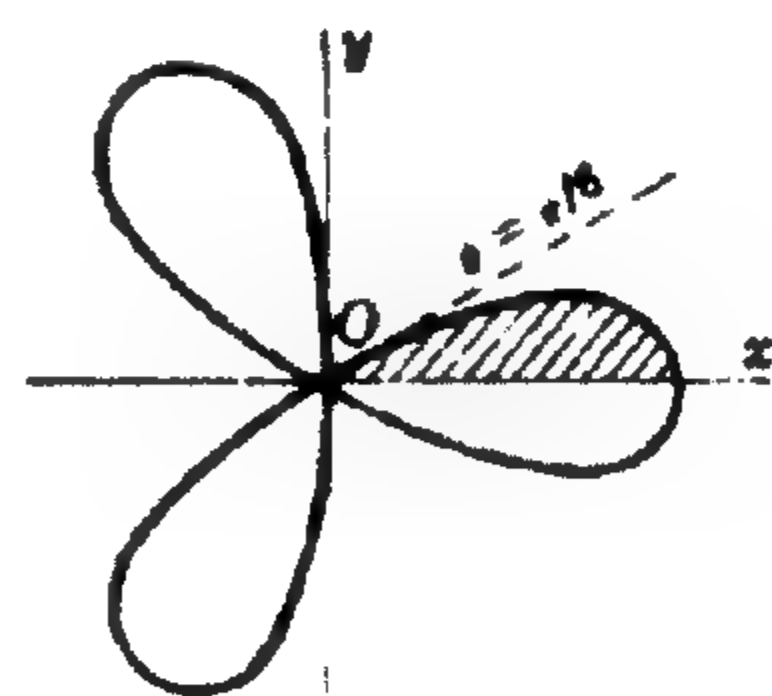
$$A = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \rho^2 d\theta = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} a^2 \cos^2 3\theta d\theta = 3a^2 \int_0^{\pi/6} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6\theta \right) d\theta = \frac{3}{2} a^2 \text{ sq. un.}$$



شكل ١١ - ٣



شكل ١١ - ٤



شكل ١١ - ٥

٤ - احسب مساحة السطح المحدد بالمنحنى  $\rho = 2 + \cos \theta$  والمبين بالشكل ١١ - ٤ .

إن المساحة المطلوبة تساوى ضعف مساحة السطح الذى نحصل عليه عندما تتغير  $\theta$  من  $0$  إلى  $\pi$  .

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (2 + \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi} (4 + 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \left[ 4\theta + 4 \sin \theta + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} = 9\pi/2 \text{ square units}$$

٥ - احسب مساحة السطح الواقعة داخل منحنى القلب  $\rho = 1 + \cos \theta$  وخارج الدائرة  $\rho = 1$ .  
بالنظر إلى الشكل ٤٤ - ٥ نجد أن مساحة  $ABC =$  مساحة  $OBC -$  مساحة  $OAC =$  نصف المساحة المطلوبة لذلك فإن :

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (1 + \cos \theta)^2 d\theta - 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (1)^2 d\theta = \int_0^{\pi/3} (2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 2 + \frac{1}{3}\pi \text{ sq. un.}$$

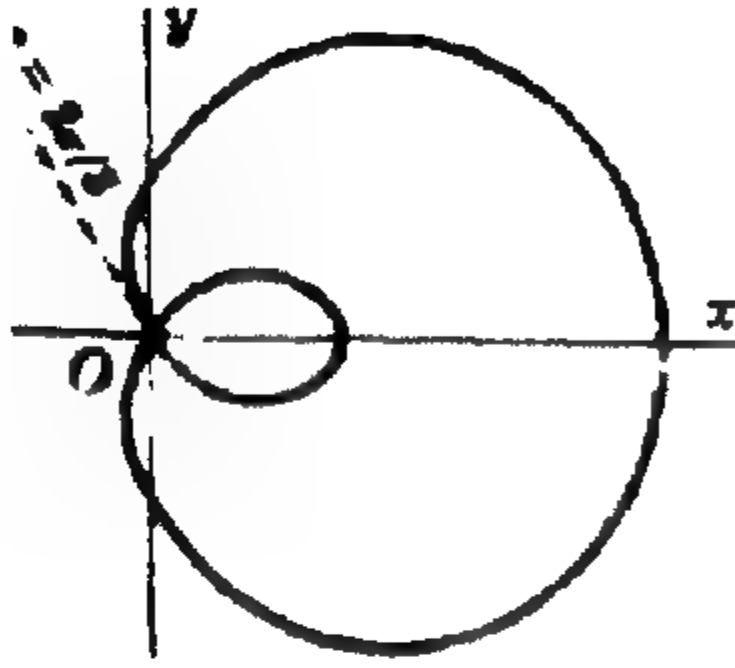
٦ - أوجد مساحة كل من عقدة المنحنى  $\rho = \frac{1}{2} + \cos \theta$ .

العقدة الكبرى . إن المساحة المطلوبة تساوى ضعفى مساحة السطح التى نحصل عليها عندما تتغير  $\theta$  من 0 إلى  $2\pi/3$  :

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/3} (\frac{1}{2} + \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi/3} (\frac{1}{4} + \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

إذن :

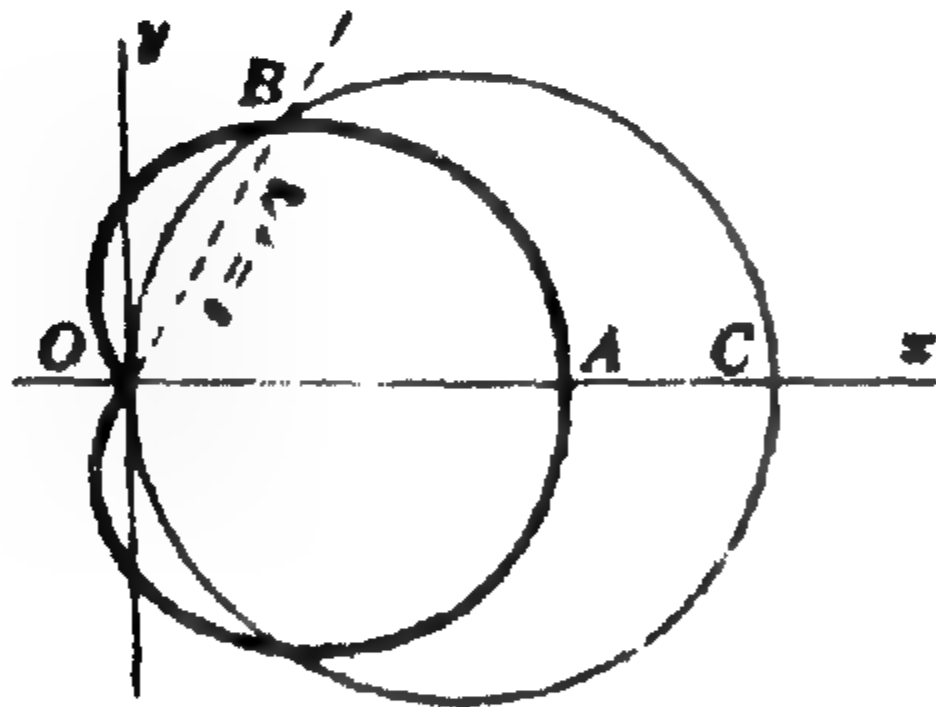
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ square units}$$



شكل ٤٤ - ٦

العقدة الصغرى . إن المساحة المطلوبة تساوى ضعفى مساحة السطح التى نحصل عليها عندما تتغير  $\theta$  من  $2\pi/3$  إلى  $\pi$  إذن :

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{2\pi/3}^{\pi} (\frac{1}{2} + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ square units}$$



شكل ٤٤ - ٧

٧ - احسب مساحة السطح المشتركة بين الدائرة  $\rho = 3 \cos \theta$  ومنحنى القلب  $\rho = 1 + \cos \theta$ .

إن مساحة السطح  $OAB$  تتكون من جزئين ، يسمح أحدهما نصف القطر المتجه للمنحنى  $\rho = 1 + \cos \theta$  عندما تتغير  $\theta$  من 0 إلى  $\pi/3$  . ويسمح ثانيهما نصف القطر المتجه للمنحنى  $\rho = 3 \cos \theta$  عندما تتغير  $\theta$  من  $\pi/3$  إلى  $\pi/2$  .

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (1 + \cos \theta)^2 d\theta + 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} 9 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 5\pi/4 \text{ square units}$$

٨ - استنتج الصيغتين  $A_x = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \cos \theta d\theta$  ,  $A_y = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \sin \theta d\theta$  حيث  $(\bar{x}, \bar{y})$  موضع المركز المتوسط للسطح المستوى  $BOC$  في الشكل ٤٤ - ١ .

باعتبار القطاع الدائرى المثلث المثلث المقرب  $OR_k$  و  $R_k$  وبفرض المساحة  $OT_k$  بنصف الزاوية  $OP_k$  و  $P_k$  وكى نحصل على موضع تقريبي للمركز المتوسط  $C_k(x, y_k)$  لقطاع نعتبره مثلثا حقيقيا . عندئذ يكون المركز المتوسط على الخط  $OT_k$  ويبعد مسافة  $\rho_k/3$  من النقطة  $O$  ، أى يكون على وجه التقريب .

$$\bar{x}_k = \frac{2}{3} f(\theta_k) \sin \theta_k \quad \text{و} \quad \bar{y}_k = \frac{2}{3} \rho_k \cos \theta_k = \frac{2}{3} f(\theta_k) \cos \theta_k$$

ومن جهة أخرى أن العزم الأول للقطاع حول المحور  $y$  هو :

$$\bar{x}_k \cdot \frac{1}{2} \rho_k^2 \Delta \theta = \frac{2}{3} \rho_k \cos \theta_k \cdot \frac{1}{2} \rho_k^2 \Delta \theta = \frac{1}{3} \{f(\theta_k)\}^2 \cos \theta_k \Delta \theta$$

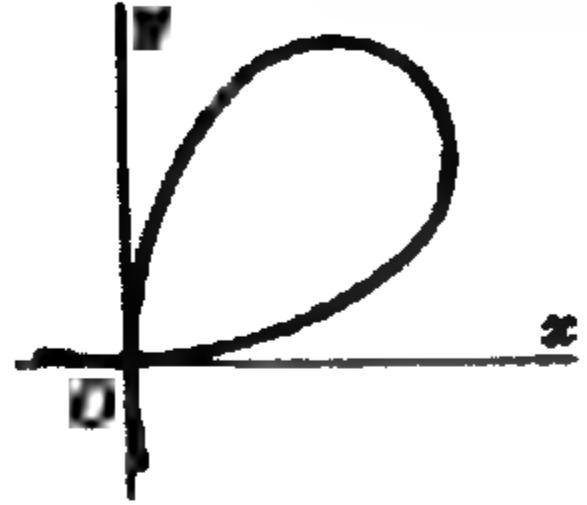
واستنادا إلى النظرية الأساسية :

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} (f(\theta_k))^3 \cos \theta_k \Delta_k \theta = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \cos \theta d\theta$$

يترك القارئ أن يحصل على الصيغة  $A\bar{y}$  كتتمرين .

ملاحظة : إن المركز المتوسط للقطاع  $OR_k$  يقع ، استنادا إلى المسألة ٨ من الفصل ٢٧ على  $OT_k$

على بعد  $\frac{2\rho_k \sin \frac{1}{2}\Delta_k \theta}{3 \cdot \frac{1}{2}\Delta_k \theta}$  من النقطة  $O$  . لعل القارئ يرغب أن يستخدم هذه النتيجة في استنتاج الصيغتين السابقتين .



شكل ٨ -

٩ - عين المركز المتوسط للسطح الواقع في الربع الأول والمحدد بعقدة الوردية  $\rho = \sin 2\theta$  .

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \left[ \theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\pi}{8} \bar{x} = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \rho^3 \cos \theta d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\theta \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^4 \theta d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \cos^4 \theta \sin \theta d\theta = \frac{16}{105}, \quad \bar{x} = \frac{128}{105\pi}$$

واستنادا إلى التناظر يكون  $\bar{y} = 128/105\pi$  والمركز المتوسط هو النقطة  $(128/105\pi, 128/105\pi)$

١٠ - عين المركز المتوسط للسطح الواقع في الربع الأول والمحدد بالقطع المكافئ  $\rho = \frac{6}{1 + \cos \theta}$  كما هو مبين في

الشكل ٩ - ١١ .

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{36}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} \sec^4 \frac{1}{2}\theta d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \tan^2 \frac{1}{2}\theta) \sec^2 \frac{1}{2}\theta d\theta = 9 \left[ \tan \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{1}{2}\theta \right]_0^{\pi/2} = 12$$

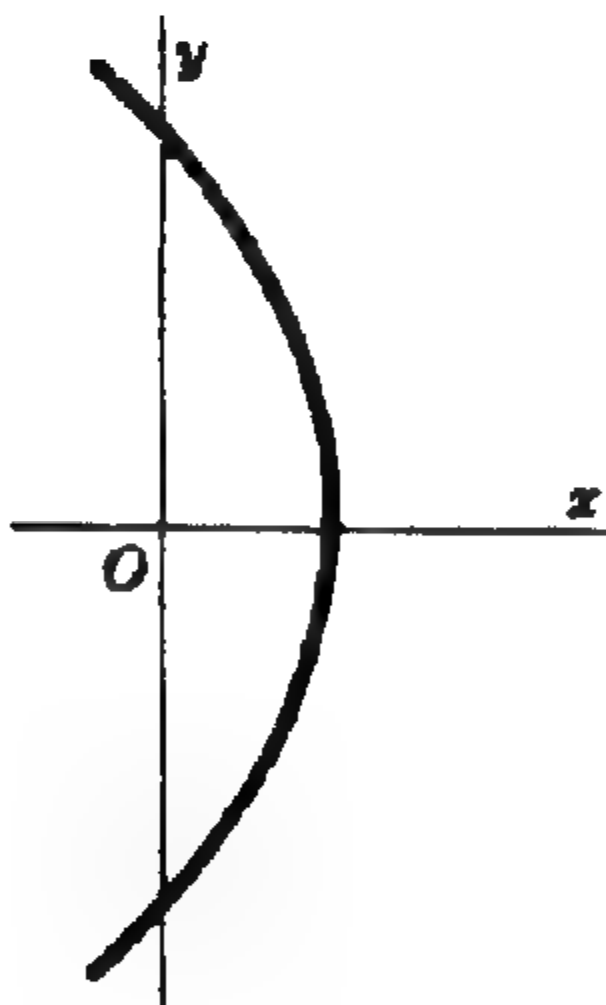
$$12\bar{x} = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{216 \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^3} d\theta = 9 \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta - 1}{\cos^4 \frac{1}{2}\theta} d\theta$$

$$= 9 \int_0^{\pi/2} (2 \sec^4 \frac{1}{2}\theta - \sec^2 \frac{1}{2}\theta) d\theta = 18 \left[ \tan \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{3} \tan^3 \frac{1}{2}\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 72/5, \text{ and } \bar{x} = 6/5.$$

$$12\bar{y} = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{216 \sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta = 27, \text{ و } \bar{y} = 9/4.$$

والمركز المتوسط هو النقطة  $(6/5, 9/4)$  .



شكل ٩ -

### مسائل إضافية

١١ - احسب مساحة السطح المحدد بكل من المنحنيات التالية :

$\pi$ sq. un.	: ج	$\rho^2 = 1 + \cos 2\theta$	(١)
$a^2$ sq. un.	: ج	$\rho^2 = a^2 \sin \theta (1 - \cos \theta)$	(ب)
$4\pi$ sq. un.	: ج	$\rho = 4 \cos \theta$	(ج)
$\frac{1}{2}\pi a^2$ sq. un.	: ج	$\rho = a \cos 2\theta$	(د)
$6\pi$ sq. un.	: ج	$\rho = 4 \sin^3 \theta$	(هـ)
$24\pi$ sq. un.	: ج	$\rho = 4(1 - \sin \theta)$	(و)



١٢ - احسب مساحة السطح :

- (أ) داخل  $\rho = \cos \theta$  وخارج  $\rho = 1 - \cos \theta$  . ج :  $(\sqrt{3} - \pi/3)$  sq. un.  
 (ب) داخل  $\rho = \sin \theta$  وخارج  $\rho = 1 - \cos \theta$  . ج :  $(1 - \pi/4)$  sq. un.  
 (ج) بين البيضوي الداخلي والبيضوي الخارجي لـ  $\rho^3 = a^3(1 + \sin \theta)$  . ج :  $4a^3$  sq. un.  
 (د) بين عقلي المنحنى  $\rho = 2 - 4 \sin \theta$  . ج :  $4(\pi + 3\sqrt{3})$  sq. in.

١٣ - (أ) حلزون أرشميدس  $\rho = a\theta$  . بين أن المساحة التي تضاف بالدورة الـ  $n$  ( $n > 2$ ) تساوي  $(n-1)$  مرة من المساحة التي تضاف بالدورة الثانية .

(ب) لحلزون الوغاريتمى  $\rho = ae^{\theta}$  . بين أن المساحة التي تضاف بالدورة الـ  $n$  ( $n > 2$ ) تساوي  $e^{4\pi}$  مرة من المساحة التي تضاف بالدورة التي قبلها .

١٤ - عين المركز المتوسط للسطوح التالية :

- (أ) النصف الأيمن من  $\rho = a(1 - \sin \theta)$  . ج :  $(16a/9\pi, -5a/6)$   
 (ب) السطح الواقع في الربع الأول والمحدد بـ  $\rho = 4 \sin^2 \theta$  . ج :  $(128/63\pi, 2048/315\pi)$   
 (ج) النصف المملوء من  $\rho = 2 + \cos \theta$  . ج :  $(17/18, 80/27\pi)$   
 (د) السطح الواقع في الربع الأول والمحدد بـ  $\rho = 1 + \cos \theta$  . ج :  $(\frac{16 + 5\pi}{16 + 6\pi}, \frac{10}{8 + 3\pi})$   
 (هـ) السطح الواقع في الربع الأول في المسألة هـ . ج :  $(\frac{32 + 15\pi}{48 + 6\pi}, \frac{22}{24 + 3\pi})$

١٥ - استخدم نظرية بابلوس الأولى لتحصل على الحجم الناتج بدوران :

- (أ)  $\rho = a(1 - \sin \theta)$  حول المستقيم  $\theta = \pi/2$  . ج :  $8\pi a^3/3$  cu. un.  
 (ب)  $\rho = 2 + \cos \theta$  حول المحور القطبي . ج :  $40\pi/3$  cu. un.

## الفصل الخامس والأربعون

### الطول الكواس ومراكزها المتوسطة . مساحات السطوح الدورانية في الإحداثيات القطبية

يعطى طول قوس المنحنى  $\rho = f(\theta)$  من  $\theta = \theta_1$  إلى  $\theta = \theta_2$  بـ

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

أنظر المثال ١ - ٤

**المركز المتوسط لقوس** • يحقق الإحداثيين  $(\bar{x}, \bar{y})$  للمركز المتوسط لقوس المنحنى  $\rho = f(\theta)$  من  $\theta = \theta_1$  إلى  $\theta = \theta_2$  العلاقات :

$$\begin{aligned}\bar{x} \cdot s &= \bar{x} \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \cos \theta ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x ds \\ \bar{y} \cdot s &= \bar{y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \sin \theta ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y ds\end{aligned}$$

أنظر المثال ٥ - ٦

**مساحة السطح الدوراني** الناتج عن دوران قوس المنحنى  $\rho = f(\theta)$  من  $\theta = \theta_1$  إلى  $\theta = \theta_2$  حول :

$$S_x = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} y ds = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \sin \theta ds \quad \text{المحور القطبي هو}$$

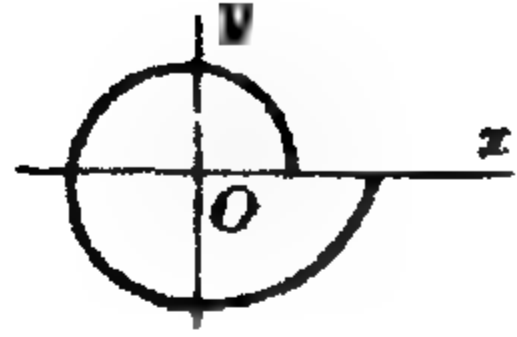
$$S_y = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} x ds = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \cos \theta ds \quad \text{والمحور } \theta = \pi/2 \text{ هو}$$

عل أن يؤخذ حدا التكامل قريبين من بعضهما بقدر الإمكان .

أنظر المثال ٧ - ١٠

### مسائل محلولة

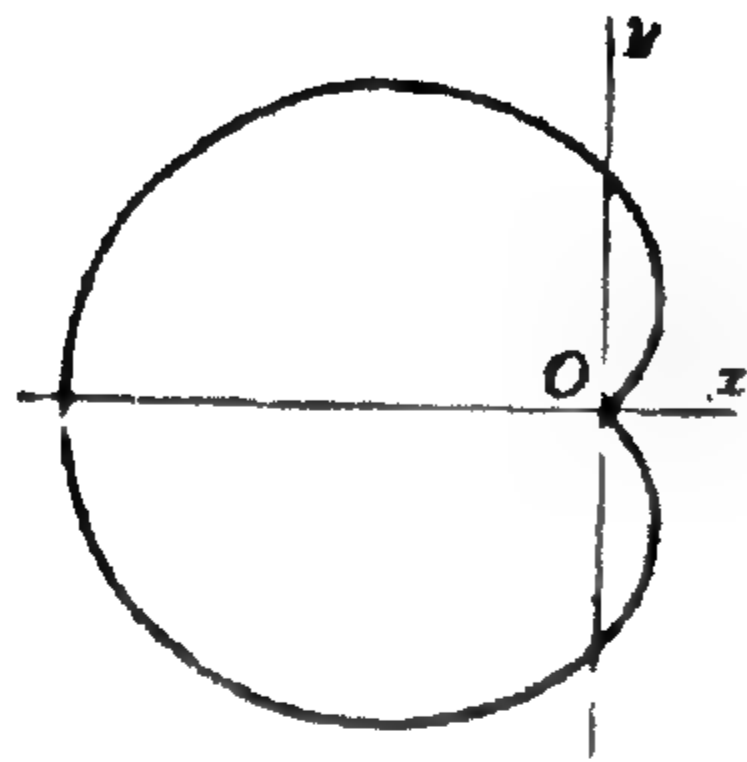
١ - احسب طول قوس الحلزون  $\rho = e^{2\theta}$  من  $\theta = 0$  إلى  $\theta = 2\pi$  .



شكل ١ - {٥}

$$dp/d\theta = 2e^{2\theta} \text{ and } p^2 + (dp/d\theta)^2 = 5e^{4\theta}.$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{p^2 + (dp/d\theta)^2} d\theta = \sqrt{5} \int_0^{2\pi} e^{2\theta} d\theta = \frac{1}{2}\sqrt{5}(e^{4\pi} - 1) \text{ units}$$



شكل ٢ - {٥}

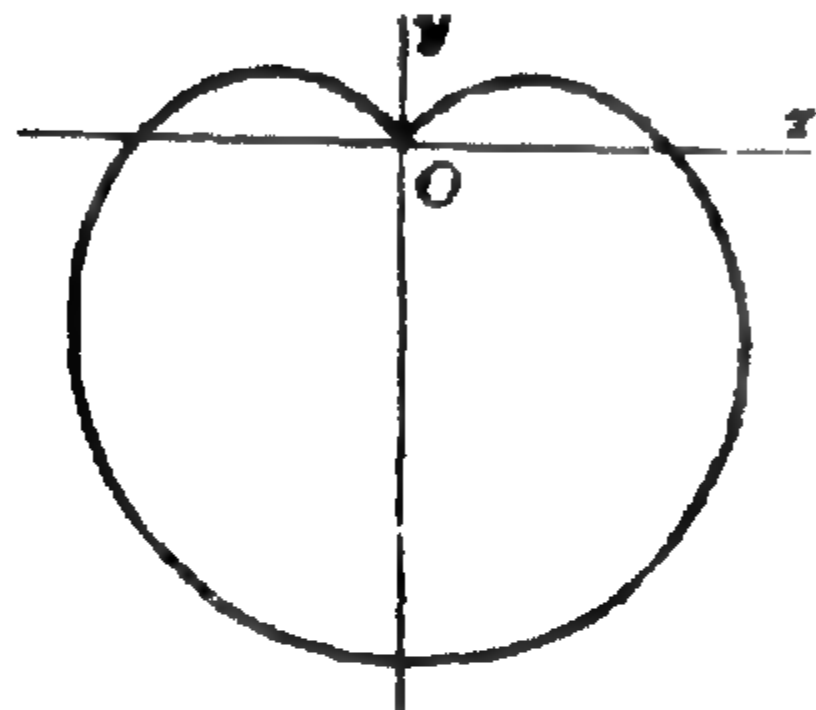
$$p = a(1 - \cos \theta). \quad \text{٢ - احسب طول منحنى القلب (الكارديويد)}$$

ترسم النقطة منحنى القلب بكامله عندما تتغير  $\theta$  من 0 إلى  $2\pi$

$$p^2 + (dp/d\theta)^2 = a^2(1 - \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{p^2 + (dp/d\theta)^2} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2}\theta d\theta = 8a \text{ units}$$

لم نأخذ في هذا الحل حتى التكامل قريبين بقدر الإمكان ، وذلك لأن الطول المطلوب يساوى ضعف الطول عندما تتغير  $\theta$  من 0 إلى  $\pi$  أنظر المسألة ٣ .



شكل ٣ - {٥}

$$p = a(1 - \sin \theta). \quad \text{٣ - احسب طول منحنى القلب}$$

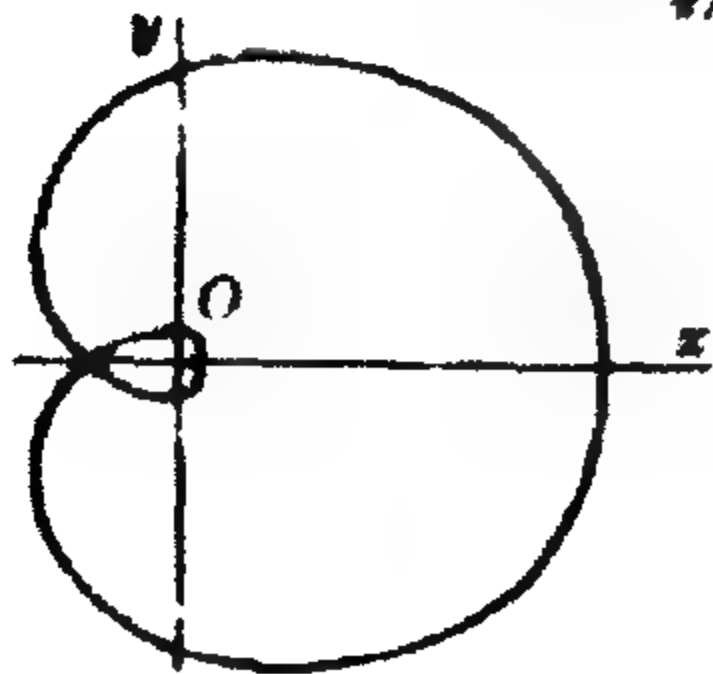
$$p^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2 = a^2(1 - \sin \theta)^2 + (-a \cos \theta)^2 = 2a^2(\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta)^2$$

وباتباع طريقة المسألة ٢ نكتب :

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{p^2 + (dp/d\theta)^2} d\theta = \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} (\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta) d\theta \\ = 2\sqrt{2} a (-\cos \frac{1}{2}\theta - \sin \frac{1}{2}\theta) \Big|_0^{2\pi} = 4\sqrt{2} a \text{ units}$$

إن منحنى القلب في المسألتين لا يختلفان عن بعضهما إلا بوضعهما في المستوى ، لذلك فإن ينبغي أن يكون لهما نفس الطول . وتلخيص هذا الاختلاف نجده في دراسة الدالتين المكاملتين  $\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta$  و  $\sin \frac{1}{2}\theta + \cos \frac{1}{2}\theta$  في حين لا تصبح الأولى سالبة أبدا نجد الثانية سالبة عندما تتغير  $\theta$  من 0 إلى  $\frac{1}{2}\pi$  وبوجبة فيما عدا ذلك . والطول المطلوب هو ضعف الطول الذي نحصل عليه عندما تتغير  $\theta$  من  $\pi/2$  إلى  $3\pi/2$  لذلك يكون :

$$s = 2\sqrt{2} a \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta) d\theta = 4\sqrt{2} a (-\cos \frac{1}{2}\theta - \sin \frac{1}{2}\theta) \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 8a \text{ units}$$



شكل ٤ - {٥}

$$p = a \cos^3 \frac{1}{2}\theta. \quad \text{٤ - احسب طول المنحنى}$$

إن الطول المطلوب ضعف الطول الذي نحصل عليه عندما تتغير  $\theta$  من 0 إلى  $2\pi$  .

$$dp/d\theta = -a \cos^2 \frac{1}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta \text{ and } p^2 + (dp/d\theta)^2 = a^2 \cos^4 \frac{1}{2}\theta.$$

$$s = 2 \cdot a \int_0^{2\pi} \cos^3 \frac{1}{2}\theta d\theta = 8a \left[ \sin \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{1}{2}\theta \right]_0^{2\pi} \\ = 16a/3 \text{ units}$$

٥ - عين المركز المتوسط لمنحنى القلب  $\rho = a(1 - \cos \theta)$ . أنظر المسألة ٢.

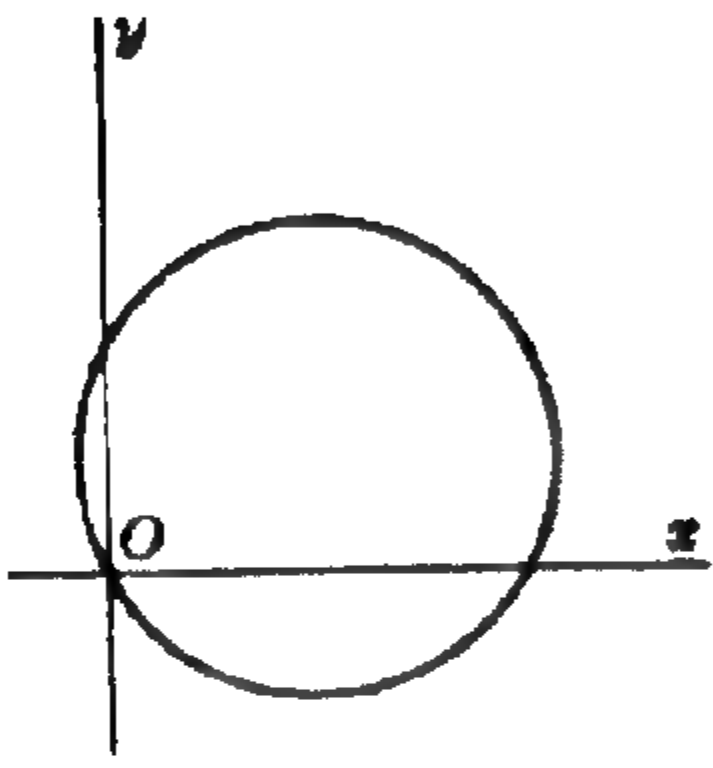
إن  $\bar{y} = 0$  بسبب التناظر وإن  $\bar{x}$  المنحنى بكامله لا يختلف عن  $\bar{x}$  النصف الأعلى منه ولقد رأينا في المسألة ٢ أن نصف طول منحنى القلب هو  $4a$  لذلك :

$$\begin{aligned} 4a \cdot \bar{x} &= \int_0^\pi \rho \cos \theta \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2} d\theta = 2a^2 \int_0^\pi (1 - \cos \theta) \cos \theta \sin \frac{1}{2}\theta d\theta \\ &= 4a^2 \int_0^\pi (-2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta + 3 \cos^2 \frac{1}{2}\theta - 1) \sin \frac{1}{2}\theta d\theta = 4a^2 \left[ \frac{4}{3} \cos^3 \frac{1}{2}\theta - 2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta + 2 \cos \frac{1}{2}\theta \right]_0^\pi \\ &= -16a^2/5, \end{aligned}$$

ومنه  $\bar{x} = -4a/5$ . واحداثيا المركز المتوسط هما  $(-4a/5, 0)$

٦ - عين المركز المتوسط لقوس الدائرة  $\rho = 2 \sin \theta + 4 \cos \theta$  من  $\theta = 0$  إلى  $\theta = 1/2\pi$

أن  $d\rho/d\theta = 2 \cos \theta - 4 \sin \theta$  و  $\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2 = 20$ . وبما أن نصف القطر هو  $\sqrt{5}$ ، فإن  $\pi/2 = \sqrt{5} \pi$



شكل ٥ - ٥

$$\begin{aligned} \sqrt{5} \pi \cdot \bar{x} &= \int_0^{\pi/2} \rho \cos \theta \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2} d\theta \\ &= 4\sqrt{5} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta \cos \theta + 2 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 4\sqrt{5} \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= 2\sqrt{5}(\pi + 1), \text{ and } \bar{x} = \frac{2(\pi + 1)}{\pi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{5} \pi \cdot \bar{y} &= \int_0^{\pi/2} \rho \sin \theta \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2} d\theta = 4\sqrt{5} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= 4\sqrt{5} \left[ \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta + \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} = 4\sqrt{5} \left( \frac{1}{2} \pi + 1 \right). \quad \bar{y} = \frac{\pi + 4}{\pi}. \end{aligned}$$

٧ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران النصف العلوي لمنحنى القلب  $\rho = a(1 - \cos \theta)$  حول المحور القطبي.

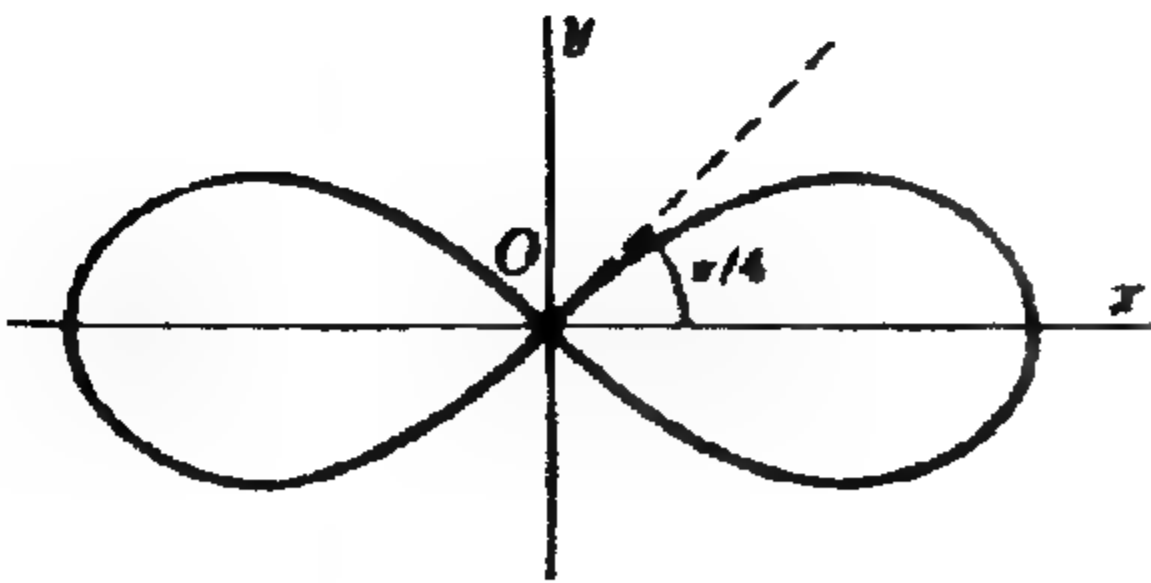
نعلم من المسألة ٢ أن  $\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta$ . ومنه

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi \rho \sin \theta \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2} d\theta = 4a^2 \pi \int_0^\pi (1 - \cos \theta) \sin \theta \sin \frac{1}{2}\theta d\theta \\ &= 16a^2 \pi \int_0^\pi \sin^4 \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta d\theta = \frac{32}{3} a^2 \pi \text{ square units} \end{aligned}$$

٨ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى ذي المروتين

بمنسكات  $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$  حول المحور القطبي.

إن المساحة المطلوبة تساوي ضعف المساحة الناتجة عن دوران جزء المنحنى الواقع في الربع الأول.



شكل ٦ - ٦

$$\begin{aligned} \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 &= a^2 \cos 2\theta + \left( -\frac{a^2 \sin 2\theta}{\rho} \right)^2 = \frac{a^4}{\rho^2} \\ S &= 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} \rho \sin \theta \frac{a^2}{\rho} d\theta = 4a^2 \pi \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta \\ &= 2a^2 \pi (2 - \sqrt{2}) \text{ square units} \end{aligned}$$

٩ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران عقدة من المنحنى ذي العروقتين  $r = a^2 \cos 2\theta$  حول المحور  $\theta = \pi/2$ .

إن المساحة المطلوبة تساوى ضعف المساحة الناتجة عن دوران جزء المنحنى الواقع في الربع الأول.

$$S = 2 \cdot 2 \int_0^{\pi/4} r \cos \theta \frac{a^2}{\rho} d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi/4} \cos \theta d\theta = 2\sqrt{2} a^2 = \text{square units}$$

١٠ - استخدم نظرية بابلوس لتحديد المركز المتوسط لقوس منحنى القلب  $r = a(1 - \cos \theta)$  من  $\theta = 0$  إلى  $\theta = \pi$ .

لنجعل القوس يدور حول المحور القطبي فيكون  $S = 2\pi y \bar{y}$ . استنادا إلى المألين  $\bar{y}$  و  $\bar{y}$  أن  $32a^3/5 - 2\bar{y} \cdot 4a$  وبالتالي  $\bar{y} = 4a/5$ .

واستنادا إلى المسألة ٥ نرى أن إحداثي المركز المتوسط  $(-4a/5, 4a/5)$ .

### مسائل إضافية

١١ - احسب طول كل من :

(أ)  $r = \theta^2$  من  $\theta = 0$  إلى  $\theta = 2\sqrt{3}$ . ج:  $56/3$  units

(ب)  $r = e^{\theta/2}$  من  $\theta = 0$  إلى  $\theta = 8$ . ج:  $\sqrt{5}(e^4 - 1)$  units

(ج)  $r \cos^2 \theta/2$  ج:  $4$  units

(د)  $r = \sin^3 \theta/3$  ج:  $3\pi/2$  units

(هـ)  $r = \cos^4 \theta/4$  ج:  $16/3$  units

(و)  $r = a/\theta$  من  $(\rho_1, \theta_1)$  إلى  $(\rho_2, \theta_2)$ . ج:  $\sqrt{a^2 + \rho_1^2} - \sqrt{a^2 + \rho_2^2} + a \ln \frac{\rho_1(a + \sqrt{a^2 + \rho_1^2})}{\rho_2(a + \sqrt{a^2 + \rho_2^2})}$  units

(ز)  $r = 2a \tan \theta \sin \theta$  من  $\theta = 0$  إلى  $\theta = \pi/3$ . ج:  $2a\sqrt{3} \left\{ \frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \right\}$  units

١٢ - عين المركز المتوسط لنصف العلوي من  $r = 8 \cos \theta$ . ج:  $(4, 8/\pi)$

١٣ - المنحنى  $r = a \sin \theta + b \cos \theta$  يبين أن  $S_1 = a = 8$  و  $S_2 = b = 8$  و  $\pi \sqrt{a^2 + b^2}$ .

١٤ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى  $r = 4 \cos \theta$  حول المحور القطبي.

ج:  $16\pi$  sq. un.

١٥ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران كل عقدة من  $r = \sin^3 \theta/3$  حول المحور  $\theta = \pi/2$ .

ج:  $\pi/256$  sq. un. :  $513\pi/256$  sq. un.



**٢٧. الفصل الخامس والاربعون - لطوال الكواكب ومراكزها الوسطية مسطحات سطوح الدورانية في الإحداثيات القطبية**

١٦ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران عقدة المنحنى  $\rho = \cos 2\theta$  حول المحور  $\theta = \pi/2$

ج :  $2\sqrt{2} \pi$  sq. un.

١٧ - بين أنه إذا دارت كل من عقدة  $\rho = \cos^4 \theta/4$  حول المحور القطبي فإنهما ينتجان سطحين متساويين في المساحة.

١٨ - عين المركز المتوسط لسطح الناتج عن دوران العقدة اليمنى للمنحنى  $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$  حول المحور القطبي.

ج :  $x = \sqrt{2}a(\sqrt{2} + 1)/6$

١٩ - احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى  $\rho = \sin^2 \theta/2$  حول المستقيم  $\rho = \csc \theta$ .

ج :  $8\pi$  sq. un.

٢٠ - استخرج صيغ هذا الفصل.

## الفصل السادس والأربعون

### التكاملات المعتمة

يقال عن التكامل المحد  $\int_a^b f(x) dx$  إنه تكامل معتل إذا :

( أ ) كان لدالة المكاملة  $f(x)$  في الفترة  $a \leq x \leq b$  نقطة انقطاع واحدة أو أكثر .

( ب ) أو كان أحد حدى التكامل على الأقل لا نهائيا .

**الدالة المكاملة المتقطعة :** إذا كانت  $f(x)$  متصلة في الفترة  $a \leq x < b$  ولكنها منقطعة عند  $x = b$  فإننا نمسرف :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_a^{b-t} f(x) dx$$

بشرط وجود النهاية .

وإذا كانت  $f(x)$  متصلة في الفترة  $a < x \leq b$  ولكنها منقطعة عند  $x = a$  فإننا نمسرف

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{a+t}^b f(x) dx$$

بشرط وجود النهاية .

وإذا كانت  $f(x)$  متصلة لمسرح قيم  $x$  في الفترة  $a \leq x \leq b$  باستثناء  $x = c$  حيث  $a < c < b$  فإننا نمسرف :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_a^{c-t} f(x) dx + \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{c+t}^b f(x) dx$$

بشرط وجود التايين .

أنظر المسائل ١ - ٦

**حدا التكامل اللانهائين :** إذا كانت  $f(x)$  متصلة في الفترة  $a \leq x \leq \infty$  فإننا نمسرف :

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

بشرط وجود النهاية

وإذا كانت  $f(x)$  متصلة في الفترة  $-\infty \leq x \leq b$  فإننا نمسرف :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^b f(x) dx$$

بشرط وجود النهاية

وإذا كانت  $f(x)$  متصلة في الفترة  $u \leq x \leq u'$  فإننا نعرف

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_u^{\infty} f(x) dx + \lim_{u' \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{u'} f(x) dx$$

بشرط وجود النهايتين .

أنظر المسائل ٧ - ١٢

### مسائل محلولة

١ - احسب قيمة  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$  . إن الدالة المكاملة متقطعة عند  $x = 3$  . لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{3-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \arcsin \frac{x}{3} \right]_0^{3-\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arcsin \frac{3-\epsilon}{3} = \arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2}\pi \quad \text{ومنه}$$

٢ - بين أنه ليس التكامل  $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$  متناهي . إن الدالة المكاملة متناهي انقطاعا عند  $x = 2$  . لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2-\epsilon} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \ln \frac{1}{2-x} \right]_0^{2-\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \ln \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{1}{2} \right)$$

إن النهاية غير موجودة وبالتالي ليس التكامل متناهي .

٣ - بين أنه ليس التكامل  $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$  متناهي .

إن الدالة المكاملة متناهي انقطاعا عند النقطة  $x = 1$  بين حتى التكامل 4,0 . لذلك نعتبر :

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \int_{1+\epsilon'}^4 \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{-1}{x-1} \right]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \left[ \frac{-1}{x-1} \right]_{1+\epsilon'}^4 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right) + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{\epsilon'} + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

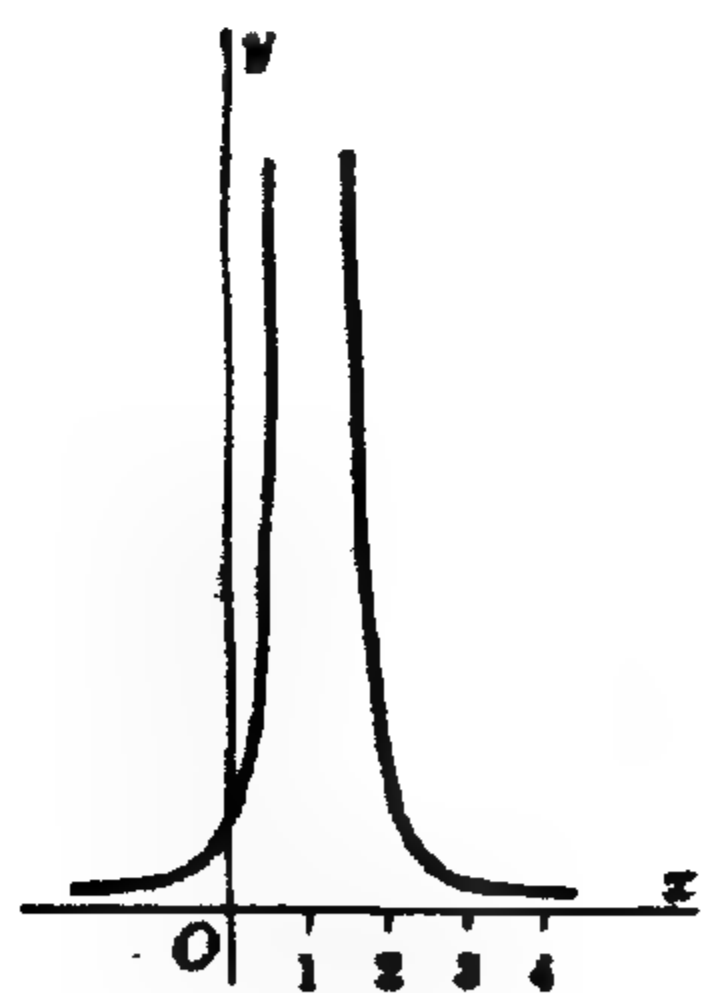
إن النهاية غير موجودة وبالتالي ليس التكامل متناهي .

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[ -\frac{1}{x-1} \right]_0^4 = -\frac{4}{3}$$

أما إذا خفضنا النظر عن الانقطاع فإننا نجد

وهذه النتيجة غير مقبولة .

٤ - احسب قيمة  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$  . إن الدالة المكاملة متناهي انقطاعا عند  $x = 1$  . لذلك نعتبر :



شكل ٦ - ١

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\epsilon}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{3}{2} (x-1)^{2/3} \right]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{3}{2} (x-1)^{2/3} \right]_{1+\epsilon}^4 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} \left( (-\epsilon)^{2/3} - 1 \right) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - \epsilon^{2/3}) = \frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - 1) \\ \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} &= \frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - 1). \end{aligned}$$

وبالتالى فإن

٥ - برهن أنه ليس لتكامل  $\int_0^{\pi/2} \sec x \, dx$  معنى . إن الدالة المكاملة تملك انقطاعا عند  $x = 1/2\pi$ .

لذلك نعتبر :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1/2\pi - \epsilon} \sec x \, dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln (\sec x + \tan x) \Big|_0^{1/2\pi - \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln \{ \sec (1/2\pi - \epsilon) + \tan (1/2\pi - \epsilon) \} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln \{ -1 + 0 \} = -\infty. \end{aligned}$$

وأن النهاية غير موجودة وبالتالي ليس لتكامل معنى .

٦ - احسب قيمة  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} \, dx$ . إن الدالة المكاملة تملك انقطاعا عند  $x = 1/2\pi$  لذلك نعتبر :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1/2\pi - \epsilon} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} \, dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ -2(1 - \sin x)^{1/2} \right]_0^{1/2\pi - \epsilon} = 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \{ -[1 - \sin (1/2\pi - \epsilon)] + 1 \} \\ &= 2(0 + 1) = 2. \end{aligned}$$

وبالتالى فإن  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} \, dx = 2$ .

٧ ... احسب قيمة  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$ . إن الحد الأعلى لتكامل لا نهائى ، لذلك نعتبر :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{4}\pi. \quad \text{وبالتالى} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u \frac{dx}{x^2 + 4} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}x \Big|_0^u = \frac{1}{4}\pi.$$

٨ - احسب قيمة  $\int_{-\infty}^0 e^{2x} \, dx$ . إن الحد الأدنى لتكامل لا نهائى لذلك نعتبر :

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}. \quad \text{وبالتالى فإن} \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 e^{2x} \, dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_u^0 = \frac{1}{2}(1) - \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^{2u} = \frac{1}{2} - 0.$$

٩ - بين أنه ليس لتكامل  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$  معنى . إن الحد الأعلى لتكامل نهائى لذلك نعتبر :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ 2\sqrt{x} \right]_1^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} (2\sqrt{u} - 2).$$

والنهاية غير موجودة .

١٠ - احسب قيمة  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ . إن حدى التكامل لا نهائيان . لذلك نعتبر :

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u \frac{e^x \, dx}{e^{2x} + 1} + \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 \frac{e^x \, dx}{e^{2x} + 1} &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ \arctan e^x \right]_0^u + \lim_{u \rightarrow -\infty} \left[ \arctan e^x \right]_u^0 \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} (\arctan e^u - \frac{1}{2}\pi) + \lim_{u \rightarrow -\infty} (\frac{1}{2}\pi - \arctan e^u) \\ &= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi - 0 = \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

١١- احسب قيمة  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx$ . إن الحد الأعلى للتكامل لانهاضي . لذلك نعتبر :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-x} \sin x \, dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_0^u = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-u} (\sin u + \cos u) \right\} + \frac{1}{2}$$

عندما  $u \rightarrow \infty$  نجد أن  $e^{-u} \rightarrow 0$  في حين يتغير كل من  $\sin u$  و  $\cos u$  من 1 الى -1 .

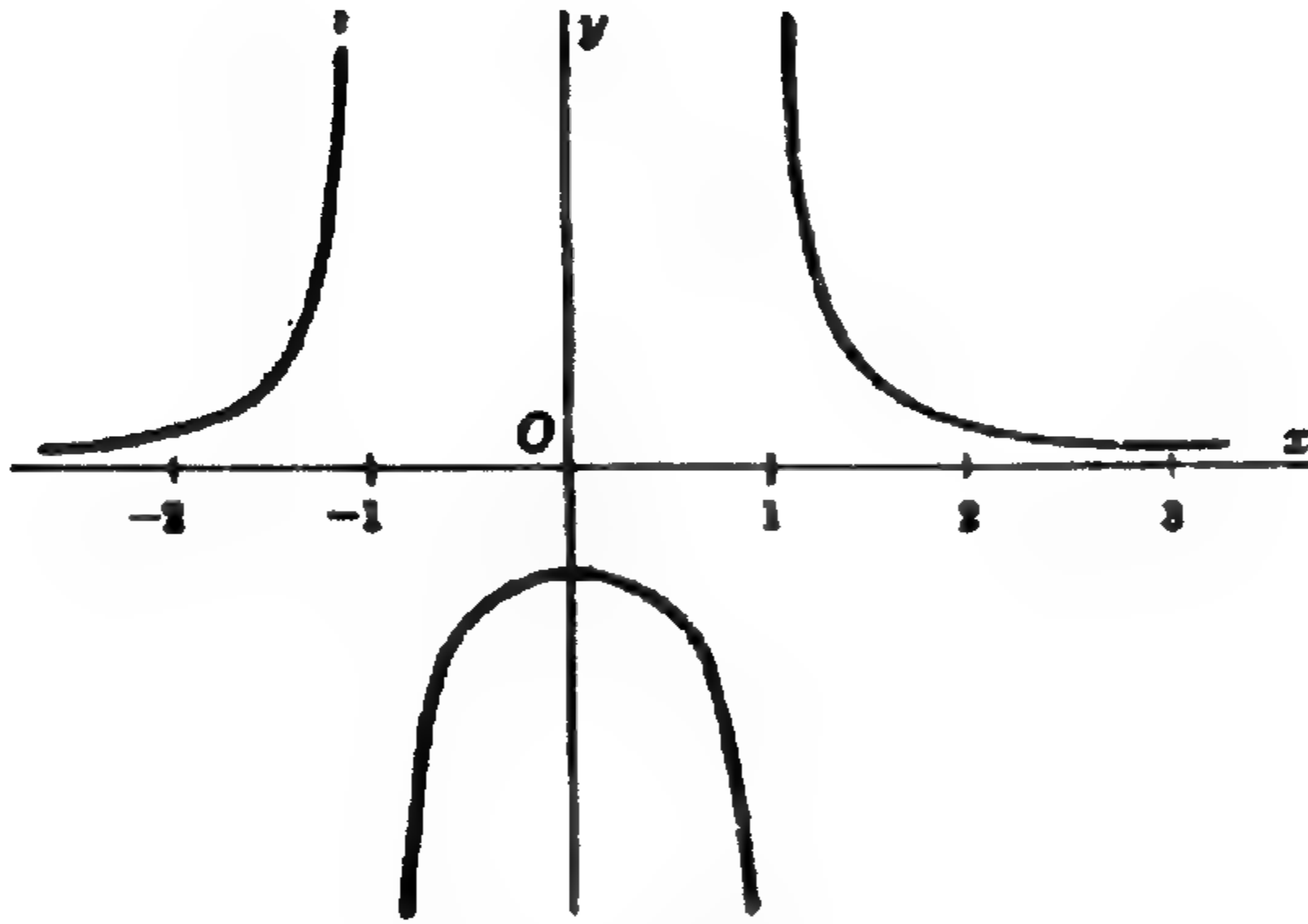
$$\text{لذلك فإن } \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx = \frac{1}{2}.$$

١٢- احسب المساحة المحصورة بين المنحنى  $y = \frac{x^2}{1-x^2}$  وخطية المقاربين . أنظر الشكل ١٦-٢ :

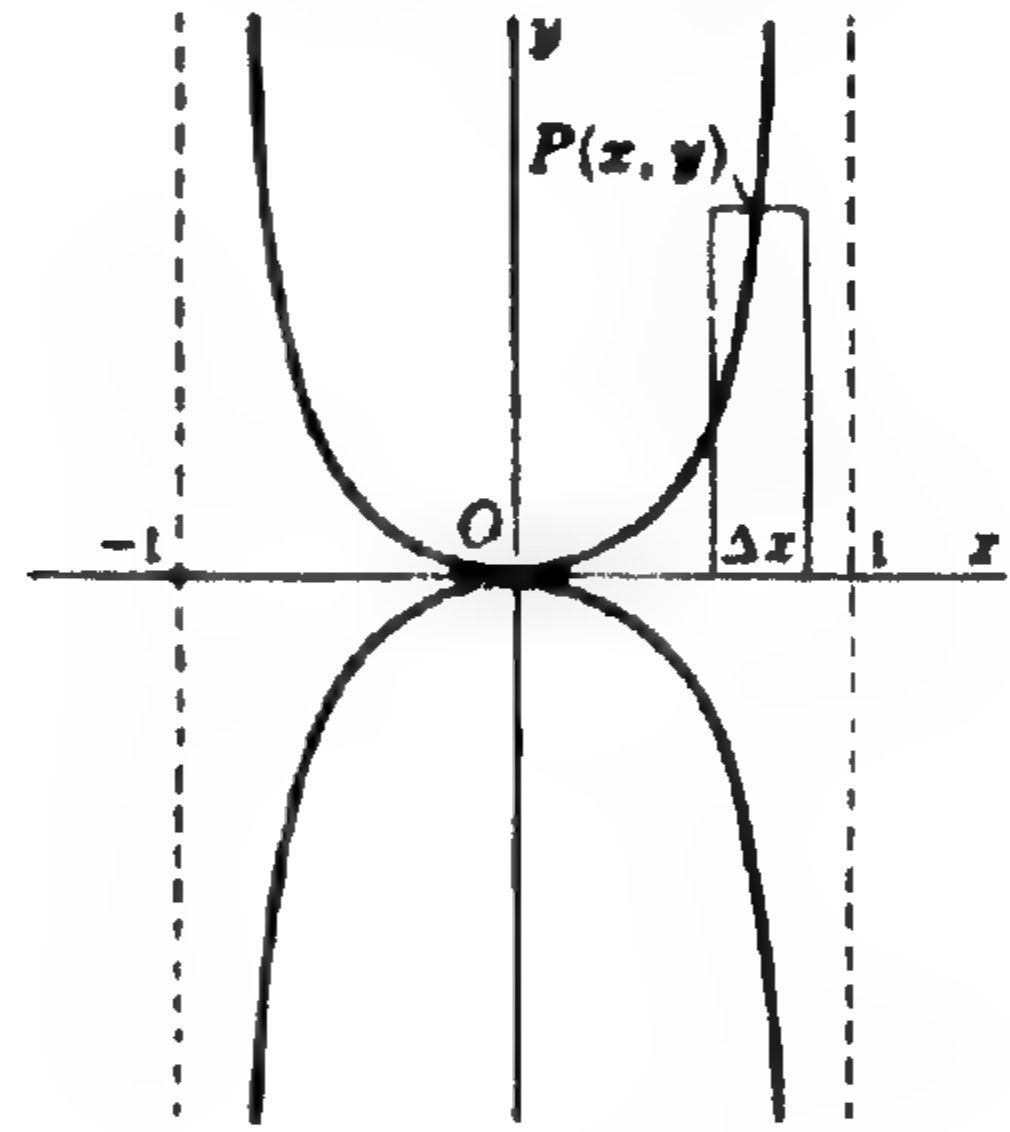
إن  $A = 4 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$  ، ولكن العلاقة المكاملة تعاقب انقطاعا عند  $x = 1$  . لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ -(1-x^2)^{1/2} \right]_0^{1-\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{2\epsilon - \epsilon^2}) = 1$$

والمساحة المطلوبة تساوي  $4(1) = 4 \text{ sq. un.}$



شكل ١٦-٢



شكل ١٦-٢

١٣- احسب المساحة الواقعة على يمين  $x=3$  بين المنحنى  $y = \frac{1}{x^2-1}$  والمحور  $x$  .

$$\begin{aligned} A &= \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_3^u \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ \ln \frac{x-1}{x+1} \right]_3^u \\ &= \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln \frac{u-1}{u+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln \frac{1-1/u}{1+1/u} + \frac{1}{2} \ln 2 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2) \text{ sq. un.} \end{aligned}$$

### مسائل إضافية

١- بين أن :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \quad (١)$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{4-x} \text{ ليس له معنى} \quad (ب)$$



$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = 4 \quad (\text{ج})$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^{3/2}} \text{ ليس له معنى.} \quad (\text{د})$$

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \pi \quad (\text{هـ})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = 9/2 \quad (\text{و})$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = 6\sqrt[3]{2} \quad (\text{ز})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \text{ ليس له معنى.} \quad (\text{ح})$$

$$\int_0^1 \ln x \, dx = -1 \quad (\text{ط})$$

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = -1/4 \quad (\text{ي})$$

١٥- احسب المساحة الواقعة بين المنحنى المفروض وخطوطه المقاربة :

$$y^2 = \frac{1}{x(1-x)} \quad (\text{ج}) \quad y^2 = \frac{4-x}{x}, \quad (\text{ب}) \quad y^2 = \frac{x^2}{4-x^2}, \quad (\text{ا})$$

ج : (ا)  $4\pi$  sq. un. (ب)  $4\pi$  sq. un. (ج)  $2\pi$  sq. un.

١٦- بين أن :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2/e \quad (\text{و}) \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 \quad (\text{ا})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = 0 \quad (\text{ز}) \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(4-x)^2} = \frac{1}{4} \quad (\text{ب})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \pi/2 \quad (\text{ح}) \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \quad (\text{ج})$$

$$\int_{-\infty}^0 xe^x dx = -1 \quad (\text{ط}) \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(4-x)^2} \text{ ليس له معنى.} \quad (\text{د})$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 6 \quad (\text{ي}) \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2} \quad (\text{هـ})$$

١٧- احسب المساحة الواقعة بين المنحنى المفروض وخطه المقارب :

$$y = xe^{-x^2/4} \quad (\text{ج}) \quad y = \frac{x}{(4+x^2)^2}, \quad (\text{ب}) \quad y = \frac{8}{x^2+4}, \quad (\text{ا})$$

ج : (ا)  $4\pi$  sq. un. (ب)  $1/6$  sq. un. (ج)  $2$  sq. un.

١٨- احسب المساحة الواقعة :

$$(1) \text{ تحت } y = \frac{1}{x^2-4} \text{ وإلى اليمين من } x=3. \quad \text{ج : } \frac{1}{4} \ln 5 \text{ sq. un.}$$

$$(ب) \text{ تحت } y = \frac{1}{\pi(x-1)^2} \text{ وإلى اليمين من } x=2. \quad \text{ج : } 1 - \ln 2 \text{ sq. un.}$$

١٩ - بين أنه لا معنى لـ :

(١) المساحة الواقعة تحت  $y = \frac{1}{4-x^2}$  من  $x = -2$  إلى  $x = 2$  .

(ب) المساحة الواقعة تحت  $xy = 9$  وإلى اليمين من  $x = 1$  .

٢٠ - بين أن المساحة الواقعة تحت المنحنى  $y = e^{-2x}$  في الربع الأول تساوى  $\frac{1}{2}$  sq. un. ، وأن الحجم الناتج من دوران هذه القطعة حول المحور  $x$  يساوى  $\frac{1}{4}\pi$  cubic units

٢١ - بين أن الحجم الناتج من دوران السطح المستوي الواقع تحت المنحنى  $xy = 9$  وإلى اليمين من  $x = 1$  حول المحور  $x$  تساوى  $81\pi$  cu. un. في حين أن مساحة السطح الناتج لا نهائية .

٢٢ - احسب طول كل من الأقواس التالية :

(١)  $y^2 = x(3-x)^2$  ، المقدة . (ب)  $x^2 + y^2 = a^2$  ، المنحنى بأكمله . (ج)  $y^2 = x^2(2x+3)$  ، المقدة .

ج : (١)  $4\sqrt{3}$  units (ب)  $6a$  units (ج)  $2\sqrt{3}$  units

٢٣ - احسب عزم القصور الذاتي لدائرة نصف قطرها  $r$  بالنسبة إلى أحد مماساتها . ج :  $3r^2s/2$  .

٢٤ - بين أن التكامل  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p}$  متباعد لجميع قيم  $p$  .

٢٥ - (١) بين أن  $\int_a^b \frac{N dx}{(x-b)^p}$  موجود عندما  $p < 1$  وليس له معنى عندما  $p \geq 1$  .

(ب) بين أن  $\int_a^{+\infty} \frac{N dx}{x^p}$  موجود عندما  $p > 1$  وليس له معنى عندما  $p \leq 1$  .

٢٦ - نفرض أن الدالتين  $f(x) \leq g(x)$  معرفتان وليستا سالبتين في كل موضع في الفترة  $a \leq x \leq b$  بينا  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = +\infty$  ومن الشكل ٤٦ - ٤٨ يبدو من المقول أن نفرض :

(١) إذا كان  $\int_a^b g(x) dx$  موجودا فإن  $\int_a^b f(x) dx$  موجود .

(٢) إذا كان  $\int_a^b f(x) dx$  غير موجود فإن  $\int_a^b g(x) dx$  غير موجود كذلك .

بين فيما إذا كان كل تكامل مما يلي موجود أم غير موجود .

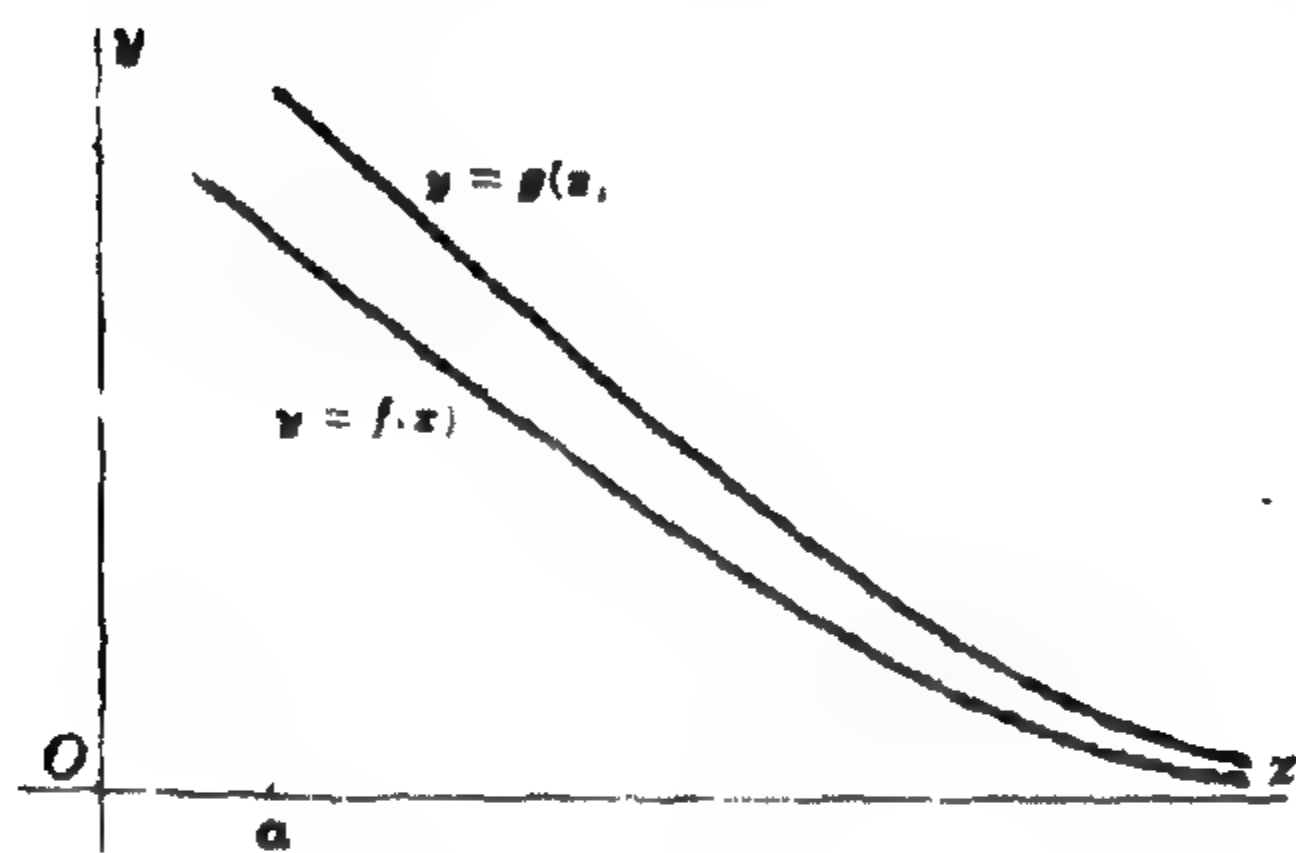
(١)  $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$  في الفترة  $0 \leq x < 1$  إن  $1-x^4 = (1-x)(1-x)(1+x^2) < 4(1-x)$  و  $\frac{1}{1-x^4} < \frac{1}{1-x}$  .

وبما أن التكامل  $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$  غير موجود فإن التكامل المفروض غير موجود .

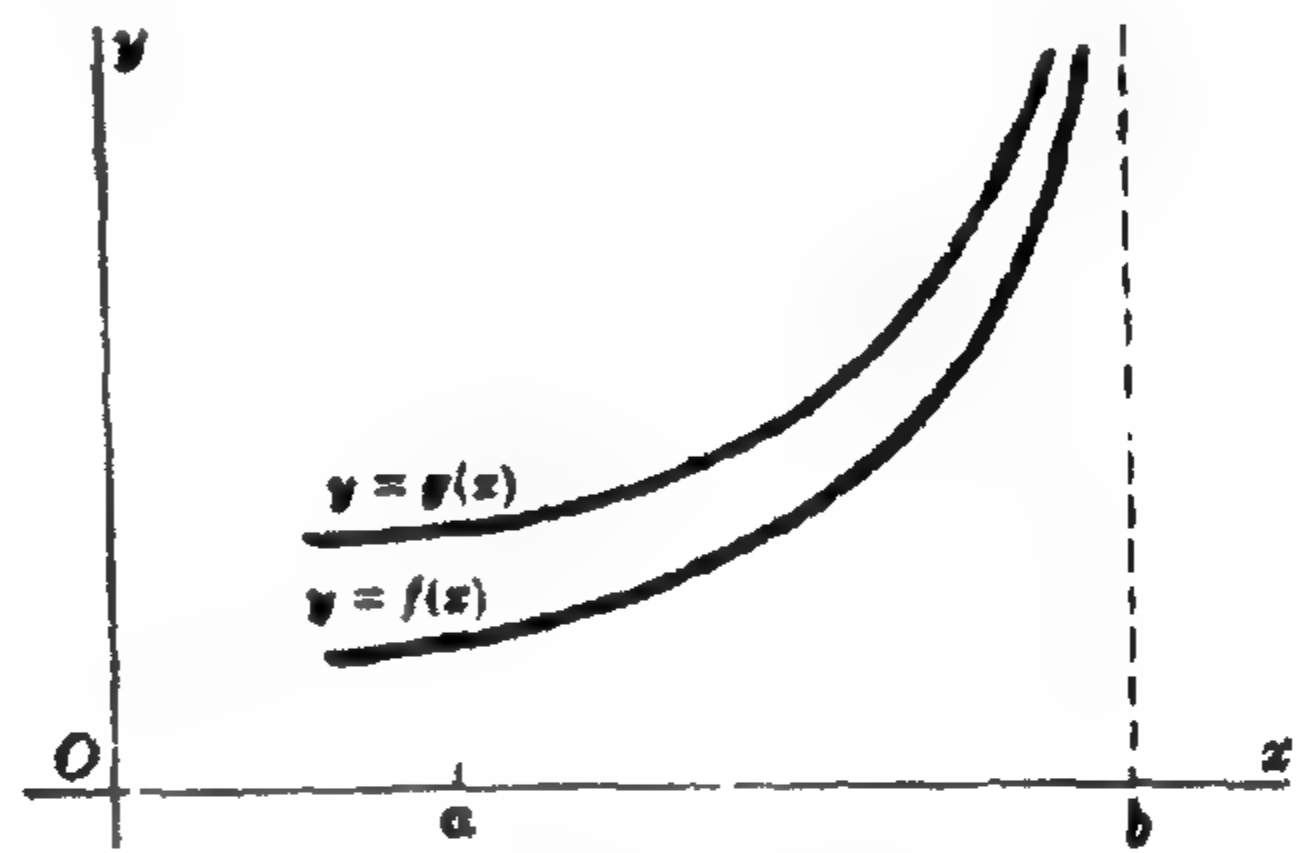
(ب)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$  في الفترة  $0 < x \leq 1$  إن  $\frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$  وبما إن التكامل  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  موجود فإن

التكامل المفروض موجود كذلك .

(ج)  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{x^{1/3}}$  موجود (د)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x}$  غير موجود (هـ)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$  موجود .



شكل ٦ - ٥



شكل ٦ - ٦

٢٧ - بفرض الدالتين  $f(x) \leq g(x)$  معرفتين وليشأنا سالبين في كل موضع في الفترة  $x \geq a$  بينها .  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  ويبدو من الشكل ٦ - ٥ أنه من المقبول أن نقبل أنه :

(٢) إذا كان  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  موجوداً فإن  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  موجود .

(٤) إذا كان  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  غير موجود فإن  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  غير موجود كذلك .

بين فيما إذا كان كل تكامل مما يلي موجوداً أو غير موجود .

(١)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2x + 6}}$  في الفترة  $x \geq 1$  أن  $\frac{1}{x^3} < \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x + 6}}$  وبما أن  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$  موجود

فكذلك التكامل المفروض .

(ب)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 2x}}$  موجود (ج)  $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$  موجود (د)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}}$  موجود .

## الفصل السابع والأربعون

### المتواليات والمتسلسلات غير المنتهية

#### ( الانتهائية )

**المتوالية غير المنتهية :**  $\{s_n\} = s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$  هي دالة في  $n$  حيز تعريفها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة - ( انظر الفصل الأول ) .

نقول عن متوالية  $\{s_n\}$  إنها محدودة إذا وجد عدنان  $Q, P$  بحيث يكون  $P \leq s_n \leq Q$  لجميع قيم  $n$  . فالمتوالية  $3/2, 5/4, 7/6, \dots, \frac{2n+1}{2n}, \dots$  مثلا محدودة لأنه مهما كانت  $n$  فإن  $1 \leq s_n \leq 2$  . أما المتوالية  $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$  فهي غير محدودة .

نقول عن متوالية  $\{s_n\}$  إنها غير متناقصة إذا كان  $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_n \leq \dots$  ، وإنها غير متزايدة إذا كان  $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots \geq s_n \geq \dots$  . فالمتواليتان  $1/2, 4/3, 9/4, 16/5, \dots$  و  $\left\{ \frac{n^2}{n+1} \right\}$  متناقصتان ، بينما المتواليتان  $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$  و  $\{1/n\}$  متزايدتان .

نقول عن متوالية  $\{s_n\}$  إنها متقاربة إلى عدد منته ، كنهاية لها ،  $\left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s \right]$  ، إذا وجد لكل عدد موجب  $\epsilon$  مهما كان صغيرا عدد صحيح موجب  $m$  بحيث إذا كان  $n > m$  فإن  $|s - s_n| < \epsilon$  . نقول عن المتوالية التي لها نهاية إنها متوالية متقاربة وإذا لم يكن لها نهاية فهي « متوالية متباعدة » .

انظر المسألتين ١ - ٢

نقول عن متوالية  $\{s_n\}$  إنها متباعدة إلى  $\infty$  ،  $\left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty \right]$  ، إذا وجد ، لكل عدد موجب  $M$  مهما كان كبيرا ، عدد صحيح موجب  $m$  بحيث إذا كان  $n > m$  فإن  $|s_n| > M$  . وإذا كان  $s_n > M$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$  ، وإذا كان  $s_n < -M$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$  .

**نظريات على المتواليات :** إن برهان النظرية الأساسية لا يدخل في إطار هذا الكتاب .

- I — كل متوالية محدودة غير متناقصة ( غير متزايدة ) متقاربة .
- II — كل متوالية غير محدودة متباعدة .
- III — إذا كانت المتوالية متقاربة ( متباعدة ) فإنها تبقى متقاربة ( متباعدة ) إذا غيرنا بعض أو جميع حدودها  $n$  الأول .

IV — إن نهاية المتوالية المتقاربة وحيدة . لبرهان انظر المسألة ٤

إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$  وكان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t$  فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \cdot s_n) = k \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = ks, \quad \text{— V}$$

حيث  $k$  ثابت .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n \pm t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = s \pm t. \quad \text{— VI}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n \cdot t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = s \cdot t. \quad \text{— VII}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n/t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n / \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = s/t, \quad \text{— VIII}$$

بشرط أن  $t \neq 0$  وإن  $s_n \neq 0$  .

هما كانت  $n$  .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/s_n = 0. \quad \text{— IX}$$

إذا كانت  $\{s_n\}$  متوالية حدودها غير صفرية وكان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty$  .

لبرهان انظر المسألة ٥ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty. \quad \text{— X}$$

إذا كان  $a > 1$  فإن . لبرهان انظر المسألة ٦

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0. \quad \text{— XI}$$

إذا كان  $|r| < 1$  فإن .

يسمى المجموع المتسار اليه :

$$\sum s_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n + \dots \quad (1)$$

لمتوالية غير منتهية  $\{s_n\}$  متسلسلة غير منتهية . يرافق كل متسلسلة متوالية مجاميع جزئية

$$S_1 = s_1, S_2 = s_1 + s_2, S_3 = s_1 + s_2 + s_3, S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n, \dots$$

فإذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$  حيث  $S$  عدد محدد ، فإننا نقول عن المتسلسلة (١) إنها متقاربة ونقول عن  $S$  إنه

مجموعها . أما إذا كانت  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  غير موجودة فإننا نقول عن المتسلسلة (١) إنها متباعدة . فالمتسلسلة تكون متباعدة

إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \infty$  أو إذا كان  $S_n$  متزايدا ومتناقصا ، عندما تزداد  $n$  دون أن يقترب من نهاية معينة .

ويذكر كثال على النوع الأخير المتسلسلة المتذبذبة  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  هنا  $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots$

انظر المسألين ٧ - ٨

ينتج من النظريات السابقة ما يلي :

XII — إذا كانت المتسلسلة متقاربة ( متباعدة ) فإنها تبقى متقاربة ( متباعدة ) إذا أخذنا بعض أو جميع حدودها  
الـ  $n$  الأول .

XIII — إن مجموع المتسلسلة المتقاربة وحيد .

XIV — إذا كانت  $\sum s_n$  متقاربة إلى  $S$  فإن  $\sum ks_n$  حيث  $k$  ثابت ، متقاربة إلى  $kS$  . وإذا كانت  $\sum s_n$  متباعدة فإن  $\sum ks_n$  متباعدة كذلك .

XV — إذا كانت  $\sum s_n$  متقاربة فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$  لبرهان انظر المسألة ١٠

وإن العكس ليس صحيحا ، فـ المتسلسلة التوافقية ( المسألة ٧ ج )  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$  . ولكن المتسلسلة متباعدة .



XVI - إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \neq 0$  فإن  $\sum s_n$  متباعدة .

انظر المسألة ١١

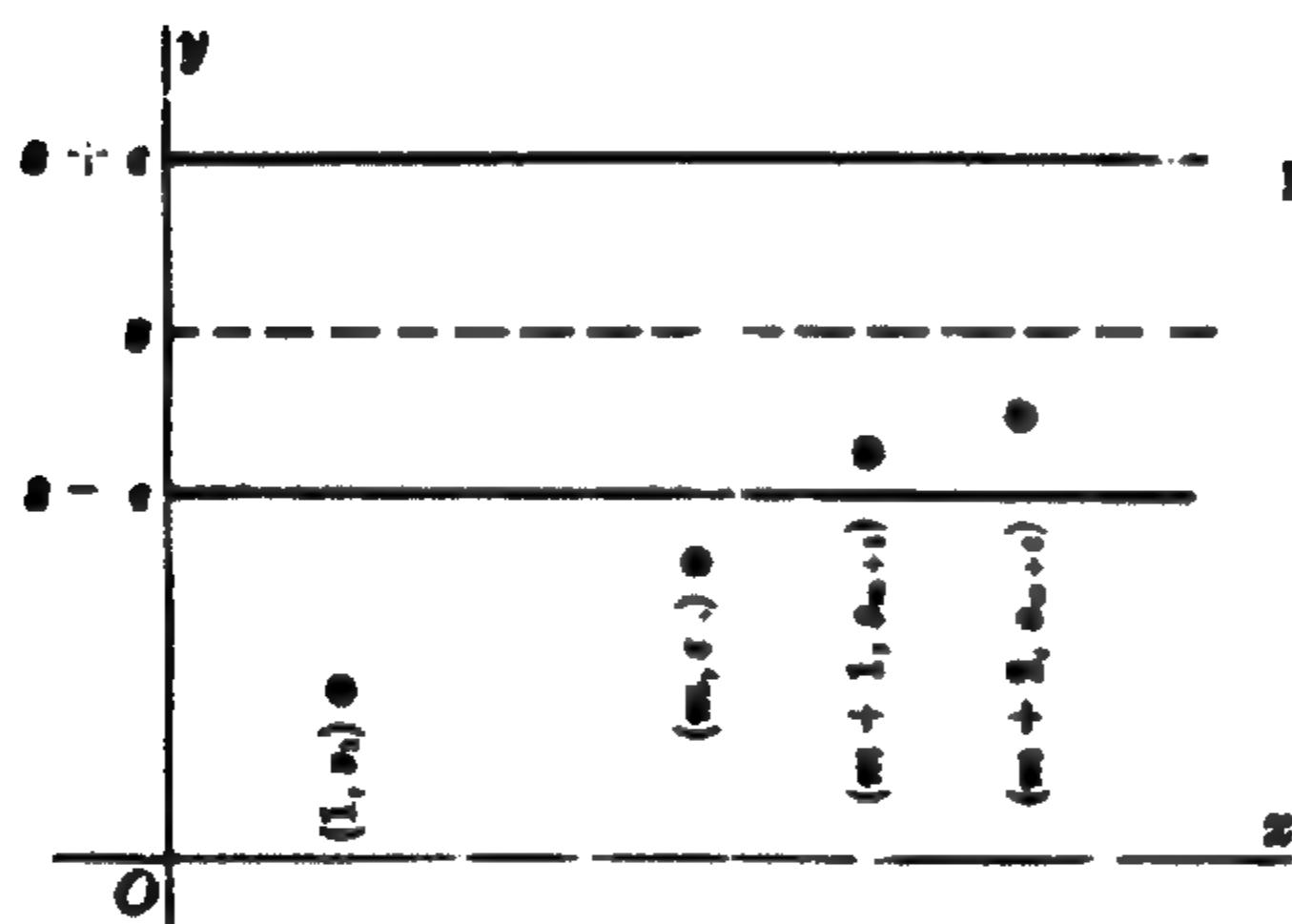
والعكس ليس صحيحا ( انظر المسألة ٧ ( ج ) ) .

### مسائل محلولة

١ - لتكن لدينا المتوالية  $\{s_n\}$  المتقاربة إلى  $s$  . لنحدد على المستقيم المحوى ( شكل ١٧ - ١ ) النقط  $s, s-\epsilon, s+\epsilon$  حيث  $\epsilon$  أى عدد موجب صغير . لنحدد الآن مواضع النقط  $s_1, s_2, s_3, \dots$  على الترتيب . إن تعريف التقارب يؤكد لنا أنه بينا تقع النقط  $m$  الأولى خارج الجوار  $\epsilon$  لـ  $s$  فإن النقط  $s_{m+1}$  وجميع النقط التى تليها تقع داخل هذا الجوار .



شكل ١٧ - ١



شكل ١٧ - ٢

ونجد في الشكل ١٧ - ٢ مجموعة محاور إحداثية قائمة عادية .

لنرسم أولا المستقيمت  $y = s, y = s - \epsilon$  و  $y = s + \epsilon$  معينين بذلك منطقة ( مظلة ) عرضها  $2\epsilon$  .

لنحدد بعد ذلك النقط  $(1, s_1), (2, s_2), (3, s_3), \dots$  فنجد كما سبق أن النقط  $(m+1, s_{m+1})$  وجميع النقط التى تليها واقعة ضمن المنطقة .

إنه من المهم جدا أن نلاحظ أن عددا محدودا فقط ، من نقط متوالية متقاربة يمكن أن يقع خارج المجال  $\epsilon$  أو خارج الفترة  $\epsilon$  .

٢ - برهن باستخدام النظرية ١ ، أن المتواليتين ( أ )  $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$  ( ب )  $\left\{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n)}\right\}$  متقاربتان .

( أ ) أن المتوالية محدودة لأن  $0 \leq s_n \leq 1$  مهما كانت  $n$  .

وبما أن  $s_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = s_n + \frac{1}{n(n+1)}$  فإن  $s_{n+1} \geq s_n$  . والمتوالية ليست متناقصة . وهكذا نجد أن المتوالية متقاربة إلى  $s \leq 1$  .

( ب ) أن المتوالية محدودة لأن  $0 \leq s_n \leq 1$  مهما كانت  $n$  .

وبما أن  $s_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n+2)} = \frac{2n+1}{2n+2} s_n$  فالمتوالية ليست متزايدة وهكذا نجد أن المتوالية متقاربة إلى  $s \geq 0$  .

٣ - برهن أن كل متوالية غير محدودة  $\{s_n\}$  متباعدة .

لنفرض جدلا أن  $\{s_n\}$  متقاربة فيوجد عددا ، لكل عدد موجب  $\epsilon$  مهما كان صغيرا ، عدد صحيح موجب  $m$  بحيث  $n > m$  إذن  $|s_n - s| < \epsilon$  . وبما أن جميع حدود المتوالية ، بغض النظر عن عدد محدود منها ، تقع داخل هذه الفترة فإنه ينبغي أن تكون المتوالية محدودة ، وهذا يناقض الفرض إذا فالمتوالية متباعدة .

٤ - برهن أن نهاية المتوالية المتقاربة وحيدة .

لنفرض العكس أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$  وأن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = t$  حيث  $|s - t| > 2\epsilon > 0$  . عندئذ يكون الجوار  $\epsilon$  لـ  $t$  والجوار  $\epsilon$  لـ  $s$  خواص متناقضة : (i) ليس بينهما أى نقطة مشتركة (ii) يحتوى كل منهما على جميع حدود المتتالية باستثناء عدد محدود من هذه الحدود . إذن  $s = t$  والنهية وحيدة .

٥ - برهن أنه إذا كانت  $\{s_n\}$  متوالية من الحدود اللاصفرية . وكان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/s_n = 0$  .

ليكن  $\epsilon > 0$  وبما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty$  ينتج أنه يوجد لكل عدد  $M > 1/\epsilon$  ، عدد صحيح موجب  $m$  بحيث إذا كان  $n > m$  فإن  $|s_n| > M > 1/\epsilon$  . ولهذا العدد  $m$  يكون  $|1/s_n| < 1/M < \epsilon$  . وبالتالى فإن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/s_n = 0$  .

٦ - برهن أنه إذا كان  $a > 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$  .

ليكن  $M > 0$  ولنفرض  $a = 1 + b$  حيث  $b > 0$  فيكون عندئذ :

$$a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \dots > 1 + nb > M$$

عندما يكون  $n > M/b$  . وهكذا فإن  $m$  أكبر عدد صحيح في  $M/b$  .

٧ - برهن أن :

(أ) المتسلسلة الحسابية غير المنتهية  $a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a + (n-1)d] + \dots$  تتباعد عندما  $d^2 > 0$

(ب) المتسلسلة الهندسية غير المنتهية  $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$  حيث  $a \neq 0$  متقاربة إلى  $\frac{a}{1-r}$  عندما  $|r| < 1$  ومتباعدة عندما  $|r| \geq 1$  .

(ج) المتسلسلة التوافقية  $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n + \dots$  متباعدة .

(١) أن  $S_n = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d]$  ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \infty$  ما لم يكن  $a = d = 0$  .

إذن المتسلسلة متباعدة عندما  $d^2 > 0$  .

(ب) هنا يكون :  $S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} r^n$  ،  $r \neq 1$  .

فإذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$  فإنه يكون  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a}{1 - r}$  .

وإذا كان  $|r| > 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = \infty$  والمتوالية  $S_n$  متباعدة . وفي الحالة  $|r| = 1$  تكون المتسلسلة

على الشكل  $a + a + a + \dots$  أو على الشكل  $a - a + a - a + \dots$  وهما متباعدتان .

(ج) عندما نشكل المجاميع الجزئية نلاحظ أن :

$$S_1 > 2, S_2 > 2.5, S_3 > 3, S_4 > 3.5, S_5 > 4, \dots$$

فتوالية المجاميع الجزئية غير محدودة ومتباعدة والمتسلسلة متباعدة .

٨ - (١) احسب مجموع المتسلسلة  $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots$

أن  $S_1 = \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5}\right)$ ,  $S_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^2}\right)$ ,  $S_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^3}\right)$ , ...,

$$S_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \quad , \quad S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{ومن}$$

(ب) احسب مجموع المتسلسلة  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

أن  $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$ ,  $S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ ,

$S_3 = S_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ , ...,  $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \quad \text{ومن}$$

٩ - المتسلسلة  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  متقاربة إلى 2. ادرس المتسلسلة التي تنتج عندما (١) نحذف حدودها الأربعة الأولى (ب) نصفها الحدود  $8 + 4 + 2$ .

(١) إن المتسلسلة  $\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$  هندسية لانهاية بـ  $r = \frac{1}{2}$  وهي تتقارب إلى :

$$S = 2 - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{8}$$

(ب) إن المتسلسلة  $8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$  هندسية لانهاية بـ  $r = \frac{1}{2}$  وهي تتقارب إلى :

$$2 + (8 + 4 + 2) = 16$$

١٠ - برهن أنه إذا كان  $\sum s_n = S$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$ .

بما أن  $\sum s_n = S$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S$  حيث أن  $s_n = S_n - S_{n-1}$  فإنه ينتج :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

١١ - بين أن المتسلسلين (١)  $1/3 + 2/5 + 3/7 + 4/9 + \dots$  (ب)  $1/2 + 3/4 + 7/8 + 15/16 + \dots$  متباعدتان.

$$(١) \quad s_n = \frac{n}{2n+1} \quad , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2+1/n} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

$$(ب) \quad s_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \quad , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 \neq 0.$$

١٢ - تتقارب المتسلسلة  $\sum s_n$  إلى  $S$  إذا كانت متوالية المجاميع الجزئية  $\{S_n\}$  متقاربة إلى  $S$ . أي أنه يوجد لكل  $\epsilon > 0$  مهما كان صغيراً ، عدداً صحيحاً  $m$  بحيث إذا كان  $n > m$  فإن  $|S - S_n| < \epsilon$ . بين أن متسلسلة المسألة (٨) متقاربتان وذلك عن طريق إيجاد عدد  $m$  لكل  $\epsilon$  مفروض.

$$(١) \quad \text{إذا كان} \quad |S - S_n| = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \right| = \frac{1}{4 \cdot 5^n} < \epsilon, \quad \text{فإن} \quad n \ln 5 > -\ln(4\epsilon), \quad 5^n > \frac{1}{4\epsilon}$$

$$\text{ومن} \quad n > -\frac{\ln 4\epsilon}{\ln 5}. \quad \text{ومكذلك فإن} \quad m \text{ أكبر عدد صحيح في} \quad -\frac{\ln 4\epsilon}{\ln 5}$$

$$(ب) \quad \text{إذا كان} \quad |S - S_n| = \left| 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon, \quad \text{فإن} \quad n+1 > \frac{1}{\epsilon} \quad \text{ومن} \quad n > \frac{1}{\epsilon} - 1. \quad \text{ومكذلك فإن} \quad m \text{ أكبر عدد صحيح في} \quad \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

## مسائل امتدادية

١٣ - بين فيما إذا كانت كل متوالية ما يلي محدودة أو غير محدودة ، غير متزايدة أو غير متناقصة ، متقاربة أو متباعدة أو فيما إذا كانت متذبذبة .

$$(1) \quad \left\{ n + \frac{2}{n} \right\} \quad (ب) \quad \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\} \quad (ج) \quad \left\{ \sin \frac{1}{2} n\pi \right\} \quad (د) \quad \left\{ \sqrt[n]{n} \right\} \quad (هـ) \quad \left\{ \frac{n!}{10^n} \right\} \quad (و) \quad \left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$$

١٤ - برهن أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1/n^p} = 1$  ، عندما يكون  $p > 0$  إرشاد : أن  $n^{p/n} = e^{(p \ln n)/n}$

١٥ - للمتوالية  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$  ، تحقق من أن (١) الحوار  $|1 - s_n| < 0.01$  يحوى جميع حدود المتوالية باستثناء الحدود التسعة والتسعين الأولى . (ب) المتوالية محدودة . (ج)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1$  .

١٦ - برهن أنه إذا كان  $|r| < 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$  .

١٧ - ادرس تقارب كل من المتسلسلات الهندسية التالية وأوجد مجموع كل متسلسلة متقاربة منها .

$$(1) \quad 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots \quad (ب) \quad 1 - 1 + 1/4 - 1/16 + \dots \quad (ج) \quad 1 + 3/2 + 9/4 + 27/8 + \dots$$

ج : (١)  $S=2$  ، (ب)  $S=16/5$  ، (ج) متباعدة .

١٨ - احسب مجموع كل من المتسلسلات التالية :

$$(1) \quad \sum 3^{-n} \quad (د) \quad \sum \frac{1}{n(n+2)} \quad (ز) \quad \sum \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$(ب) \quad \sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (هـ) \quad \sum \frac{1}{n(n+3)} \quad (ح) \quad \sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$(ج) \quad \sum \left( \frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p} \right), \quad p > 0 \quad (و) \quad \sum \frac{n}{(n+1)!}$$

$$ج : (1) \quad 1/2 , (ب) \quad 1/2 , (ج) \quad 1 , (د) \quad 3/4 , (هـ) \quad 11/18 , (و) \quad 1 , (ز) \quad 1/4 , (ح) \quad 1/4 .$$

١٩ - برهن أن جميع المتسلسلات التالية متباعدة :

$$(1) \quad 3 + 5/2 + 7/3 + 9/4 + \dots \quad (ج) \quad e + e^2/8 + e^3/27 + e^4/64 + \dots$$

$$(ب) \quad 2 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} + \dots \quad (د) \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

٢٠ - برهن أنه إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \neq 0$  فإن  $\sum s_n$  متباعدة .

٢١ - برهن أن متسلسلات المسألة ١٨ - (١) - (د) متقاربة وذلك عن طريق إيجاد عدد صحيح  $m$  لكل  $\epsilon > 0$  بحيث

$$\text{يكون } |S - S_n| < \epsilon \text{ لكل } n > m .$$

$$ج : m \text{ أكبر عدد صحيح في } (1) \quad - \frac{\ln 2}{\ln 3} \epsilon \quad (ب) \quad \frac{1}{4\epsilon} - 1/2 \quad (ج) \quad \sqrt[3]{1/\epsilon} - 1$$

$$(د) \quad \text{الجذر الموجب لـ } 2em^2 - 2(1-2e)m - (3-4e) = 0 .$$

## الفصل الثامن والأربعون

### اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات الموجبة

**المتسلسلات ذات الحدود الموجبة** : نقول عن المتسلسلات  $\sum s_n$  التي جميع حدودها موجبة، إنها متسلسلة موجبة .

I - تكون المتسلسلات الموجبة  $\sum s_n$  متقاربة إذا كانت متوالية المجاميع الجزئية  $\{s_n\}$  محدودة .

تنتج هذه النظرية من كون متوالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة موجبة ليست متناقصة أبدا .

II - **اختبار التكامل** . ليكن  $f(n)$  الحد العام  $s_n$  للمتسلسلة  $\sum s_n$  ذات الحدود الموجبة .

إذا كانت  $f(x) > 0$  دالة موجبة ولا تزايد أبدا في الفترة  $x > x_0$  حيث  $x_0$  عدد صحيح موجب . ، فإن المتسلسلة

$\sum s_n$  تكون متقاربة أو متباعدة تبعا لوجود  $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx$  أو عدم وجوده .

انظر المسائل ١ - ٥

III - **اختبار المقارنة للتقارب** . تكون المتسلسلة الموجبة  $\sum s_n$  متقاربة إذا كان كل حد من حدودها ( ربما بعد عدد

محدد من الحدود ) أصغر أو يساوي الحد المقابل من متوالية موجبة متقاربة معلومة  $\sum c_n$  .

IV - **اختبار المقارنة للتباعد** . تكوى المتسلسلة الموجبة  $\sum s_n$  متباعدة إذا كان كل حد من حدودها ( ربما بعد عدد محدد

من الحدود ) أكبر أو يساوي الحد المقابل من متسلسلة موجبة متباعدة معلومة  $\sum d_n$  .

انظر المسائل ٦ - ١١

V - **اختبار النسبة** . تتقارب المتسلسلة الموجبة  $\sum s_n$  إذا كان  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} < 1$  ، وتباعد إذا كان

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$  . أما إذا كان  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$  ، فإن هذا الاختبار يفشل في تقرير تقارب المتسلسلة

أو تباعدها

انظر المسائل ١٢ - ١٨

### مسائل مطروحة

#### اختبار التكامل :

١ - برهن اختبار التكامل : بفرض أن  $f(n)$  يمثل الحد العام  $s_n$  للمتسلسلة الموجبة  $\sum s_n$  فلذا كانت  $f(x) > 0$

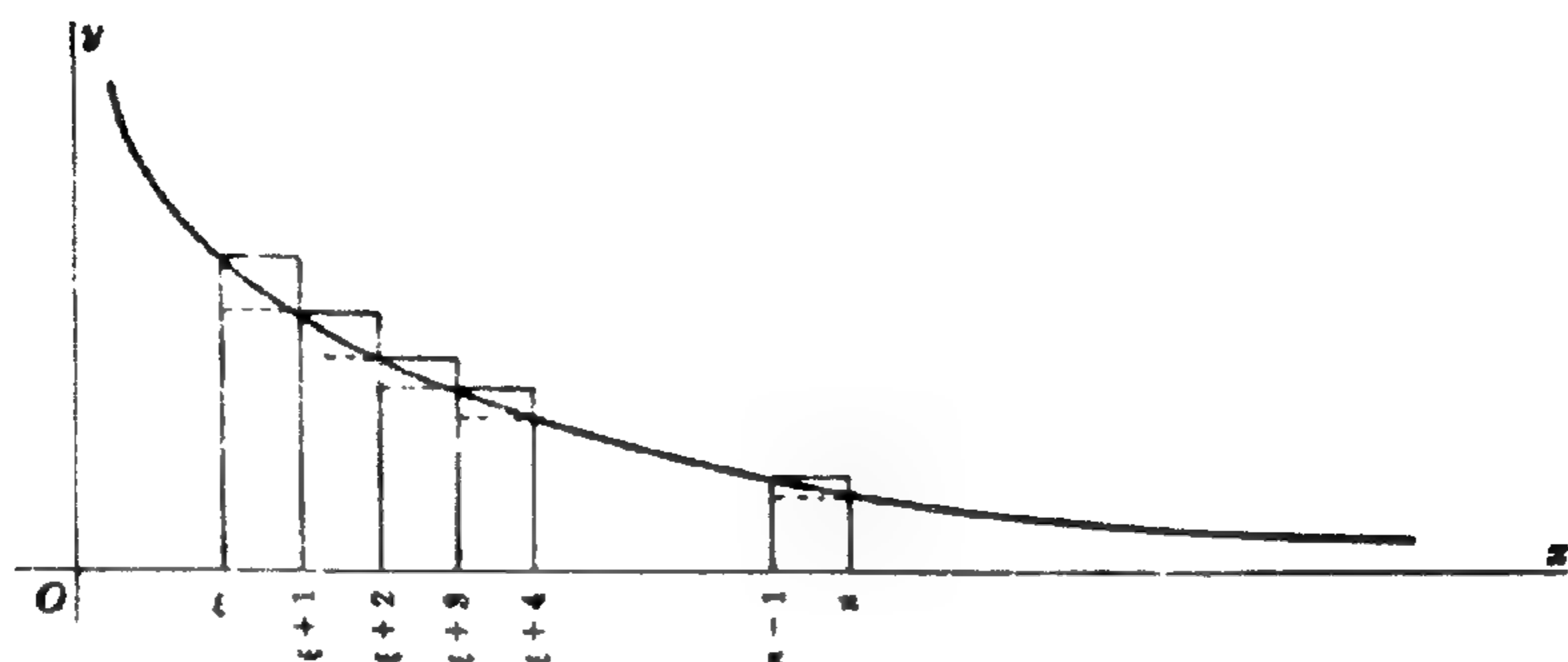
دالة موجبة ولا تزايد أبدا في الفترة  $x > x_0$  ، حيث  $x_0$  عدد صحيح موجب ، فإن المتسلسلة  $\sum s_n$  تكون متقاربة أو متباعدة

تبعا لوجود  $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx$  أو عدم وجوده .



نرى في الشكل أن مساحة ما تحت المنحنى  $y = f(x)$  من  $x = \xi$  إلى  $x = n$  قد قربت بمجموعتين من المستطيلات المشتركة في قواعدها . فإذا عبرنا عن كون المساحة المذكورة تنحصر بين مجموع مساحات المستطيلات الصغيرة ومجموع مساحات المستطيلات الكبيرة نجد أن :

$$s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \dots + s_n < \int_{\xi}^n f(x) dx < s_{\xi} + s_{\xi+1} + \dots + s_{n-1}$$



شكل ٨ - ١

(١) لنفرض أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\xi}^n f(x) dx = \int_{\xi}^{+\infty} f(x) dx = A$  . فيكون عندئذ :

$$s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \dots + s_n < A$$

$$S_n = s_{\xi} + s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \dots + s_n$$

ويكون

محدودا وغير متناقص عندما تزايد  $n$  إذن المتسلسلة  $\sum s_n$  امتثالا إلى النظرية ، متقاربة .

(٢) لنفرض أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\xi}^n f(x) dx = \int_{\xi}^{+\infty} f(x) dx$  غير موجود . فيكون عندئذ :

$$S_n = s_{\xi} + s_{\xi+1} + \dots + s_n$$

غير محدود و  $\sum s_n$  متباعدة .

**ادرس التقارب في المسائل من ٢ الى ٥ مستخدما اختبار التكامل .**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \text{ . لأخذ } f(n) = s_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{ ; أن } \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots = \infty$$

أن  $f(x) > 0$  في الفترة  $x > 1$  وهي متناقصة عندما تزايد  $x$  . فإذا أخذنا  $\xi = 1$  ونظرنا في :

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{2x+1} \right]_1^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{3} = \infty$$

نجد أن التكامل غير موجود والمتسلسلة متباعدة

$$f(x) = \frac{1}{4x^2} \text{ . لأخذ } f(n) = s_n = \frac{1}{4n^2} \text{ ; أن } \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{4}$$

أن  $f(x) > 0$  في الفترة  $x > 1$  وهي متناقصة عندما تزايد  $x$  . لأخذ  $\xi = 1$  ولننظر في :

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_1^u = \frac{1}{4} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{u} + 1 \right) = \frac{1}{4}$$

إن التكامل موجود والمتسلسلة متقاربة .

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \text{ نأخذ } f(n) = a_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n} \text{ ; إن } \sin x + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \sin \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \sin \frac{1}{4}x + \dots = 1$$

أن  $f(x) > 0$  في الفترة  $x > 2$  والدالة  $f(x)$  متناقصة بتزايد  $x$  . لنأخذ  $\xi = 2$  ولننظر في :

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} \Big|_1^u = \frac{1}{2}$$

والمتسلسلة متقاربة .

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \text{ نأخذ } f(n) = a_n = \frac{1}{n^p} \text{ ; أن } 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots \text{ ( } p > 0 \text{ ) . (سلسلة } p \text{ )}$$

أن  $f(x) > 0$  في الفترة  $x > 1$  والدالة متناقصة عندما تزايد  $x$  .

نأخذ  $\xi = 1$  ولننظر في :

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_1^u \frac{dx}{x^p} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Big|_1^u = \frac{1}{1-p} \left\{ \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{1-p} - 1 \right\}, \quad (p \neq 1)$$

والمتسلسلة متقاربة .

فإذا كان  $p > 1$  يكون

$$\frac{1}{1-p} \left\{ \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{1-p} - 1 \right\} = \frac{1}{1-p} \left\{ \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u^{p-1}} - 1 \right\} = \frac{1}{p-1}$$

$$\text{وإذا كان } p < 1 \text{ يكون } \int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty \text{ والمتسلسلة متباعدة .}$$

$$\text{أما إذا كان } p < 1 \text{ فيكون } \frac{1}{1-p} \left\{ \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{1-p} - 1 \right\} = +\infty \text{ والمتسلسلة متباعدة .}$$

لاحظ البرهان الثاني بأن المتسلسلة التوافقية متباعدة .

**الختبار المقارنة .** في هذا الاختبار يبنى مقارنة الحد العام للمتسلسلة المراد دراسة تقاربها مع الحدود العامة لمتسلسلة معلومة التقارب والتباعد وقد تنفع التسلسلات التالية كتسلسلات مقارنة .

$$(أ) \text{ المتسلسلة الهندسية } a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots, a \neq 0, \text{ وهي متقاربة عندما } 0 < r < 1 \text{ وتباعد عند } r \geq 1$$

$$(ب) \text{ التسلسلات } p, 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots, \text{ التي تتقارب عندما } p > 1 \text{ وتباعد عندما } p \leq 1.$$

(ج) كل متسلسلة جديده تم دراسة تقاربها .

ادرس التقارب في كل من المسائل من ٦ - ١١ مستخدما اختبارات المقارنة .

$$٦ - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{n^2+1} + \dots$$

إن الحد العام للمتسلسلة  $s_n = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$  ، إذن كل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر من الحد الذي يقابله من المتسلسلة  $p$  :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

وبما أن متسلسلة المقارنة متقاربة حيث  $p = 2$  ، إذن المتسلسلة المفروضة متقاربة أيضا ( يمكن استخدام اختبار التكامل هنا أيضا ) .

$$٧ - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

إن الحد العام للمتسلسلة هو  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  . وبما أن  $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$  ، فكل حد من المتسلسلة المفروضة أكبر من الحد الذي يقابله من المتسلسلة التوافقية أو يساويه ، إذن فالمتسلسلة المفروضة متباعدة - ( يمكن استخدام اختبار التكامل هنا أيضا ) .

$$٨ - 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

إن الحد العام لهذه المتسلسلة  $\frac{1}{n!}$  . وبما أن  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  ،  $n! \geq 2^{n-1}$  ،

فإن كل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوي الحد الذي يقابله في المتسلسلة الهندسية المتقاربة  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  ، إذن فالمتسلسلة المفروضة متقاربة ( لا يمكن استخدام اختبار التكامل هنا ) .

$$٩ - 2 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{4^3} + \dots$$

وبما أن  $\frac{n+1}{n^3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$  ، فكل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوي الحد الذي يقابله من متسلسلة  $p$

المتقاربة  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$  ، إذن فالمتسلسلة المفروضة متقاربة .

$$١٠ - 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

الحد العام لهذه المتسلسلة  $\frac{1}{n^4}$  . وبما أن  $\frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  ، فكل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوي الحد الذي

يقابله من المتسلسلة الهندسية المتقاربة  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  .

كنك نلاحظ أن كل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوي الحد الذي يقابله من متسلسلة  $p$  المتقاربة حيث

$p = 2$  .

$$1 + \frac{2^2+1}{2^2+1} + \frac{3^2+1}{3^2+1} + \frac{4^2+1}{4^2+1} + \dots - 11$$

الحـد العام هو  $\frac{n^2+1}{n^2+1} \geq \frac{1}{n}$ . وبما أن كل حد من المتسلسلة الفروضة أكبر أو يساوى الحد الذى يقابله من المتسلسلة التوافقية فالمتسلسلة المفروضة متباعدة.

### اختبار النسبة :

١٢- برهن اختبار النسبة :

تتقارب المتسلسلة الموجبة  $\sum s_n$  إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} < 1$  وتتباعـد إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$ .

لنفرض أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L < 1$ . عندئذ إذا اخترنا عددا  $r$  بحيث  $L < r < 1$  فإنه يوجد عدد صحيح موجب

$m$  بحيث إذا كان  $n > m$  فإن  $\frac{s_{n+1}}{s_n} < r$  أى أن .

$$s_{n+2} < r \cdot s_{n+1} \quad \text{أو} \quad \frac{s_{n+2}}{s_{n+1}} < r$$

$$s_{n+3} < r \cdot s_{n+2} < r^2 \cdot s_{n+1} \quad \text{أو} \quad \frac{s_{n+3}}{s_{n+2}} < r$$

$$s_{n+4} < r \cdot s_{n+3} < r^3 \cdot s_{n+1} \quad \text{أو} \quad \frac{s_{n+4}}{s_{n+3}} < r$$

.....

إذن كل حد من المتسلسلة  $s_{n+1} + s_{n+2} + s_{n+3} + \dots$  أصغر أو يساوى الحد المقابل من المتسلسلة الهندسية  $s_{n+1} + r \cdot s_{n+1} + r^2 \cdot s_{n+1} + \dots$  التى تتقارب لأن  $r < 1$ . وبهذا نجد أن  $\sum s_n$  متقاربة استنادا إلى النظرية III.

لنفرض الآن أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L > 1$  حيث  $L$  أكبر من الواحد أو أنه يساوى  $+\infty$ . عندئذ يوجد عدد صحيح

موجب  $m$  بحيث إذا كان  $n > m$  فإن  $\frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$  وباتـال فإن  $s_{n+1} > s_n$  و  $\{s_n\}$  ليست متقاربة إلى الصفر

وهذا يؤدى إلى أن  $\sum s_n$  متباعدة بالاعتماد على النظرية XVI (الفصل ١٧).

لنفرض أخيرا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$ . مثال ذلك المتسلسلة :  $\sum \frac{1}{n^p}, p > 0$  التى لها :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1+1/n} \right)^p = 1$$

وبما أن هذه المتسلسلة متقاربة عندما  $p > 1$  ومتباعدة عندما  $p \leq 1$ ، فإن اختبار النسبة يفشل فى تقرير التقارب أو التباعد.

ادرس التقارب فى كل من المسائل ١٣ - ٣٣ مستخدما اختبار النسبة :

$$13- \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots \quad \text{إن} \quad s_n = \frac{n}{3^n}, \quad s_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n}.$$

إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$  والمتسلسلة متقاربة .

$$s_n = \frac{n!}{3^n}, \quad s_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+1}{3}. \quad \text{إن} \quad \frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \dots - 14$$

إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3} = \infty$  والمتسلسلة متباعدة

$$1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots - 15$$

$$s_n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}, \quad s_{n+1} = \frac{(n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$  والمتسلسلة متباعدة .

$$s_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}, \quad s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n}{2(n+1)}. \quad \text{إن} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots - 16$$

إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$  والمتسلسلة متقاربة .

$$s_n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}, \quad s_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{4^n}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n(n+2)}{4(n+1)^2}. \quad \text{إن} \quad 2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4^3} + \dots - 17$$

إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{1}{4}$  والمتسلسلة متقاربة .

$$1 + \frac{2^2+1}{2^2+1} + \frac{3^2+1}{3^2+1} + \frac{4^2+1}{4^2+1} + \dots - 18$$

$$s_n = \frac{n^2+1}{n^2+1}, \quad s_{n+1} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2+1}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^2+1}.$$

إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$  واختبار النسبة فاشل هنا . انظر المسألة ١١ .

### مسائل إضافية

١٩- بين أنه يمكن استخدام اختبار التكامل فيما يلي من المتسلسلات ثم ادرس تقارب وتباعد كل متسلسلة مستخدماً هذا الاختبار .

$$\sum \frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \quad (ج) \quad \sum \frac{n}{n^2+1} \quad (أ) \quad \sum \frac{1}{n \ln n} \quad (د) \quad \sum \frac{1}{n} \quad (١)$$

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2} \quad (ب) \quad \sum \frac{n}{e^n} \quad (و) \quad \sum \frac{n}{(n+1)(n+2)} \quad (د) \quad \sum \frac{50}{n(n+1)} \quad (ب)$$

ج : (١) ، (د) ، (و) ، (أ) متباعدة .



٢٠ - عين فيما يلي التسلسلات المتقاربة والتسلسلات المتباعدة باستخدام اختبار المقارنة :

$$\begin{array}{llll} \sum \frac{1}{n^3-1} \quad (أ) & \sum \frac{n+2}{n(n+1)} \quad (ب) & \sum \frac{1}{3^n+1} \quad (ج) & \sum \frac{n}{3n^3-4} \quad (د) \\ \sum \frac{n-2}{n^3} \quad (هـ) & \sum \frac{1}{n^{n-1}} \quad (و) & \sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \quad (ز) & \sum \frac{1}{1+\ln n} \quad (ح) \\ \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad (ط) & \sum \frac{1}{3n+1} \quad (ي) & \sum \frac{1}{3^n-1} \quad (ك) & \sum \frac{n^4+5}{n^3} \quad (ل) \\ \sum \frac{1}{n^3+5} \quad (م) & \sum \frac{\ln n}{n} \quad (ن) & \sum \frac{\ln n}{n^p} \quad (س) & \sum \frac{n+1}{n\sqrt{3n-2}} \quad (ع) \end{array}$$

ج : التسلسلات (أ) ، (ب) ، (د) ، (و) ، (ز) ، (ط) ، (ك) ، (ل) عندما  $p > 2$  جميعها متقاربة .

٢١ - عين مما يلي التسلسلات المتقاربة والتسلسلات المتباعدة مستخدما اختبار النسبة :

$$\begin{array}{llll} \sum \frac{(n+1)(n+2)}{n!} \quad (أ) & \sum \frac{3^{n+1}}{n^2+n} \quad (ب) & \sum \frac{n^3}{(\ln 2)^n} \quad (ج) & \sum \frac{n^n}{n!} \quad (د) \\ \sum \frac{5^n}{n!} \quad (هـ) & \sum \frac{(n+1)2^n}{n!} \quad (و) & \sum \frac{n^3}{(\ln 3)^n} \quad (ز) & \sum \frac{2^n}{2n-1} \quad (ح) \\ \sum \frac{n}{2^n} \quad (ط) & \sum n\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (ي) & \sum \frac{2^n}{n(n+2)} \quad (ك) & \sum \frac{n^3}{3^n} \quad (ل) \end{array}$$

ج : التسلسلات (أ) ، (ب) ، (ج) ، (د) ، (و) ، (ز) ، (ح) متقاربة .

٢٢ - عين مما يلي التسلسلات المتقاربة والتسلسلات المتباعدة .

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{4^1} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{13^4} + \dots \quad (أ) & \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots \quad (ز) \\ 3 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{3}} + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + \dots \quad (ب) & \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{5}{4 \cdot 6} + \dots \quad (ح) \\ 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots \quad (ج) & \frac{1}{2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{5^2} + \dots \quad (ط) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots \quad (د) & 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^{3/2}} + \frac{1}{4^3} + \dots \quad (ي) \\ 3 + \frac{3}{4} + \frac{11}{27} + \frac{9}{32} + \dots \quad (هـ) & 2 + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{17} + \dots \quad (ك) \\ \frac{2}{3} + \frac{3}{2 \cdot 3^2} + \frac{4}{3 \cdot 3^3} + \frac{5}{4 \cdot 3^4} + \dots \quad (و) & \frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \dots \quad (ل) \end{array}$$

ج : التسلسلات (أ) ، (د) ، (و) ، (ز) ، (ط) ، (ي) ، (ل) متقاربة .

٢٣ - برهن اختبار المقارنة للتقارب . إرشاد : إذا كان  $\sum c_n = C$  فإن  $\{c_n\}$  محدود .

٢٤ - برهن اختبار المقارنة للتباعد . إرشاد : إن  $\sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n d_i > M$  عندما  $n > m$  .

٢٥ - برهن اختبار متسلسلة الحدود : إذا كان  $P(n)$  و  $Q(n)$  متطعي حدود من الدرجة  $p$  ،  $q$  على التوالي فإن

المتسلسلة  $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$  متقاربة عندما  $q > p + 1$  ومتباعدة عندما  $q \leq p + 1$  إرشاد : قارن مع  $1/n^{q-p}$ .

٢٦ - استخدم اختبار متعددة الحدود لتحديد التقارب أو التباعد فيما يلي :

$$\begin{array}{ll}
 (أ) \quad \frac{1}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-2} + \frac{3}{4^2-3} + \frac{4}{5^2-4} + \dots & (١) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots \\
 (ب) \quad \frac{1}{2^2-1^2} + \frac{1}{3^2-2^2} + \frac{1}{4^2-3^2} + \frac{1}{5^2-4^2} + \dots & (ب) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{17} + \dots \\
 (ج) \quad \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{5}{4 \cdot 6} + \dots & (ج) \quad \frac{3}{2} + \frac{6}{10} + \frac{7}{30} + \frac{9}{68} + \dots \\
 & (د) \quad \frac{3}{2} + \frac{5}{24} + \frac{7}{108} + \frac{9}{320} + \dots
 \end{array}$$

ج : السلسلة (١) ، (ج) ، (د) ، (و) متقاربة .

٢٧ - برهن اختبار الجذر : تنقارب السلسلة الموجبة  $\sum s_n$  إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{s_n} < 1$  وتباعد إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{s_n} > 1$ .

والاختبار فاشل إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{s_n} = 1$ .

إرشاد : إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{s_n} < 1$  فإن  $\sqrt[n]{s_n} < r < 1$  عندما  $n > m$  ، ومنه  $s_n < r^n$  .

٢٨ - عين التقارب أو التباعد فيما يلي باستخدام اختبار الجذر .

$$(أ) \quad \sum \frac{1}{n^2}, \quad (ب) \quad \sum \frac{1}{(\ln n)^n}, \quad (ج) \quad \sum \frac{2^{n-1}}{n^2}, \quad (د) \quad \sum \left( \frac{n}{n^2+2} \right)^n$$

ج : جميع السلسلة متقاربة .

## الفصل التاسع والأربعون

### المسلسلات ذات الحدود السالبة

المسلسلة التي جميع حدودها سالبة يمكن دراستها على أنها السالبة للمسلسلة الموجبة .

المسلسلة المتناوبة . نرى المسلسلة التي تأخذ حدودها بالتناوب إشارة موجبة وسالبة ، مثل :

$$\sum (-1)^{n-1} s_n = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots + (-1)^{n-1} s_n + \dots \quad (1)$$

حيث جميع الـ  $s_i$  موجبة ، مسلسلة متناوبة .

١ - تنقارب المسلسلة المتناوبة (١) عندما (i)  $s_n > s_{n+1}$  لكل قيمة  $n$  و (ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$

انظر المائلين ١ - ٢

التقارب المطلق . نقول عن مسلسلة  $\sum s_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$  ذات الحدود المختلطة ( موجبة وسالبة ) بأنها متقاربة تقارباً مطلقاً إذا كانت  $\sum |s_n| = |s_1| + |s_2| + |s_3| + \dots + |s_n| + \dots$  متقاربة .

- كل مسلسلة موجبة متقاربة هي متقاربة تقارباً مطلقاً .

كل مسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً تكون متقاربة . لبرهان انظر المائل ٢ .

التقارب المشروط . إذا كانت  $\sum s_n$  متقاربة في حين  $\sum |s_n|$  متباعدة فإننا نقول عن المسلسلة إنها متقاربة تقارباً مشروطاً .

فالمسلسلة  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots$  ، مثلاً ، تقاربها مشروط لأنها متقاربة في حين  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$  متباعدة .

اختبار النسبة للتقارب المطلق . تكون المسلسلة  $\sum s_n$  ذات الحدود المختلطة متقاربة تقارباً مطلقاً إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| < 1$  ومتباعدة إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| > 1$  . أما إذا كانت النهاية تساوي 1 فإن الاختبار يفشل في إعطائنا أية معلومات .

انظر المائل ٤ - ١٢

### مسائل محلولة

١ - برهن أن المسلسلة المتناوبة  $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots$  متقاربة عندما (i)  $s_n > s_{n+1}$  لجميع قيم  $n$  و (ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$

لننظر في المجموع الجزئي :

$$S_{2m} = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots + s_{2m-1} - s_{2m}$$

التي يمكن تبسيطه على النحو التالي :

$$S_{2m} = (s_1 - s_2) + (s_3 - s_4) + \dots + (s_{2m-1} - s_{2m}) \quad (1)$$

$$S_{2m} = s_1 - (s_2 - s_3) - \dots - (s_{2m-2} - s_{2m-1}) - s_{2m} \quad (ب)$$

ولكن من الفرض  $s_n > s_{n+1}$  و  $s_n - s_{n+1} > 0$  إذن من (1) نجد أن  $S_{2m} > 0$  ، (ب) نجد أن  $s_{2m} < s_1$  والمتواليه  $\{S_{2m}\}$  محدودة وهي متقاربة إلى نهاية  $L < s_1$ . لننظر بعد ذلك في المجموع الجزئي  $S_{2m+1} = S_{2m} + s_{2m+1}$  :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow +\infty} s_{2m+1} = L + 0 = L \quad \text{إذن :}$$

وهذا نجد أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = L$  والمتسلسلة متقاربة .

٢- برهن أن المتسلسلات المتناوبة التالية متقاربة :

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \quad (1)$$

إن  $s_n = \frac{1}{n^2}$  و  $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$  ومنه نجد أن  $s_n > s_{n+1}$  وأن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$  ، والمتسلسلة متقاربة .

$$1/2 - 1/5 + 1/10 - 1/17 + \dots \quad (ب)$$

إن  $s_n = \frac{1}{n^2+1}$  و  $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$  ومنه نجد أن  $s_n \geq s_{n+1}$  وأن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$  ، والمتسلسلة متقاربة .

$$\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} - \frac{4}{e^4} + \dots \quad (ج)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0 \quad \text{و} \quad s_n \geq s_{n+1} \quad \text{إن المتسلسلة متقاربة لأن}$$

٢- برهن أن كل متسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً هي متقاربة .

$$\Sigma s_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \dots + s_n + \dots \quad (1)$$

التي لها حدود موجبة وحدود سالبة ، ولتكن .

$$\Sigma |s_n| = |s_1| + |s_2| + |s_3| + \dots + |s_n| + \dots \quad (ب)$$

هي المتسلسلة المقابلة التي جميع حدودها موجبة والتي تتقارب إلى  $S'$ . لنفرض أن المجموع الجزئي الـ  $n$  هو  $S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$  المتسلسلة (أ) المكونة من  $r$  حد موجب مجموعته  $P_r$  ومن  $t = n - r$  حد سالب مجموعته  $-Q_r$ . عندئذ يكون  $S_n = P_r - Q_r$  في حين يكون المجموع الجزئي المقابل في (ب) هو  $S'_n = P_r + Q_r$ . ولكن بما أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S'$  إذن فالجميع الجزئية  $S'_n$  محدودة ومنه نرى أنه عندما تزداد  $n$  تبقى المتوالياتان  $\{P_r\}$  و  $\{Q_r\}$  محدودتين وغير متناقصتين. لكن  $\lim_{r \rightarrow \infty} P_r = P$  و  $\lim_{r \rightarrow \infty} Q_r = Q$ . فيكون  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{r \rightarrow \infty} P_r - \lim_{r \rightarrow \infty} Q_r = P - Q$  والمتسلسلة  $\sum s_n$  متقاربة.

### التقارب المطلق والشروط :

ادرس التقارب المطلق والشروط لكل من المتسلسلات التالية :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots - 4$$

إن المتسلسلة  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  التي نحصل عليها بجعل جميع حدود المتسلسلة المفروضة موجبة ، متقاربة لأنها متسلسلة هندسية أساسها  $r = 1/2$ . وعلى هذا فإن المتسلسلة المفروضة متقاربة تقارباً مطلقاً.

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots - 6$$

إن المتسلسلة  $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots$  التي نحصل عليها بجعل جميع حدود المتسلسلة المفروضة موجبة ، متقاربة استناداً إلى اختبار النسبة ، وبالتالي فإن المتسلسلة المفروضة متقاربة تقارباً مطلقاً.

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots - 9$$

إن المتسلسلة  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$  متباعدة لأنها متسلسلة  $p$  حيث  $p = 1/2 < 1$ . والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقارباً مشروطاً.

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4^2} + \dots - 7$$

المتسلسلة  $1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4^2} + \dots$  متقاربة لأن كل حد من حدودها أصغر أو يساوي الحد المقابل في متسلسلة  $p$  مع  $p = 3$  والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقارباً مطلقاً.

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \dots - 8$$

إن المتسلسلة  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \dots$  متباعدة لأن كل حد من حدودها أكبر من نصف الحد المقابل في المتسلسلة التوافقية والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقارباً مشروطاً.

$$2 - \frac{2^2}{3!} + \frac{2^3}{5!} - \frac{2^4}{7!} + \dots - 9$$

إن المتسلسلة  $2 + \frac{2^2}{3!} + \frac{2^3}{5!} + \frac{2^4}{7!} + \dots + \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$  متقاربة (استناداً إلى اختبار النسبة) والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقارباً مطلقاً.

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{2^2+1} + \frac{9}{3^2+1} - \frac{16}{4^2+1} + \dots - 10$$

إن المتسلسلة  $\frac{1}{2} + \frac{4}{2^2+1} + \frac{9}{3^2+1} + \frac{16}{4^2+1} + \dots + \frac{n^2}{n^2+1} + \dots$  متباعدة (استنادا إلى اختبار التكامل) والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مشروطا .

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{8}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1} + \dots - 11$$

إن المتسلسلة  $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2+1} + \frac{8}{3^2+1} + \frac{4}{4^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1} + \dots$  متقاربة لأن كل حد من حدودها أصغر أو يساوى الحد المقابل في متسلسلة  $p$  مع  $p=2$  والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مطلقا .

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots - 12$$

إن المتسلسلة  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$  متقاربة لأن كل حد من حدودها أصغر أو يساوى الحد المقابل في المتسلسلة الهندسية المتقاربة  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مطلقا .

### مسائل إضافية

١٣ - ادرس تقارب وتباعد كل متسلسلة من المتسلسلات المتناوبة التالية :

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \quad (أ) \quad \sum (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n} \quad (ب) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \quad (١)$$

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad (ج) \quad \sum (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{3n+2} \quad (د) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n} \quad (ب)$$

ج : المتسلسلات (١) ، (ب) ، (د) ، (ج) متقاربة .

١٤ - ادرس التقارب المشروط والمطلق في كل من المتسلسلات التالية :

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1} \quad (ز) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1} \quad (أ) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} \quad (ب) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \quad (١)$$

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n^2+2} \quad (ح) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n!)^2} \quad (د) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2} \quad (ج) \quad \sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (ب)$$

ج : المتسلسلات (١) ، (ب) ، (ج) ، (د) ، (ز) ، (ح) تقاربها مطلق .



# الفصل الخامس

## الحسابات بالمتسلسلات

عمليات على المتسلسلات . لتكن لدينا المتسلسلة

$$\sum s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n + \dots \quad (1)$$

ولنفرض  $\sum t_n$  متسلسلة نحصل عليها من السابقة بإدخال الأقواس ، أى بتجميع حدودها مثل :

$$\sum t_n = (s_1 + s_3) + (s_3 + s_4 + s_5) + (s_6 + s_7) + (s_8 + s_9 + s_{10} + s_{11}) + \dots$$

I — إن كل متسلسلة نحصل عليها بإدخال الأقواس في متسلسلة متقاربة ، تتقارب هي أيضا إلى مجموع المتسلسلة الأصلية ذاته .

II — إن كل متسلسلة نحصل عليها بإدخال الأقواس في متسلسلة موجبة متباعدة ، هي متباعدة كذلك . أما إذا كانت المتسلسلة الأصلية ذات حدود مختلفة فإن المتسلسلة الناتجة قد تتباعد وقد تتقارب .

انظر المسألتين ١ - ٢

لتكن الآن المتسلسلة  $\sum u_n$  التي نحصل عليها من (١) بتغيير ترتيب حدودها . مثلا :

$$\sum u_n = s_1 + s_3 + s_2 + s_4 + s_6 + s_5 + \dots$$

III — إن كل متسلسلة نحصل عليها بتغيير ترتيب حدود متسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا ، هي كذلك متسلسلة تقاربها مطلق ، ومجموعها يساوى مجموع المتسلسلة الأصلية .

IV — يمكن تغيير ترتيب حدود متسلسلة متقاربة تقاربا مشروطا لنحصل إما على متسلسلة متباعدة أو على متسلسلة متقاربة مجموعها يساوى عدداً نختاره مسبقا .

انظر المسألة ٣

**الجمع والطرح والضرب** . إذا كانت  $\sum s_n$  و  $\sum t_n$  متسلسلتين فإننا نعرف مجموعهما  $\sum u_n$  وناتج طرحهما  $\sum v_n$  وحاصل ضربهما  $\sum w_n$  على النحو التالي :

$$\sum u_n = \sum (s_n + t_n)$$

$$\sum v_n = \sum (s_n - t_n)$$

$$\sum w_n = s_1 t_1 + (s_1 t_2 + s_2 t_1) + (s_1 t_3 + s_2 t_2 + s_3 t_1) + \dots$$

V — إذا كانت  $\sum s_n$  متقاربة إلى  $S$  و  $\sum t_n$  متقاربة إلى  $T$  ، فإن  $\sum (s_n + t_n)$  تتقارب إلى  $S + T$  و  $\sum (s_n - t_n)$  تتقارب إلى  $S - T$  . وإذا كانت  $\sum s_n$  و  $\sum t_n$  متقاربتين تقاربا مطلقا فإن  $\sum (s_n \pm t_n)$  تقاربا مطلقا أيضا .

VI — إذا تقاربت كل من  $\sum s_n$  و  $\sum t_n$  فإن متسلسلة حاصل ضربهما  $\sum w_n$  قد تتقارب وقد تتباعد . وإذا تقاربت كل من  $\sum s_n$  و  $\sum t_n$  وكانت واحدة منهما متقاربة تقاربا مطلقا فإن  $\sum w_n$  تتقارب إلى  $ST$  . وإذا كان تقارب  $\sum s_n$  و  $\sum t_n$  مطلقا فإن تقارب  $\sum w_n$  يكون مطلقا أيضا .

انظر المسألين ٤ - ٥

**الحساب بالمتسلسلات** يمكن الحصول على مجموع متسلسلة متقاربة بسهولة إذا أمكن التعبير عن مجموعها الجزئي  $n$  كدالة في  $n$  . مثال ذلك أية متسلسلة هندسية متقاربة . ويمكن من جهة أخرى اعتبار أى مجموع جزئي لمتسلسلة متقاربة كمجموع تقريبي للمتسلسلة ، ولكي يكون التقريب  $S_n$  لـ  $S$  مفيدا فإنه ينبغي أن تكون معلومة لدينا درجة كبر  $|S_n - S|$  .

ولمتسلسلة متقاربة  $\sum s_n$  مجموعها  $S$  ؛ نكتب :

$$S = S_n + R_n$$

حيث تعطينا  $R_n$  ، والتي نسميها الباقي بعد  $n$  حداً ، مقدار الخطأ الناتج عن استبدال  $s_n$  ، المجموع الجزئي  $n$  ، بدلا من المجموع الحقيقي  $S$  . وتعطينا النظريات التالية تقريبا لهذا الخطأ من الشكل  $R_n < \alpha$  في حالة المتسلسلات الموجبة ومن الشكل  $|R_n| \leq \alpha$  في حالة المتسلسلات ذات الحدود المختلطة .

ولقد رأينا في المسألة ١ من الفصل ٤٩ إن المتسلسلة المتناوبة  $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots$  ، يكون :

$$R_{2m} = s_{2m+1} - s_{2m+2} + s_{2m+3} - s_{2m+4} + \dots < s_{2m+1}$$

$$R_{2m+1} = -s_{2m+2} + s_{2m+3} - s_{2m+4} + s_{2m+5} - \dots > -s_{2m+2}$$

لذلك :

VII — المتسلسلة المتناوبة يكون  $|R_n| < s_{n+1}$  ويكون  $R_n$  بالإضافة إلى ذلك موجبا إذا كانت  $n$  زوجية . وسالبا إذا كانت  $n$  فردية .

انظر المسألة ٦

VIII — المتسلسلة الهندسية المتقاربة  $\sum ar^{n-1}$  يكون :

$$|R_n| = \left| \frac{ar^n}{1-r} \right|$$

IX — إذا كانت متسلسلة موجبة  $\sum s_n$  متقاربة استنادا إلى اختبار التكامل فإن :

انظر المائل ٧ - ٩

$$R_n < \int_n^{+\infty} f(x) dx . n > \xi$$

وإذا كانت  $\sum c_n$  متسلسلة موجبة متقاربة معروفة وإذا صح بالنسبة لمتسلسلة موجبة  $\sum c_n$  إن  $c_n \leq c_{n+1}$  لكل قيمة  $n$  تحقق الشرط  $n > n_1$  فإن :

انظر المائل ١٠ - ١٢

$$R_n \leq \sum_{n+1}^{+\infty} c_j . n > n_1$$

### مسائل مطولة

١ - لتكن المتسلسلة الموجبة  $\sum s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n + \dots$  ولتكن  $\sum t_n = (s_1 + s_2) + s_2 + (s_3 + s_2) + s_3 + \dots$

المتسلسلة التي نحصل عليها منها بإدخال الأقواس وفق النموذج  $2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots$

فيكون بالنسبة للجمايع الجزئية لـ  $\sum t_n$  :  $T_1 = S_1, T_2 = S_2, T_3 = S_2, T_4 = S_3, \dots$  فإذا كانت  $\sum s_n$

متقاربة إلى  $S$  فإن  $\sum t_n$  تكون كذلك أيضاً لأن  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  أما إذا كانت  $\sum s_n$  متباعدة فإن

$\{S_n\}$  غير محدودة وبالتالي  $\{T_n\}$  غير محدودة والمتسلسلة  $\sum t_n$  متباعدة .

٢ - إن المتسلسلة  $\sum (-1)^{n-1} \left( \frac{2n+1}{n} \right)$  متباعدة ( لماذا ؟ ) ، ولكن إذا جمعنا حدودها وفق

$$\left( 3 - \frac{5}{2} \right) + \left( \frac{7}{3} - \frac{9}{4} \right) + \left( \frac{11}{5} - \frac{13}{6} \right) + \dots + \left( \frac{4m-1}{2m-1} - \frac{4m+1}{2m} \right) + \dots$$

فإن المتسلسلة الناتجة متقاربة لأن حددا العام يحقق العلاقة  $\left( \frac{4m-1}{2m-1} - \frac{4m+1}{2m} \right) = \frac{1}{4m^2-2m} < \frac{1}{m^2}$  .

٣ - إن المتسلسلة ( ١ )  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots$  متقاربة ويمكن تجميع حدودها على الشكل

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots = A$$

أما إذا غيرنا ترتيب حدودها وفق النموذج  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  فإننا نحصل على

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \dots = \frac{1}{2}A$$

٤ - برهن أن  $\frac{3^n + 1}{3 \cdot 1} + \frac{3^n + 2^n}{3^2 \cdot 2^2} + \frac{3^n + 3^n}{3^3 \cdot 3^3} + \dots + \frac{3^n + n^n}{3^n \cdot n^n} + \dots$  متقاربة .

بما أن  $\frac{3^n + n^n}{3^n \cdot n^n} = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n}$  ، فالتسلسلة المفروضة تتكون من مجموع التسلسلتين  $\sum \frac{1}{n^3}$  ،  $\sum \frac{1}{3^n}$  وحيث

أن كل واحدة منهما متقاربة فالتسلسلة المفروضة ، استناداً إلى النظرية V متقاربة .

٥ - بين أن المتسلسلة  $\sum \frac{3^n + n}{n \cdot 3^n}$  متباعدة .

لتفرض أن  $\sum \frac{3^n + n}{n \cdot 3^n} = \sum \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{3^n} \right)$  متقاربة . نستنتج من ذلك ( استناداً إلى النظرية V ) أن  $\sum \frac{1}{n}$

متقاربة لأن  $\sum \frac{1}{3^n}$  متقاربة ولكن هذه النتيجة خاطئة والمتسلسلة المفروضة متباعدة .

٦ - ( ١ ) قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة  $\sum s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  إلى حدودها العشرة الأولى .

( ب ) كم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها للحصول على قيمة المتسلسلة بخطأ لا يتجاوز 0.05 ؟

( ١ ) إن المتسلسلة المفروضة متسلسلة متناوبة متقاربة والخطأ يساوي  $R_{10}$  حيث  $R_{10} < s_{11} = 1/11^2 = 0.0083$  .

( ب ) بما أن  $|R_n| < s_{n+1}$  نضع  $|R_n| < 0.05$  فيكون  $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} = 0.05$  ومنه  $n=3.5$  والحدود

المطلوبة هي أربعة .

٧ - استنتج  $R_n < \int_n^{+\infty} f(x) dx$  كما هو مذكور في النظرية IX .

نقد التقريب ( بالمتسلسلة الصغيرة ) للمساحة الواقعة تحت المنحنى الموضح في شكل المسألة ١ من الفصل ٤٨ وإلى يمين  $x = n$  فنجد عندئذ :

$$\bar{R}_n = e_{n+1} + e_{n+2} + e_{n+3} + \dots < \int_n^{+\infty} f(x) dx$$

٨ - قدر الخطأ الناتج من تقريب المتسلسلة  $\sum \frac{1}{4n^2}$  إلى حدودها العشرة الأولى .

إن هذه المتسلسلة بالاعتماد على اعتبار التكامل ، متقاربة ( انظر المسألة ٣ من الفصل ٤٨ ) إذن :

$$R_n < \frac{1}{4} \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^x \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{4n} = 0.025$$

٩ - كم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها للحصول على قيمة المتسلسلة  $\sum \frac{1}{n^3+1}$  خطأ لا يتجاوز 0.000 01

هذه المتسلسلة متقاربة وذلك بالمقارنة مع المتسلسلة  $\sum \frac{1}{n^3}$  التي هي بدورها متقاربة بالاستناد إلى اختبار

التكامل . إذن .  $R_n < \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{4n^2}$  . فإذا وضعنا  $\frac{1}{4n^2} = 0.000 01$  نجد  $n^2 = 25,000$  ومنه

$n = 12,6$  ، لذلك فإن عدد الحدود المطلوبة 13 حدا .

١٠ - قدر الخطأ الناتج من تقريب المتسلسلة  $\sum \frac{1}{n!}$  إلى حدودها الاثني عشر الأولى .

لقد وجدنا ( المسألة ٨ من الفصل ٤٨ ) أن هذه المتسلسلة متقاربة وذلك عن طريق مقارنتها بالمتسلسلة الهندسية

$\sum \frac{1}{2^{n-1}}$  ولذلك فإن الخطأ  $R_{12}$  للمتسلسلة المفروضة أقل من الخطأ  $R'_{12}$  للمتسلسلة الهندسية ، إذن

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{إن} \quad R_n < R'_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} = 0.0005.$$

$$R_n < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}} = 0.000 000 08. \quad \text{عندما } n > 6 \text{ وبالتالي فإن}$$

١١ - قدر الخطأ الناتج من تقريب  $\sum e_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots$  إلى حدودها العشرة الأولى .

بتطبيق اختبار النسبة  $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{2}{3} \left( \frac{n}{n+1} \right)$  نجد أن  $r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{2}{3}$  والمتسلسلة متقاربة . ونلاحظ أن

$\frac{e_{n+1}}{e_n} < \frac{2}{3}$  لجميع قيم  $n$  ، وبالتالي فإن كل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوي الحد المقابل من المتسلسلة

الهندسية  $\sum e_1$  لذلك فإن :

$$\sum e_n \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} = \sum \frac{1}{11} \left( \frac{2}{3} \right)^n \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} = \frac{2^n}{11 \cdot 3^n} = 0.004.$$

ويمكن الحصول على تقريب أفضل إذا لاحظنا أن كل حد من المتسلسلة المفروضة بعد الحد العاشر أصغر من :

$$R_n < \left( \frac{2}{3} \right)^n + \left( \frac{2}{3} \right)^n + \left( \frac{2}{3} \right)^n + \dots = \frac{\left( \frac{2}{3} \right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2^n}{3^n} = 0.04.$$

١٢ - قدر الخطأ الناتج عن تقريب  $\sum s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots$  إلى حدودها المربعة الأولى .

بتطبيق اختبار النسبة  $\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{1}{3} \left( \frac{n+1}{n} \right)$  نجد أن  $r = 1/3$  ، والمتسلسلة متقاربة ولكننا نلاحظ أن  $\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq \frac{1}{3}$  .

لجميع قيم  $n$  ، وبالتالي لا يمكن استخدام المتسلسلة الهندسية  $\sum (1/3)^n$  كتسلسلة مقارنة . ولكن من جهة أخرى نجد أن المتوالية  $\left\{ \frac{s_{n+1}}{s_n} \right\}$  غير متزايدة وأن  $\frac{s_{12}}{s_{11}} = \frac{4}{11}$  وعلى هذا فإن كل حد من حدود المتسلسلة بعد

الحد العاشر أصغر أو يساوي الحد المقابل من المتسلسلة الهندسية  $\sum s_n \left( \frac{4}{11} \right)^{n-1} = \frac{11}{3^{11}} \left( \frac{4}{11} \right)^{n-1}$  .

$$R_{10} < \sum \frac{11}{3^{11}} \left( \frac{4}{11} \right)^{n-1} = \frac{121}{7 \cdot 3^{11}} = 0.00009758 < 0.0001. \text{ إذن}$$

### مسائل إضافية

١٣ - غير ترتيب الحدود  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  لتحصل على متسلسلة متقاربة مجموعها (أ) ١ . (ب) 2 - .  
إرشاد (أ) ضع أولا الحدود الـ  $n_1$  الموجبة الأولى حتى يزيد مجموعها عن 1 . اتبع ذلك بالـ  $n_2$  حد سالب الأول كي يقل المجموع عن 1 وهكذا .

١٤ - هل يمكن لمجموع متسلسلتين متباعدتين أن يتقاربا ؟ اعط مثالا على ذلك .

١٥ - (أ) قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$  إلى حدودها الخمسين الأولى .

(ب) كم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها كي لا يتجاوز الخطأ 0.000005 ؟  
ج : (أ) 0.01 (ب) 100,000

١٦ - (أ) قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$  إلى حدودها الثمانية الأولى .

(ب) كم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها كي لا يتجاوز الخطأ 0.00005 ؟  
ج : (أ) 0.0002 (ب) 11

١٧ - (أ) قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة الهندسية  $\sum \frac{3}{2^n}$  إلى حدودها الستة الأولى .

(ب) كم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها كي لا يتجاوز الخطأ 0.00005 ؟  
ج : (أ) 0.05 (ب) 16

١٨ - برهن أنه إذا ثبت لنا تقارب المتسلسلة الموجبة  $\sum s_n$  عن طريق مقارنتها بالمتسلسلة الهندسية  $\sum r^n$  حيث  $0 < r < 1$

$$\text{فإن } R_n < \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

١٩ - قدر الخطأ الناتج عن تقريب كل من المتسلسلتين التاليتين إلى حدودها الستة الأولى :

$$(1) \left( \sum \frac{1}{3^n} \right) < \left( \sum \frac{1}{3^n + 1} \right)$$

$$(ب) \left( \sum \frac{1}{8+4^n} < \sum \frac{1}{4^n} \right)$$

ج : (أ) 0.0007 ، (ب) 0.0009

٢٥- إن التسلسلين (أ)  $\sum \frac{n+1}{n \cdot 8^n}$  و (ب)  $\sum \frac{n}{(n+1)8^n}$  متقاربان استناداً إلى اختبار النسبة . قدر الخطأ الناتج عن تقريب كل منهما إلى حدودها الثانية الأولى .

ج : (أ) 0.0009 ، (ب) 0.0007

٢٦- برهن أن ، بالنسبة للتسلسلة  $p$  المتقاربة ،  $R_n < \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$  . إرشاد : انظر المسألة ٩ .

٢٧- إن التسلسلين (أ)  $\sum \frac{1}{n^2+2}$  و (ب)  $\sum \frac{n-1}{n^2}$  متقاربان اعتماداً على مقارنتهما بالتسلسلة  $p$  . قدر الخطأ الناتج عن تقريب كل منهما إلى حدودها الستة الأولى .

وكم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها في كل منهما كي لا يتجاوز الخطأ 0.005 .

ج : (أ) 0.014 ، عشرة حدود ، (ب) 0.002 ، خمسة حدود .



# الفصل الحادى والمختص

## متسلسلات القوى

تسمى المتسلسلة غير المنتهية من الشكل

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (1)$$

حيث  $c_i$  ثوابت ، متسلسلة قوى فى  $x$  . وبشكل مماثل نسمى المتسلسلة المنتهية من الشكل

$$\sum_{i=0}^n c_i (x-a)^i = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots + c_n (x-a)^n + \dots \quad (2)$$

متسلسلة قوى فى  $(x-a)$  .

لأى قيمة لـ  $x$  فإن كلا من المتسلسلتين (1) و (2) تصبح متسلسلة غير منتهية بمحدود ثابتة (أنظر الفصلين ٤٨ و ٤٩) وإما أن تكون متقاربة أو متباعدة .

**فترة التقارب** . فترة التقارب . نسمى مجموعة قيم  $x$  التى تكون عندها متسلسلة القوى متقاربة بفترة التقارب . ومن الواضح أن (1) متقاربة عندما  $x=0$  وأن (2) متقاربة عندما  $x=a$  . فإذا وجدت قيم أخرى لـ  $x$  تتقارب عندها (1) أو (2) فنحن إذن أن تتقارب لجميع قيم  $x$  أو لجميع قيم  $x$  فى فترة زمنية منتهية (فترة منغلقة أو مفتوحة أو نصف مفتوحة) مركزها عند النقطة  $x=0$  للمتسلسلة (1) و  $x=a$  للمتسلسلة (2) .

ولإيجاد فترة التقارب نستخدم اختبار النسبة للتقارب المطلق أما فيما يتعلق بطرق الفترة فنستخدم الاختبارات الأخرى التى وردت فى الفصلين ٤٨ و ٤٩ .

أنظر المسائل ١ - ٩

**التقارب والتقارب المنتظم** . إن الدراسة التى سنوردها فيما يلى مع النظريات خاصة للمتسلسلات من النمط (1) ولكن يمكن تطبيقها على النمط (2) بعد تغيير بسيط .

لننظر فى متسلسلة القوى (1) ولننظر :

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$$

المجموع الجزئى لـ  $n$  حدود

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k = c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + c_{n+2} x^{n+2} + \dots$$

المجموع الباقى بعد  $n$  حدا . فليكون عندئذ

$$\sum c_i x^i = S_n(x) + R_n(x) \quad (2)$$

إذا تقاربت  $\sum c_n x^n$  عندما  $x = x_0$  إلى عدد محدود  $S(x_0)$  فإن  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S(x_0)$ . لأن  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |S(x_0) - S_n(x_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x_0)| = 0$ . و  $|S(x_0) - S_n(x_0)| = |R_n(x_0)|$ ,  
 فكذا يتقارب  $\sum c_n x^n$  عندما  $x = x_0$  إذا وجد لكل عدد موجب  $\epsilon$  مهما كان صغيراً، عدداً صحيحاً موجباً  $m$  بحيث يكون  
 $|R_n(x_0)| < \epsilon$  عندما  $n > m$ .

يلاحظ أن  $m$  لا تعتمد فقط على  $\epsilon$  (أنظر المسألة ١٢ من الفصل ٤٧) بل تعتمد كذلك على اختيار القيمة  $x_0$  لـ  $x$ .  
 أنظر المسألة ١٠.

سنبرهن في المسألة ١١.

I - إذا كانت  $\sum c_n x^n$  متقاربة عندما  $x = x_1$  وكان  $|x_2| < |x_1|$  فإن المتسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً  
 عندما  $x = x_2$ .

لنفرض الآن أن (١) تقاربها مطلقاً، أي أن  $\sum |c_n x^n|$  متقاربة لجميع قيم  $x$  التي تحقق العلاقة  $|x| < p$ ،  
 لنأخذ قيمة لـ  $x$  أما  $x = p$  أو  $x = -p$  بحيث يكون  $|x| = p < P$  فبما أن (١) متقاربة عندما  $|x| = p$  فإنه  
 يوجد لأي عدد  $\epsilon > 0$  مهما كان صغيراً عدد صحيح موجب  $m$  بحيث إذا كان  $n > m$  فإن  $|R_n(p)| = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k p^k| < \epsilon$ .  
 لنجعل الآن  $x$  تتغير في الفترة  $|x| \leq p$  عندئذ يأخذ كل حد من  $|R_n(x)| = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k x^k|$  قيمته العظمى عند  
 $|x| = p$ ، وبالتالي فإن  $|R_n(x)|$  يبلغ قيمته العظمى في الفترة  $|x| \leq p$  عندما  $|x| = p$ .

لنفرض أننا اخترنا  $\epsilon$  ووجدنا  $m$  عندما  $|x| = p$  عندئذ يكون لهذه القيم لـ  $\epsilon$  و  $m$   $|R_n(x)| < \epsilon$  لجميع  
 قيم  $x$  التي تحقق الشرط  $|x| \leq p$  أي أن  $m$  تعتمد على  $\epsilon$  و  $p$  ولا تعتمد على  $x_0$  التي نختارها لـ  $x$  في الفترة  
 $|x| \leq p$  كما في التقارب العادي. لذلك فإننا نقول (١) متقاربة تقارباً منتظماً في الفترة  $|x| \leq p$  وهذا نكون  
 قد برهنا المطلوب.

II - إذا كانت  $\sum c_n x^n$  متقاربة تقارباً مطلقاً عندما  $|x| < P$  فهي متقاربة تقارباً منتظماً عندما  $|x| \leq p < P$ .  
 (المتسلسلة  $\sum (1-x)^n$  على سبيل المثال، متقاربة عندما  $|x| < 1$ . واستناداً إلى النظرية I فإن هذه المتسلسلة متقاربة  
 تقارباً مطلقاً عندما  $|x| \leq 0.99$  واستناداً إلى النظرية II فإنها متقاربة تقارباً منتظماً عندما  $|x| \leq 0.9$ ).

III - تمثل متسلسلة القوى دالة متصلة  $f(x)$  داخل فترة تقارب المتسلسلة.

لبرهان أنظر المسألة ١٢

IV - إذا تقاربت  $\sum c_n x^n$  إلى الدالة  $f(x)$  في الفترة I وإذا كان  $a$  و  $b$  داخل هذه الفترة فنحن نل:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n x^n dx = \int_a^b c_0 dx + \int_a^b c_1 x dx + \int_a^b c_2 x^2 dx + \dots$$

$$+ \int_a^b c_{n-1} x^{n-1} dx + \dots$$

لبرهان أنظر المسألة ١٣

V - إذا تقاربت  $\sum c_i x^i$  إلى  $f(x)$  في الفترة I فإن التكامل غير المحدد  $\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^x c_i x^i dx$  يتقارب إلى  $\int_0^x f(x) dx$  لجميع قيم  $x$  داخل الفترة I .

VI - إذا تقاربت  $\sum c_i x^i$  إلى الدالة  $f(x)$  في الفترة I فمشتق المتسلسلة  $\frac{d}{dx}(\sum c_i x^i)$  إلى  $f'(x)$  لجميع قيم  $x$  داخل الفترة I .

VII - إن تمثيل الدالة  $f(x)$  في متسلسلة قوى في  $x$  وحيد .

### مسائل محلولة

١ - عين فترة تقارب  $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \dots$

باستخدام اختبار النسبة :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = |x|$$

المتسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً عندما  $|x| < 1$  ومتباعدة عندما  $|x| > 1$  .

أما بخصوص طرق الفترة  $x = 1$  و  $x = -1$  فينبغي اختبار المتسلسلة بشكل مستقل .

عندما  $x = 1$  تصبح المتسلسلة  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$  متقاربة تقارباً مشروطاً

وعندما  $x = -1$  تصبح المتسلسلة  $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots)$  متباعدة .

وهكذا فإن المتسلسلة المفروضة تتقارب في الفترة  $-1 < x \leq 1$  .

٢ - عين فترة تقارب المتسلسلة  $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

المتسلسلة المفروضة متقاربة لجميع قيم  $x$  .

٣ - عين تقارب المتسلسلة  $\frac{x-2}{1} + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \dots + \frac{(x-2)^n}{n} + \dots$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-2)^n} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = |x-2|$$

إن المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً عندما  $|x-2| < 1$  أي  $1 < x < 3$  وتتباعدها عندما  $|x-2| > 1$  أي عندما  $x < 1$

و  $x > 3$  . وعندما  $x = 1$  تأخذ المتسلسلة الشكل  $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$  وعندما  $x = 3$  تأخذ الشكل

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  وتتقارب الأولى في حين تتباعده الثانية . وهكذا نرى أن المتسلسلة المفروضة تتقارب في الفترة

$1 \leq x < 3$  وتتباعدها عدا ذلك .

٤ - أوجد فترة تقارب  $1 + \frac{x-3}{1^2} + \frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(x-3)^3}{3^2} + \dots + \frac{(x-3)^{n-1}}{(n-1)^2} + \dots$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-3)^n}{n^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{(x-3)^{n-1}} \right| = |x-3| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 = |x-3|$$

إن تقارب المتسلسلة مطلق عندما  $|x-3| < 1$  أو  $2 < x < 4$ ، وتباعد عندما  $|x-3| > 1$  أو عندما  $x < 2$  و  $x > 4$

وعندما  $x = 2$  تأخذ المتسلسلة الشكل  $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots$  وعندما  $x = 4$  تأخذ الشكل  $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$  وبما أن هاتين المتسلسلتين متقاربتان تقارباً مطلقاً فإن المتسلسلة المفروضة تتقارب تقارباً مطلقاً في الفترة  $2 \leq x \leq 4$  وتباعد فيما عدا ذلك. ويلاحظ أن الحد الأول للمتسلسلة لم يسطر بالحد العام عندما  $n = 0$ .

$$5 - \text{من فترة تقارب المتسلسلة } \frac{x+1}{\sqrt{1}} + \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}} + \frac{(x+1)^3}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(x+1)^n} \right| = |x+1| \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x+1|$$

والمتسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً عندما  $|x+1| < 1$  أو عندما  $-2 < x < 0$ ، وتباعد عندما  $x < -2$  و  $x > 0$ .

أما عندما  $x = -2$  فتأخذ المتسلسلة الشكل  $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots$  وعندما  $x = 0$  تأخذ الشكل

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

إذن المتسلسلة المفروضة متقاربة في الفترة  $-2 \leq x < 0$  وتباعد فيما عدا ذلك.

$$6 - \text{من فترة تقارب المتسلسلة } 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

إن هذه المتسلسلة هي متسلسلة ذات الحدين وهي منتهية عندما تكون  $m$  صحيحة موجبة وغير منتهية لجميع القيم الأخرى لـ  $m$  وإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)x^{n-1}} \right|$$

$$= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{m-n+1}{n} \right| = |x|$$

المتسلسلة غير المنتهية متقاربة تقارباً مطلقاً عندما  $|x| < 1$  وتباعد عندما  $|x| > 1$ . وأما عند طرفي الفترة  $x = \pm 1$  فإن المتسلسلة تتقارب إذا كان  $m \geq 0$  وتباعد إذا كان  $m \leq -1$ . أما عندما  $-1 < m < 0$  فإن المتسلسلة تتقارب عندما  $x = 1$  وتباعد عندما  $x = -1$  ولبرهان هذه الحقائق نحتاج إلى اختبارات أكثر دقة من التي وردت في الفصل ٤٨.

$$7 - \text{أوجد مجال تقارب } x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{x^{2n-1}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2$$

والمتسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً في الفترة  $x^2 < 1$  أو  $-1 < x < 1$  وعندما  $x = -1$  تأخذ المتسلسلة الشكل  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \dots$  وعندما  $x = 1$  تأخذ الشكل  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$ ، والمتسلسلتان متقاربتان. إذن المتسلسلة المفروضة متقاربة عندما  $-1 \leq x \leq 1$  وتباعد فيما عدا ذلك.

$$8 - \text{من فترة تقارب } (x-1) + 2!(x-1)^2 + 3!(x-1)^3 + \dots + n!(x-1)^n + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{n!(x-1)^n} \right| = |x-1| \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = \infty$$

المتسلسلة متقاربة عند  $x = 1$  فقط .

٩- أوجد فترة تقارب  $\frac{1}{2x} + \frac{2}{4x^2} + \frac{3}{8x^3} + \dots + \frac{n}{2^n x^n} + \dots$  . إن هذه المتسلسلة هي متسلسلة قوى في  $1/x$  .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n+1}{2^{n+1} x^{n+1}} \cdot \frac{2^n x^n}{n} \right| = \frac{1}{2|x|} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2|x|}$$

والمتسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً عندما  $\frac{1}{2|x|} < 1$  أو عندما  $|x| > \frac{1}{2}$ .

وعندما  $x = 1/2$  تأخذ المتسلسلة الشكل  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$  . وعندما  $x = -1/2$  تأخذ الشكل  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$  وكل من المتسلسلتين متباعدة . إذن المتسلسلة المفروضة متقاربة في الفترتين  $x < -1/2$  و  $x > 1/2$  ومتباعدة في الفترة  $-1/2 \leq x \leq 1/2$  .

١٠- المتسلسلة  $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$  متقاربة عندما  $|x| < 1$  . فإذا فرضنا  $\epsilon = 0.000001$  فأوجد قيمة  $m$  بحيث يكون  $|R_n(x)| < \epsilon$  عندما  $n > m$  وذلك عندما .

$$(١) \quad x = 1/2 \quad \text{و} \quad (ب) \quad x = 1/4$$

$$\text{إن } R_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{n+k} \text{ وبالتالي :}$$

$$|R_n(1/2)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (1/2)^{n+k} \right| = \frac{1}{2} (1/2)^{n-1} \quad , \quad |R_n(1/4)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (1/4)^{n+k} \right| = \frac{1}{4} (1/4)^{n-1}$$

(١) لنبحث عن  $m$  بحيث يكون عندما  $n > m$  فإن  $\frac{1}{2} (1/2)^{n-1} < 0.000001$  أو  $1/2^{n-1} < 0.000003$  . وبما أن  $1/2^{19} = 0.000002$  و  $1/2^{18} = 0.000004$  فإن  $m = 19$  .

(ب) لنبحث عن  $m$  بحيث يكون عندما  $n > m$  فإن  $\frac{1}{4} (1/4)^{n-1} < 0.000001$  أو  $1/4^{n-1} < 0.000005$  . هنا  $m = 9$  .

١١- برهن أنه إذا كانت متسلسلة القوى  $\sum c_i x^i$  متقاربة عندما  $x = x_1$  وإذا كان  $|x_2| < |x_1|$  فإن المتسلسلة تقارب تقارباً مطلقاً عندما  $x = x_2$  . بما أن  $\sum c_i x_1^i$  متقاربة فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n x_1^n = 0$  استناداً إلى النظرية XV من الفصل ٤٧ . حيث أن  $\{ |c_i x_1^i| \}$  متقاربة فهي محدودة ، لنكتب  $0 < |c_n x_1^n| < k$  لجميع قيم  $n$  .

نفرض  $|x_2/x_1| = r$  حيث  $0 < r < 1$  عندئذ :

$$|c_n x_2^n| = |c_n x_1^n| \cdot |x_2^n/x_1^n| = |c_n x_1^n| \cdot |x_2/x_1|^n < k r^n$$

وكل حد من المتسلسلة  $\sum |c_n x_2^n|$  أصغر أو يساوي الحد المقابل من المتسلسلة الهندسية المتقاربة  $\sum k r^n$  لذلك فهي متقاربة وفق الحقيقة متقاربة تقارباً مطلقاً .

١٢- برهن أن متسلسلة القوى تمثل دالة متصلة  $f(x)$  داخل فترة تقارب المتسلسلة .

لنفرض  $f(x) = \sum a_n x^n = S_d(x) + R_d(x)$  ولتكن  $x = x_0$  داخل فترة التقارب للمتسلسلة  $\sum c_i x^i$  عندئذ توجد استناداً إلى النظرية ١ فترة حول  $x_0$  تكون المتسلسلة فيها متقاربة تقارباً منتظماً . لكي نبرهن اتصال  $f(x)$  عند  $x = x_0$



يلزم أن نبرهن أن  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| = 0$  عندما تكون  $x_0 + \Delta x$  من الفترة  $I$ . أي أنه من الضروري أن نبرهن أنه إذا كان  $\epsilon$  عددا موجبا، مهما كان صغيرا، فإنه يمكن اختيار  $\Delta x$  بحيث يكون  $x_0 + \Delta x$  في  $I$  ويكون  $|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \epsilon$  والآن لأي  $\Delta x$  التي يكون عندها  $x_0 + \Delta x$  في الفترة  $I$ ، يكون

$$\begin{aligned} |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| &= |S_n(x_0 + \Delta x) + R_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) - R_n(x_0)| \\ &\leq |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| + |R_n(x_0 + \Delta x)| + |R_n(x_0)| \end{aligned} \quad (i)$$

لتفرض أننا اخترنا  $\epsilon$  وبما أن  $x_0 + \Delta x$  من فترة تقارب المتسلسلة فإنه يوجد عدد صحيح موجب  $m$  بحيث إذا كان  $n > m$  فإن  $|R_n(x_0 + \Delta x)| < \epsilon/3$  و  $|R_n(x_0)| < \epsilon/3$ . وبما أن  $S_n(x)$  متعددة حدود فإنه من الممكن اختيار  $|\Delta x|$  صغيرا بقدر كاف بحيث يكون  $|S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| < \epsilon/3$ . ولهذا الاختيار الجديد  $\Delta x$  تبقى  $|R_n(x_0 + \Delta x)|$  أصغر من  $\epsilon/3$  لأن المتسلسلة متقاربة تقاربا منتظما في  $I$ . أما  $|R_n(x_0)|$  فتبقى غير متغيرة. وهكذا نجد من (i) أن :

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

إذن الدالة  $f(x)$  متصلة لجميع قيم  $x$  داخل فترة تقارب المتسلسلة.

١٢ - برهن أنه إذا كانت  $\sum c_i x^i$  متقاربة إلى الدالة  $f(x)$  في فترة ما وكان  $x = a$  و  $x = b$  ضمن هذه الفترة فإن :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c_0 dx + \int_a^b c_1 x dx + \int_a^b c_2 x^2 dx + \dots + \int_a^b c_{n-1} x^{n-1} dx + \dots$$

لتفرض  $b > a$  ولنكتب  $f(x) = \sum c_i x^i = S_n(x) + R_n(x)$  فيكون عندئذ :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b S_n(x) dx + \int_a^b R_n(x) dx$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b R_n(x) dx \right|$$

وبما أن  $\sum c_i x^i$  متقاربة في فترة ما ولتكن  $|x| < P$  فإن المتسلسلة متقاربة تقاربا منتظما في الفترة  $-P < x < P$  التي تحتوي  $x = a$  و  $x = b$ . إذن لأي قيمة  $\epsilon$  أكبر من الصفر مهما كانت صغيرة يمكن اختيار عدد  $n$  كبيرا بقدر كاف بحيث يكون  $|R_n(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$  لجميع قيم  $x$  التي تحقق الشرط  $|x| \leq P$ . إذن :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| = 0 \quad \text{and} \quad \int_a^b f(x) dx = \sum \int_a^b c_i x^i dx$$

وهو المطلوب.

### مسائل إضافية

١٣ - أوجد فترة تقارب كل متسلسلة القوى التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad & x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots \\ (2) \quad & \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} - \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \dots \\ (3) \quad & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \\ (4) \quad & \frac{x^2}{(\ln 2)^2} + \frac{x^3}{(\ln 3)^2} + \frac{x^4}{(\ln 4)^2} + \frac{x^5}{(\ln 5)^2} + \dots \\ (5) \quad & x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots \\ (6) \quad & \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \dots \\ (7) \quad & x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \end{aligned}$$



(ز) المتسلسلة التي نحصل عليها من اشتقاق (ا) حذا حذا .

(ح) المتسلسلة التي نحصل عليها من اشتقاق (ب) حذا حذا .

$$(ط) \quad x + \frac{x^2}{1+2^2} + \frac{x^3}{1+3^2} + \frac{x^4}{1+4^2} + \dots$$

(ي) المتسلسلة التي نحصل عليها من اشتقاق (ط) حذا حذا .

(ك) المتسلسلة التي نحصل عليها من اشتقاق (ي) حذا حذا .

(ل) المتسلسلة التي نحصل عليها من تكامل (ا) حذا حذا .

(م) المتسلسلة التي نحصل عليها من تكامل (ج) حذا حذا .

$$(ن) \quad (x-2) + \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(x-2)^3}{9} + \frac{(x-2)^4}{16} + \dots$$

$$(س) \quad \frac{x-3}{1 \cdot 3} + \frac{(x-3)^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{(x-3)^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{(x-3)^4}{4 \cdot 3^4} + \dots \quad (ع) \quad 1 - \frac{3x-2}{5} + \frac{(3x-2)^2}{5^2} - \frac{(3x-2)^3}{5^3} + \dots$$

(ف) المتسلسلة التي نحصل عليها من اشتقاق (ن) حذا حذا .

(ص) المتسلسلة التي نحصل عليها من تكامل (ن) حذا حذا .

$$(ر) \quad 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \dots \quad (ذ) \quad 1 + \frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \dots$$

$$(ش) \quad \frac{1}{2} + \frac{x^2+6x+7}{2^2} + \frac{(x^2+6x+7)^2}{2^3} + \frac{(x^2+6x+7)^3}{2^4} + \dots$$

ج : (ا)  $-1 < x < 1$  (و) جميع قيم  $x$  (ك)  $-1 \leq x < 1$  (ع)  $-1 < x < 7/3$  (ر)  $x < -1$

(ب)  $-1 \leq x \leq 1$  (ز)  $-1 < x < 1$  (ل)  $-1 < x < 1$  (ف)  $1 \leq x < 3$  (ش)  $x > 1$

(ج) جميع قيم  $x$  (ح)  $-1 \leq x < 1$  (م) جميع قيم  $x$  (ص)  $1 \leq x \leq 3$  (ت)  $-5 < x < -3$

(د)  $-5 < x \leq 5$  (ط)  $-1 \leq x \leq 1$  (ن)  $1 \leq x \leq 3$  (ذ)  $x < \frac{1}{2}$  (ث)  $-3 < x < -1$

(هـ)  $-1 \leq x \leq 1$  (ي)  $-1 \leq x \leq 1$  (س)  $0 \leq x < 6$

١٥ - برهن أنه يمكن اشتقاق متسلسلة القوى حذا حذا داخل فترة تقاربها .

إرشاد : إن كلا من  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  و  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  يتقاربان عندما  $|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

استخدم النظريات I و II و V لتبين أن  $\int_0^x f(x) dx = f(x)$ .

١٦ - برهن أن تمثيل الدالة  $f(x)$  في متسلسلة قوى في  $x$  تمثيل وحيد .

إرشاد : ليكن  $f(x) = \sum a_n x^n$  و  $f(x) = \sum b_n x^n$  في الفترة  $|x| < a$  حيث  $a \neq 0$  . لنضع  $x = 0$

في  $\sum (a_n - b_n) x^n = 0$  و  $\sum \frac{d}{dx} \sum (a_n - b_n) x^n = 0$  ،  $\sum \frac{d^2}{dx^2} \sum (a_n - b_n) x^n = 0$  ، ... لنحصل على  $a_n = b_n$  ،  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

## الفصل الثاني والخمسون

### فك الدوال في متسلسلات

يمكن توليد متسلسلة قوى في  $x$  بطرق شتى . لنفكر ، على سبيل المثال استمرار عملية القسمة التالية إلى ما لا نهاية فنجد أن :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots \quad (1)$$

( يلاحظ أن هذه العلاقة باطلة تماما عندما  $x = 5$  مثلا ) . سنبين في المسألة ١ أن المتسلسلة ( ١ ) تمثل  $\frac{1}{1-x}$  في الفترة  $|x| < 1$  فقط ، أي أن :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots, -1 < x < 1$$

وسنرى في المسألين ٢ - ٣ طرقا أخرى لتوليد متسلسلات قوى .

**الطريقة العامة** لفك دالة في متسلسلة قوى في  $x$  وفي  $(x-a)$  سنوردها فيما يلي :

نلاحظ أنه يشترط في فك دالة أن توجد الدالة مع مشتقاتها من جميع الرتب عند  $x=0$  أو عند  $x=a$  ، فاللوال  $\ln x$  و  $\cot x$  لا يمكن أن تفك في متسلسلة قوى .

**متسلسلة ماكلورين** . إذا افترضنا أنه يمكن تمثيل الدالة المفروضة في متسلسلة قوى في  $x$  فإن هذه المتسلسلة يجب أن تكون بالضرورة من شكل متسلسلة ماكلورين .

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots \quad (2)$$

**متسلسلة تايلور** : إذا افترضنا أنه يمكن تمثيل الدالة المفروضة في متسلسلة قوى في  $(x-a)$  فإن هذه المتسلسلة يجب أن تكون بالضرورة من شكل متسلسلة تايلور :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \dots$$

أنظر المسألة ١

أما المزال عن الفترة التي تمثل فيها  $f(x)$  بمتسلسلة ماكلورين أو متسلسلة تايلور فننظر فيها في الفصل التالي . غير أنه فيما يتعلق باللوال التي تمر معنا في هذا الكتاب فإن الفترة التي تمثل فيها المتسلسلة المفروضة تنطبق مع فترة تقارب المتسلسلة .  
أنظر المائل ١١ - ١٢

يمكن الحصول على شكل آخر مفيد جدا للمتسلسلة تايلور بتبديل  $x$  بـ  $a + h$  في (٢) :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \dots$$

### مسائل محلولة

١ - إن متسلسلة القوى  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots$  هي متسلسلة هندسية لانهاية فيها  $a = 1$  و  $r = x$ .

لذلك فإن هذه المتسلسلة تتقارب إلى  $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$  عندما  $|r| = |x| < 1$ . أما إذا كان  $|x| \geq 1$  فإن المتسلسلة متباعدة.

٢ - نحصل باشتقاق المتسلسلة التي مرت في المسألة (١) مرتين متتاليتين على متسلسلة القوى :

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots \quad (i)$$

$$2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots \quad (ii)$$

ونحصل بتكاملها بين حدى التكامل 0 و  $x$  مرتين متتاليتين على متسلسلة القوى :

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{1}{n}x^n + \dots \quad (iii)$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \dots + \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} + \dots \quad (iv)$$

٣ - أوجد متسلسلة القوى  $y = \sum a_n x^n$  التي تحقق الشروط التالية :

$$(i) \quad y = 2 \text{ عندما } x = 0, \quad (ii) \quad y' = 1 \text{ عندما } x = 0, \quad (iii) \quad y'' + 2y' = 0.$$

لننظر في :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (1)$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots \quad (ب)$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots \quad (ج)$$

وإذا عوضنا  $y = 2$  و  $x = 0$  في (١) نجد  $a_0 = 2$ . وإذا عوضنا  $x = 0$  ،  $y' = 1$  في (ب) نجد  $a_1 = 1$ .  
وبما أن  $y'' = -2y'$  فإن :

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots = -2a_1 - 4a_2x - 6a_3x^2 - 8a_4x^3 - \dots$$

ومنها ينتج أن  $a_2 = -a_1 = -1$  ،  $a_3 = -\frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}$  ،  $a_4 = -\frac{1}{3}a_3 = -\frac{1}{6}$  ، ...  
وعلى هذا فالتسلسلة المطلوبة هي :

$$y = 2 + x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \dots$$

٤ - بفرض أن (١)  $f(x)$  موجودة مع مشتقاتها من جميع الرتب عند  $x = a$  وأن (٢)  $f(x)$  يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى في  $(x - a)$  فبين أن هذه المتسلسلة هي :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \dots$$

نفرض أن المتسلسلة هي :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + \dots \quad (1)$$

وبالاشتقاق المتتالي نجد :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= c_0 + 2c_1(x-a) + 3c_2(x-a)^2 + 4c_3(x-a)^3 + \dots + nc_n(x-a)^{n-1} + \dots \quad (ب) \\
 f'(x) &= 2c_1 + 6c_2(x-a) + 12c_3(x-a)^2 + 20c_4(x-a)^3 + \dots + (n+1)nc_{n+1}(x-a)^{n-1} + \dots \quad (ج) \\
 f''(x) &= 6c_2 + 24c_3(x-a) + 60c_4(x-a)^2 + \dots + (n+2)(n+1)nc_{n+2}(x-a)^{n-1} + \dots \quad (د) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

لنضع  $x=a$  في (أ) ، (ب) ، (ج) . . . . فنجد :

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{1}{2!} f''(a), \quad \dots, \quad c_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a), \quad \dots$$

وبالسوذة إلى (أ) والتعويض بهذه النتائج نجد متسلسلة تايلور المطلوبة .

أوجد مفكوك الدالة المعطاة في كل من المسائل من ٥ إلى ١٠ في متسلسلة قوى في  $x$  أو في  $x-a$  حسبما يطلب .  
وذلك تحت الشروط الواردة في هذا الباب وعين فترة تقارب المتسلسلة .

٥ -  $e^{-2x}$  في متسلسلة قوى في  $x$  .

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = e^{-2x} & f(0) = 1 \\
 f'(x) = -2e^{-2x} & f'(0) = -2 \\
 f''(x) = 2^2 e^{-2x} & f''(0) = 2^2 \\
 f'''(x) = -2^3 e^{-2x} & f'''(0) = -2^3 \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

إن

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{2^2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{3!} x^3 + \frac{2^4}{4!} x^4 - \dots + (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

وإذاً  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$  إذن المتسلسلة متقاربة لجميع قيم  $x$  .٦ -  $\sin x$  في متسلسلة قوى في  $x$  .

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
 f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
 f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\
 f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

إن

ومن ثم نجد أن قيم المشتقات عند  $x=0$  هي  $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$  إلخ وبالتالي :

$$\begin{aligned}
 \sin x &= 0 + 1x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{-1}{3!} x^3 + \frac{0}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots \\
 &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0$$

وإذاً  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0$  إذن المتسلسلة متقاربة لجميع قيم  $x$  .

٧ -  $\ln(1+x)$  في متسلسلة قوى في  $x$ .

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln(1+x) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x} & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} & f''(0) = -2 \\ f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} & f'''(0) = 2! \\ f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4} & f^{(4)}(0) = -3! \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array}$$

إن

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2!} + 2! \frac{x^3}{3!} - 3! \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{x^n}{n!} + \dots \\ &= x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n + \dots \end{aligned}$$

ومن

واستنادا إلى المسألة ١ من الفصل ٥ نرى أن فترة تقارب المتسلسلة هي  $-1 < x \leq 1$

٨ -  $\arctan x$  في متسلسلة قوى في  $x$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \arctan x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -2x + 4x^3 - 6x^5 + \dots & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -2 + 12x^2 - 30x^4 + \dots & f'''(0) = -2! \\ f^{(4)}(x) = 24x - 120x^3 + \dots & f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) = 24 - 360x^2 + \dots & f^{(5)}(0) = 4! \\ f^{(6)}(x) = -720x + \dots & f^{(6)}(0) = 0 \\ f^{(7)}(x) = -720 + \dots & f^{(7)}(0) = -6! \end{array}$$

إن

$$\begin{aligned} x &= x - \frac{2!}{3!} x^3 + \frac{4!}{5!} x^5 - \frac{6!}{7!} x^7 + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \end{aligned}$$

وفترة التقارب ، استنادا إلى المسألة ٧ من الفصل ٥ هي  $-1 \leq x \leq 1$

٩ -  $e^{x-2}$  في متسلسلة قوى في  $(x-2)$

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{x-2} & f(2) = e \\ f'(x) = \frac{1}{e} e^{x-2} & f'(2) = \frac{1}{e} \\ f''(x) = \frac{1}{e} e^{x-2} & f''(2) = \frac{1}{e} \end{array}$$

إن

$$e^{x-2} = e \left\{ 1 + \frac{1}{2} (x-2) + \frac{1}{4} \frac{(x-2)^2}{2!} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(x-2)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-2)^n}{2^n n!} \cdot \frac{2^{n-1} (n-1)!}{(x-2)^{n-1}} \right| = \frac{1}{2} |x-2| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

والمتسلسلة متقاربة لجميع قيم  $x$ .

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \ln x & f(2) = \ln 2 \quad (x-2) \text{ في متسلسلة قوى في } \\
 f'(x) = x^{-1} & f'(2) = \frac{1}{2} \\
 f''(x) = -x^{-2} & f''(2) = -\frac{1}{4} \\
 f'''(x) = 2x^{-3} & f'''(2) = \frac{1}{4} \\
 f^{(4)}(x) = -6x^{-4} & f^{(4)}(2) = -\frac{3}{8}
 \end{array}$$

..... إن  
.....

$$\begin{aligned}
 \ln x &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4} \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4} \frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8} \frac{(x-2)^4}{4!} + \dots \\
 &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} \cdot \frac{2^n n}{(x-2)^n} \right| = \frac{1}{2} |x-2| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} |x-2|$$

إذن المتسلسلة متقاربة عندما  $|x-2| < 2$  أو  $0 < x < 4$ .

وإذا عوضنا بـ  $x=0$  نجد أن المتسلسلة تساوي  $\ln 2$  مطروح منها المتسلسلة التوافقية وهي متباعدة. أما إذا عوضنا بـ  $x=4$  فإننا نجد أن المتسلسلة هي  $\ln 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$  وهي متقاربة. إذن المتسلسلة متقاربة في الفترة  $0 < x \leq 4$ .

$$١١ - أوجد مفكوك ماكلورين لـ  $\sqrt{1+\sin x} = \sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$ .$$

لنضع  $x/2$  بدلا من  $x$  في مفكوك  $\sin x$  (المسألة ٦) فنحصل على :

$$\sin \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{2^7 \cdot 7!} + \dots$$

اشتق هذا المفكوك ، بعد ذلك ، لنحصل على :

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{1}{2}x &= 2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2^3 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^5 \cdot 4!} - \frac{x^6}{2^7 \cdot 6!} + \dots \right\} \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 6!} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{1+\sin x} = \sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 2!} - \frac{x^5}{2^5 \cdot 3!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!} + \frac{x^6}{2^6 \cdot 5!} - \dots, \quad \text{إذن :}$$

لجميع قيم  $x$ .

$$١٢ - أوجد مفكوك ماكلورين لـ  $e^{ms} = e \cdot e^{(m-1)s}$$$

باستخدام  $e^s = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots$  و  $e^{-s} = \cos s - 1 = -\frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \frac{s^6}{6!} + \dots$  ، نجد :

$$\begin{aligned}
 e^{ms} &= e \left\{ 1 + \left( -\frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \frac{s^6}{6!} + \dots \right) + \frac{1}{2!} \left( \frac{s^4}{(2!)^2} - \frac{2s^6}{2! \cdot 4!} + \dots \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3!} \left( -\frac{s^6}{(2!)^3} + \dots \right) + \dots \right\} \\
 &= e \left\{ 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{6} - \frac{31}{720} s^6 + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

١٣ - برهن ، بفرض أن جميع شروط العمليات الضرورية محقة ، إن (١)  $e^{is} = \cos s + i \sin s$  ، (ب)

$$\cos s = (e^{is} + e^{-is})/2, \quad (د) \quad \sin s = (e^{is} - e^{-is})/2i, \quad (ج) \quad e^{-is} = \cos s - i \sin s,$$



حيث  $i = \sqrt{-1}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots \quad (1)$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x \quad (ب)$$

$$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i \quad \text{وبالتالي} \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x; \quad (ج)$$

$$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2 \quad \text{وبالتالي} \quad e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x; \quad (د)$$

### مسائل إضافية

١٤ - تحقق من أن (أ) المتسلسلة (i) والمتسلسلة (ii) من المسألة ٢ متقاربتان عندما  $|x| < 1$  ؛ وأن (ب) المتسلسلة (iii) متقاربة عندما  $-1 < x < 1$  ؛ وأن (ج) المتسلسلة (iv) متقاربة عندما  $-1 \leq x \leq 1$

١٥ - تحقق من أن (أ) المتسلسلة التي نحصل عليها بجمع المتسلسلتين (i) و (ii) من المسألة ٢ متقاربة عندما  $|x| < 1$  ؛ وأن (ب) المتسلسلة التي نحصل عليها بجمع المتسلسلتين (iii) و (iv) متقاربة عندما  $-1 \leq x < 1$  .

١٦ - عين متسلسلة القوى  $y = \sum a_n x^n$  التي تحقق الشروط (i)  $y = 2$  عندما  $x = 0$  ، (ii)  $y' = 0$

$$y'' - y = 0. \quad (iii) \quad x = 0 \quad \text{عندما} \quad y = 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + \dots + \frac{2x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \text{ج}$$

١٧ - عين متسلسلة القوى  $y = \sum a_n x^n$  التي تحقق الشروط (i)  $y = 1$  عندما  $x = 0$  ، (ii)  $y' = 1$  عندما

$$y'' + y = 0. \quad (iii) \quad x = 0 \quad \text{ج} \quad y = 1 + x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{4!} + \frac{x^9}{5!} - \dots$$

١٨ - أوجد المفكوك في متسلسلة ماكلاورين :

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2}{4!} x^4 - \dots + (-1)^n \frac{2^{n-1}}{(2n)!} x^{2n} + \dots, \quad (1) \quad \text{لجميع قيم } x.$$

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + \dots, \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \quad (ب)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \dots, \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \quad (ج)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots, \quad -1 < x < 1 \quad (د)$$

$$\sin^3 x = \frac{2}{2!} x^3 - \frac{2}{4!} x^5 + \frac{2}{6!} x^7 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{n-1}}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots, \quad (هـ) \quad \text{لجميع قيم } x.$$

١٩ - أوجد المفكوك في متسلسلة تايلور :

$$e^x = e^a \left[ 1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right], \quad (1) \quad \text{لجميع قيم } x.$$

$$\sin x = \sin a + (x-a) \cos a - \frac{(x-a)^2}{2!} \sin a - \frac{(x-a)^3}{3!} \cos a + \dots, \quad (ب) \quad \text{لجميع قيم } x.$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 - (x - \frac{1}{2}\pi) - \frac{(x - \frac{1}{2}\pi)^2}{2!} + \frac{(x - \frac{1}{2}\pi)^3}{3!} + \dots \right], \quad (ج) \quad \text{لجميع قيم } x.$$

٢٠ - اشتق مفكوك  $\sin x$  ( المسألة ٦ ) لتصل على مفكوك  $\cos x$  . تحقق بعد ذلك من أن حل المسألة ١٧ هو :  

$$y = \sin x + \cos x$$

٢١ - ضع في مفكوك  $e^x$  ( المسألة ٥ )  $x/2$  بدلا من  $x$  لتصل على مفكوك  $e^{-x}$  ، وضع في هذه المتسلسلة الأخيرة  $-x$  بدلا من  $x$  لتصل على مفكوك  $e^x$  . ثم تحقق من أن حل المسألة ١٦ هو  $y = e^x + e^{-x}$  .

٢٢ - أوجد مفكوك ماكلورين :  $\sin^2 x = (\sin x)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + \frac{32x^6}{3!5!} - \frac{848x^8}{3!7!} + \dots$  ، لجميع قيم  $x$  .

٢٣ - برهن أن :  $\int_0^x e^{-y^2} dy = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$  ، لجميع قيم  $x$  .

٢٤ - أوجد ، بالتقسيم ، مفكوك  $\frac{1}{1+x^2}$  ثم احصل على :

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

وقارن بالمسألة ٨ .

٢٥ - برهن باستخدام نظرية ذات الحدين أن :  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$  ، ثم احصل على :

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

٢٦ - اضرب مفكوك المتسلسلات المتتالية لتصل على :

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \dots \quad (ب) \quad e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \dots \quad (١)$$

٢٧ - أكتب  $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$  تخلص من

الكسور في المساواة الأخيرة ثم ساوى بين معاملات قوى  $x$  المتساوية لتصل على مفكوك  $\sec x$  .

## الفصل الثالث والخمسون

### صيغة ماكورين وتايلور مع البواقي

**صيغة ماكورين** • إذا كانت الدالة  $f(x)$  ومشتقاتها إلى  $n$  الأولى متصلة في فترة تحوى  $x = 0$  ، فعندئذ يوجد عدنان  $x_0$  ،  $x^*_0$  بين  $0$  ،  $x$  بحيث يكون :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$$

حيث

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n, \text{ ( شكل لاجرانج )}$$

أو

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x^*_0)}{(n-1)!}(x-x^*_0)^{n-1}x, \text{ ( شكل كوشي )}$$

**صيغة تايلور** : إذا كانت الدالة  $f(x)$  ومشتقاتها إلى  $n$  الأولى متصلة في فترة تحوى  $x = a$  فيوجد عندئذ عدنان  $x_0$  ،  $x^*_0$  بين  $a$  ،  $x$  بحيث يكون :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x)$$

حيث

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-a)^n, \text{ ( شكل لاجرانج )}$$

أو

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x^*_0)}{(n-1)!}(x-x^*_0)^{n-1}(x-a), \text{ ( شكل كوشي )}$$

إن صيغة ماكورين هي حالة خاصة ( $a=0$ ) من صيغة تايلور ، وإن صيغة تايلور مع الباقي على شكل لاجرانج هي قانون القيمة المتوسطة الموسع مع محور بسيط ( أنظر الفصل ٢١ ) . لاستنتاج الصيغة مع الباقي على شكل كوشي أنظر المسألة ١٠ .

ونلاحظ أن مفكوك اللام  $f(x)$  على شكل متسلسلة ماكلورين أو متسلسلة تايلور التي حصلنا عليها في الفصل ٥٢ يمثل دالة القيم  $x$  التي فقط تحقق الشرط :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

متسلسلات كمراجع : نذكر فيما يلي بعض المتسلسلات مع الفترات التي تمثل عليها البوال وذلك لرجوع إليها عند الحاجة .

$$e^x = 1 + x + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^3}{3!} + \dots + \frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \quad (\text{لجميع قيم } x)$$

$$\sin x = x - \frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^5}{5!} - \frac{(x)^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (\text{لجميع قيم } x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^4}{4!} - \frac{(x)^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad (\text{لجميع قيم } x)$$

$$\ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{na^n} + \dots \quad -a < x \leq a.$$

$$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)x^{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)(2n-1)} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\ln x = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + \frac{1}{3a^3}(x-a)^3 - \dots + \frac{(-1)^n}{(n-1)a^{n-1}}(x-a)^{n-1} + \dots$$

$$0 < x \leq 2a$$

$$e^x = e^a \left\{ 1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right\} \quad (\text{لجميع قيم } x)$$

$$\sin x = \sin a + (x-a) \cos a - \frac{(x-a)^2}{2!} \sin a - \frac{(x-a)^3}{3!} \cos a + \dots \quad (\text{لجميع قيم } x)$$

$$\cos x = \cos a - (x-a) \sin a - \frac{(x-a)^2}{2!} \cos a + \frac{(x-a)^3}{3!} \sin a + \dots \quad (\text{لجميع قيم } x)$$

### مسائل محلولة

- ١- أوجد الفترة التي يمكن فيها تمثيل  $e^x$  بمتسلسلة ماكلورين .  
 أن  $f^{(n)}(x) = e^x$  والباقي على شكل لايرانج هو  $|R_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n!} e^{\theta} \right| = \frac{|x|^n}{n!} e^{\theta}$  ، حيث  $\theta$  بين 0 و  $x$  .  
 إن العامل  $\frac{x^n}{n!}$  هو الحد العام للمتسلسلة  $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$  التي نعلم أنها متقاربة لجميع قيم  $x$  .

وعلى هذا فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$  ، أما العامل  $e^{\theta}$  فهو عدد لجميع قيم  $x$  .

وعلى هذا فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$  يساوى حاصل ضرب صفر في عدد محدود وهو يساوى الصفر ، وبالتالي فإن المتسلسلة تمثل  $e^x$  لجميع قيم  $x$  .

- ٢- أوجد الفترة التي يمكن فيها تمثيل  $\sin x$  بمتسلسلة ماكلورين .

إن  $f^{(n)}(x)$  ينفذ النظر عن الإشارة ، تساوى  $\sin x$  أو  $\cos x$  ، وعلى هذا فإن  $|R_n(x)| = \frac{|x^n|}{n!} |\sin x_0|$  أو

أو  $\frac{|x^n|}{n!} |\cos x_0|$  حيث  $x_0$  بين  $x$  ، 0 .

ثم إن  $\frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$  عندما  $n \rightarrow +\infty$  استنادا إلى المسألة ١ ، وبما أنه لا يمكن لـ  $|\sin x_0|$  أو  $|\cos x_0|$  أن يتجاوز الواحد فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$  والمتسلسلة تمثل  $\sin x$  لجميع قيم  $x$  .

٣- أوجد الفترة التي يمكن فيها تمثيل  $\cos x$  بمتسلسلة تايلور في  $(x - a)$  .

باستخدام الباقي على شكل لاجرانج نجد أن  $|R_n(x)|$  تساوى  $\frac{|(x-a)^n|}{n!} |\sin x_0|$  أو  $\frac{|(x-a)^n|}{n!} |\cos x_0|$  حيث  $x_0$  بين  $x$  ،  $a$  .

وبما أن  $\frac{|(x-a)^n|}{n!} \rightarrow 0$  عندما  $n \rightarrow +\infty$  في حين لا يمكن لـ  $|\sin x_0|$  و  $|\cos x_0|$  أن تتجاوز الواحد فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$  والمتسلسلة تمثل  $\cos x$  لجميع قيم  $x$  .

٤- أوجد الفترة التي يمكن فيها تمثيل  $\ln(1+x)$  بمتسلسلة مكلورين .

أن  $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$  فإذا كانت  $x_0$  و  $x$  بين  $x_0$  ، 0 فإن

(١) الباقي على شكل لاجرانج هو

$$R_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x_0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left( \frac{x}{1+x_0} \right)^n$$

(ب) الباقي على شكل كوشي هو

$$R_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x_0)^n} x = (-1)^{n-1} \frac{x(x-x_0)^{n-1}}{(1+x_0)^n}$$

وعندما  $0 < x_0 < x \leq 1$  يكون  $0 < x < 1+x_0$  و  $\frac{x}{1+x_0} < 1$  ، وباستخدام (١) يكون :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0 \text{ و } |R_n(x)| = \frac{1}{n} \left( \frac{x}{1+x_0} \right)^n < \frac{1}{n}$$

وعندما  $-1 < x < x_0 < 0$  فإن  $0 < 1+x < 1+x_0$  ومنه  $\frac{1}{1+x_0} < \frac{1}{1+x}$  وباستخدام (ب) نجد

$$|R_n(x)| = \frac{|x-x_0|^{n-1}}{(1+x_0)^n} |x| = \left| \frac{x_0-x}{1+x_0} \right|^{n-1} \cdot \frac{|x|}{1+x_0} = \left( \frac{x_0+|x|}{1+x_0} \right)^{n-1} \cdot \frac{|x|}{1+x_0} < \left( \frac{x_0+|x|}{1+x_0} \right)^{n-1} \cdot \frac{|x|}{1+x}$$

وبما أن  $|x| > 1$  فإن  $x_0 < x_0+|x| < |x|+x_0$  و  $x_0 < x_0+|x|$  ومنه  $\frac{x_0+|x|}{1+x_0} < |x|$  . وهكذا فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0 \text{ و } |R_n(x)| < \frac{|x|^n}{1+x}$$

وبالتالي فإنه يمكن تمثيل  $\ln(1+x)$  في متسلسلة مكلورين في الفترة  $-1 < x \leq 1$  .

٥- متسلسلة مكلورين المثلثة لـ  $\cos x$  برهن أن :

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ عندما } x < 0 \text{ و } R_n(x) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{ عندما } x > 0.$$

استنادا إلى المسألة (١) نجد أن  $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$  حيث  $x_0$  بين  $x$  و  $0$  ، وعندما  $x < 0$  يكون  $e^{\xi} < 1$  ، وبالتالي فإن  $|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$  وعندما  $x > 0$  يكون  $e^{\xi} < e^x$  ومنه  $R_n(x) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$ .

٦ - لتسلسلة مكلورين المسئلة لـ  $\ln(1+x)$  برهن أن :

$$R_n(x) < \frac{x^n}{n} \text{ عندما } 0 < x \leq 1 \text{ و } |R_n(x)| < \frac{|x|^n}{n(1+x)^n} \text{ عندما } -1 < x < 0$$

استنادا إلى المسألة (١) نجد أن  $|R_n(x)| = \frac{1}{n} \left| \frac{x}{1+x_0} \right|^n$  حيث  $x_0$  بين  $x$  و  $0$  ، وعندما  $0 < x \leq 1$  يكون  $\frac{1}{1+x_0} < 1$  ، ومنه  $|R_n(x)| < \frac{x^n}{n}$  ، وعندما  $-1 < x < 0$  ،  $1+x_0 > 1+x$  ،

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^n}{n(1+x)^n} \text{ إذن } \frac{1}{1+x_0} < \frac{1}{1+x}.$$

### مسائل إضافية

٧ - بين الفترة التي يمكن فيها تمثيل  $\cos x$  بتسلسلة مكلورين

ج : جميع قيم  $x$

٨ - عين الفترة التي يمكن فيها تمثيل (١)  $e^x$  و (ب)  $\sin x$  بتسلسلة تايلور في  $(x-a)$

ج : جميع قيم  $x$

٩ - بين أنه يمكن تمثيل  $\ln x$  بتسلسلة تايلور في  $(x-a)$  في الفترة  $0 < x \leq 2a$

$$\text{إرشاد : إن } |R_n(x)| = \left| \frac{(x-a)(x-x_0)^{n-1}}{(x_0)^n} \right| \text{ عندما } 0 < x < a \text{ و } a < x \leq 2a \text{ يكون } \left| \frac{x-x_0}{x_0} \right| < 1.$$

١٠ - لتكن  $T$  معرفة بـ

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + T(b-a)$$

ونعرف

$$F(x) = -f(b) + f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + T(b-x)$$

اتبع خطوات المسألة ١٥ في الفصل ٢١ لتحصل على صيغة تايلور بباقي على شكل كوشي.

١١ - (١) ضع  $x_0 = a + \theta(x-a)$  حيث  $0 < \theta < 1$  في باقي متسلسلة تايلور على شكل كوشي.

اتبرهن أن

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a + \theta(x-a)]}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} (x-a)^n$$

(ب) برهن أن  $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} x^n$  في صيغة مكلورين.

١٢ - برهن أنه يمكن تمثيل  $\frac{1}{1-x}$  بتسلسلة مكلورين في الفترة  $-1 \leq x < 1$

إرشاد : استنادا إلى المسألة (١١) (ب)  $R_n(x) = \frac{n(1-\theta)^{n-1} x^n}{(1-\theta x)^{n+1}}$  حيث  $0 < \theta < 1$  وعندما  $|x| < 1$

يكون  $\frac{1-\theta}{1-\theta x} < 1$  و  $1 - \theta x > 1 - |x|$ .

١٣ - (١) برهن أن  $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  لجميع قيم  $x$  وأن  $e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ . برهن أيضا أن  $(x^2+x)e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$

وأن  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$  (ب) برهن أن  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 5e$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 16e$ .



# الفصل الرابع والخمسون

## حسابات عددية باستخدام متسلسلات قوى

**جداول اللوغاريتمات** . لقد تم حساب اللوغاريتمات وغيرها بالإستمانة بمتسلسلات قوى ، وسنقترح استخدامات أخرى لهذه المتسلسلات في المسائل التالية .

وينبغي باستمرار أن يكون لدينا تقدير عن مدى صلاحية مجموع الحدود الـ  $n$  الأولى من المتسلسلة في تمثيل الدالة المفروضة لقيمة مفروضة للمتغير . وسنذكر لهذا الغرض نظريتين من فصل سابق .

١ - إذا كانت الدالة  $f(x)$  ممثلة بمتسلسلة متناوبة وكان  $x = \xi$  في فترة تقارب المتسلسلة ، فإن الخطأ الذي ينتج من استخدام مجموع قيم الحدود الـ  $n$  الأولى كقيمة تقريبية لـ  $f(\xi)$  لا يتجاوز القيمة العددية لأول حد نهمله .

٢ - أما إذا كانت الدالة  $f(x)$  ممثلة بمتسلسلة تايلور وكان  $x = \xi$  في فترة تقارب المتسلسلة . فإن الخطأ الذي ينتج من استخدام مجموع قيم الحدود الـ  $n$  الأولى كقيمة تقريبية لـ  $f(\xi)$  لا يتجاوز القيمة العددية  $M \frac{|x - a|^n}{n!}$  ، حيث  $M$  أكبر من القيمة العظمى لـ  $|f^{(n)}(x)|$  في الفترة من  $a$  إلى  $\xi$  . أو سالها .

ويكون في حالة متسلسلة ماكلورين  $a = 0$  .

## مسائل محلولة

١ - أوجد قيمة  $1/e$  خمسة أرقام عشرية صحيحة .

$$\begin{aligned} e^{-1} &= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} + \dots \\ e^{-1} &= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots \\ &= 1 - 1 + 0.500\,000 - 0.166\,667 + 0.041\,667 - 0.008\,333 + 0.001\,389 \\ &\quad - 0.000\,198 + 0.000\,025 - 0.000\,003 + \dots \\ &= 0.367\,88 \end{aligned}$$

٢ - أوجد قيمة  $\sin 62^\circ$  خمسة أرقام صحيحة .

إن متسلسلة تايلور لـ  $\sin u$  في قوى  $(x - a)$  هي :

$$\sin x = \sin a + (x - a) \cos a - \frac{(x - a)^2}{2!} \sin a - \frac{(x - a)^3}{3!} \cos a + \dots$$

فإذا أخذنا  $a = 60^\circ$  ، حيث أنها قريبة من  $62^\circ$  ودوالها المثلثة معروفة ، فإننا نجد :

$$x - a = 62^\circ - 60^\circ = 2^\circ = \pi/90 = 0.034907$$

$$\begin{aligned} \sin 62^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}(0.034907) - \frac{1}{2}\sqrt{3}(0.034907)^2 - \frac{1}{12}(0.034907)^3 + \dots \\ &= 0.866025 + 0.017454 - 0.000528 - 0.000004 + \dots = 0.88295 \end{aligned}$$

٣- أوجد قيمة  $\ln 0.97$  لسبعة أرقام عشرية صحيحة :

$$\ln(a-x) = \ln a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \dots - \frac{x^n}{na^n} - \dots$$

لنأخذ  $a = 1$  و  $x = 0.03$  فنجد :

$$\ln 0.97 = -0.03 - \frac{1}{2}(0.03)^2 - \frac{1}{3}(0.03)^3 - \frac{1}{4}(0.03)^4 - \frac{1}{5}(0.03)^5 - \dots = -0.0304592$$

٤- كم عدد الحدود التي ينبغي أن نستخدمها من مفكوك  $\ln(1+x)$  كي نتأكد من الحصول على  $\ln 1.02$  بخطأ لا يتجاوز  $0.00000005$  ؟

$$\ln 1.02 = 0.02 - \frac{(0.02)^2}{2} + \frac{(0.02)^3}{3} - \frac{(0.02)^4}{4} + \dots \quad \text{إن :}$$

وبما أن هذه المتسلسلة متناوبة فإن الخطأ الناتج عن إهمال جميع الحدود التي تلي الحدود الـ  $n$  الأولى لا يتجاوز القيمة العددية لأول حد نهمله . والمسألة هنا إذن تنحصر في إيجاد أول حد تكون قيمته العددية أقل من  $0.00000005$  ، وهذا الأمر يتم بالتجريب :

$$\frac{(0.02)^4}{4} = 0.00000004 \quad , \quad \frac{(0.02)^5}{5} = 0.000000027$$

ونحصل على الدقة المطلوبة إذا اقتصرنا على الحدود الثلاثة الأولى .

٥- لأية قيمة لـ  $x$  يمكن التمييز عن  $\sin x$  بـ  $x$  إذا كان الخطأ المسموح به  $0.0005$  ؟ .

بما أن  $\sin x = x - x^3/3! + \dots$  متسلسلة متناوبة . إذن الخطأ الناتج عن استخدام الحد الأول فقط لا يتجاوز  $|x^3|/3!$  .

وهنا يجب أن يكون  $|x^3|/3! = 0.0005$  ومنه  $|x^3| = 0.003$  . . .

$$\text{أو } |x| = 0.1442 \text{ أى } |x| < 8^\circ 15'$$

٦- ما قيمة الزاوية التي يجب استخدامها لحساب قيمة  $\cos x$  من ثلاثة حدود من متسلسلة تايلور في قوى  $(x - \pi/3)$  ، بشرط ألا يزيد الخطأ عن  $0.00005$  ؟

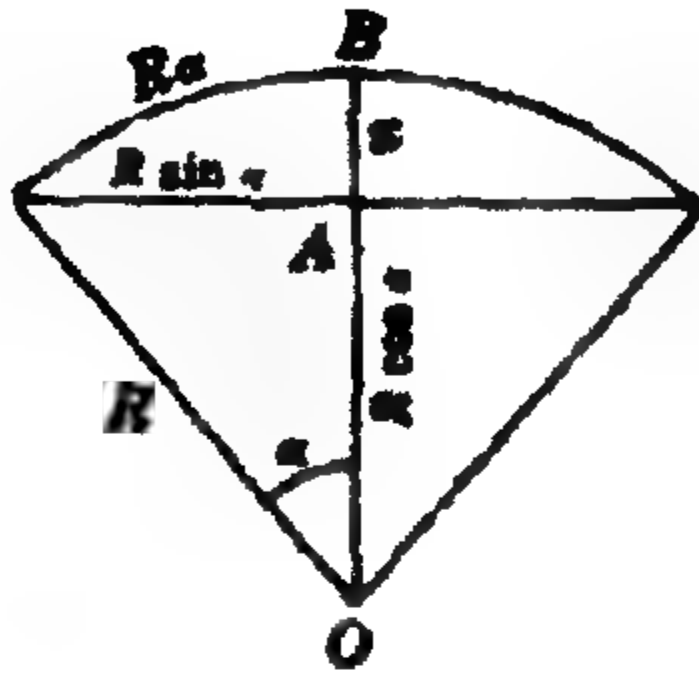
بما أن  $f'''(x) = \sin x$ ,  $|R_3| = \frac{|\sin x_0|}{3!} |x - \pi/3|^3$ , حيث  $x_0$  بين  $\pi/3$  و  $x$ .

وبما أن  $|\sin x_0| \leq 1$  و  $|R_3| \leq \frac{1}{6} |x - \pi/3|^3 = 0.00005$ .

فإن  $|x - \pi/3| \leq \sqrt[3]{0.0003} = 0.0669 = 3^\circ 50'$ . فإن  $56^\circ 16'$  و  $63^\circ 50'$ .

٧- احسب بالتقريب أقصى بعد لقوس دائرة عظمى على الكرة الأرضية طوله

160 km عن ونز.



شكل ٨ - ١

لتفرض  $x$  البعد المطلوب. فينتج من الشكل ٨ - ١ أن  $x = OB - OA = R - R \cos \alpha$ .

حيث  $R$  نصف قطر الأرض. وبما أن الزاوية  $\alpha$  صغيرة فإن  $\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2$  تقريباً، وبالتالي:

$$x = R \{1 - (1 - \frac{1}{2} \alpha^2)\} = \frac{1}{2} R \alpha^2 = (R \alpha)^2 / 2R = (80)^2 / 2R$$

وإذا أخذنا  $R = 6400$  km نجد  $x = 0.5$  km.

٨- استنتج الصيغة التقريبية  $\sin(\frac{1}{2}\pi + x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+x)$  ثم استعملها في حساب  $\sin 43^\circ$ .

بإستخدام الحدين الأولين من مفكوك تايلور نجد:

$$\begin{aligned} \sin(\frac{1}{2}\pi + x) &= \sin \frac{1}{2}\pi + x \cos \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+x) \\ \sin 43^\circ &= \sin[\frac{1}{2}\pi + (-\pi/90)] = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1-0.0349) = 0.6824 \end{aligned}$$

٩- حل المعادلة  $\cos x - 2x^2 = 0$

لنستبدل بـ  $\cos x$  الحدين الأولين  $1 - \frac{1}{2}x^2$  من مفكوك ماكلورين لـ  $\cos x$  فيكون:

$$2 - 5x^2 = 0 \quad \text{أو} \quad 1 - \frac{1}{2}x^2 - 2x^2 = 0$$

والجذران  $\pm 0.632$ .  $\pm \sqrt{10}/5$ . أما إذا استخدمنا طريقة نيوتن فإنها تعطى الجذران  $\pm 0.635$ .

١٠- استخدم مفكوك سلاسل القوى لحسب  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2x^3/3! + \dots}{x - x^3/3! + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + x^2/3 + \dots}{1 - x^2/6 + \dots} = 2 \end{aligned}$$

١١ - أوجد مفكوك  $f(x) = x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 60x + 14$  في متسلسلة قوى في  $(x-3)$  ثم احسب  $\int_1^{2.2} f(x) dx$ .

إن :  $f(3) = 5, f'(3) = 9, f''(3) = -4, f'''(3) = 6, f^{(4)}(3) = 24$ .

وبالتالي :  $f(x) = 5 + 9(x-3) - 2(x-3)^2 + (x-3)^3 + (x-3)^4$   
 $\int_1^{2.2} f(x) dx = 5x + \frac{9}{2}(x-3)^2 - \frac{2}{3}(x-3)^3 + \frac{1}{4}(x-3)^4 + \frac{1}{5}(x-3)^5 \Big|_1^{2.2} = 1.185$   
 ١٢ - احسب قيمة  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ .

إن الصعوبة هنا تكمن في عدم إمكانية التعبير عن  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  بدوال ابتدائية . ومع هذا فإن :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) dx = \int_0^1 \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \Big|_0^1 = 0.946083$$

والخطأ الناتج عن استخدام الحدود الأربعة الأولى أقل من  $\frac{1}{9.9!}$  أي أقل من 0.000 0003 .

### مسائل إضافية

١٣ - احسب لأربعة أرقام عشرية : ( أ )  $e^{-1} = 0.1353$  ، ( ب )  $\sin 82^\circ = 0.5299$  ،  
 ( ج )  $\cos 36^\circ = 0.8090$  ، ( د )  $\tan 91^\circ = 0.6009$  .

١٤ - إلى أي مدى لـ  $x$  يمكن :

( أ ) استبدال  $\cos x$  بـ  $1 - \frac{1}{2}x^2$  إذا كان الخطأ المسموح به 0.0005 ؟

( ب ) استبدال  $\sin x$  بـ  $x - \frac{x^3}{6}$  إذا كان الخطأ المسموح به 0.0005 ؟

( ج ) استبدال  $\tan x$  بـ  $x + \frac{1}{3}x^3$  إذا كان الخطأ المسموح به 0.000 05 ؟

ج : ( أ )  $|x| < 0.1$  ، ( ب )  $|x| < 18^\circ 57'$  ، ( ج )  $|x| < 47^\circ$  .

١٥ - استخدم مفكوك متسلسلات القوى لتحسب قيمة :

( أ )  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{\sinh x - \sin x} = \dots$  ، ( ب )  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^2} = \frac{1}{6}$  ، ( ج )  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x^2} = \frac{1}{2}e$  .

١٦ - احسب القيم

( أ )  $\int_0^{\pi/2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi = 1.854$  ، ( ب )  $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx = 0.76355$  ، ( ج )  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 0.4940$  .

١٧ - أوجد طول المنحنى  $y = x^3/3$  من  $x = 0$  إلى  $x = 0.5$  ج : 0.5031

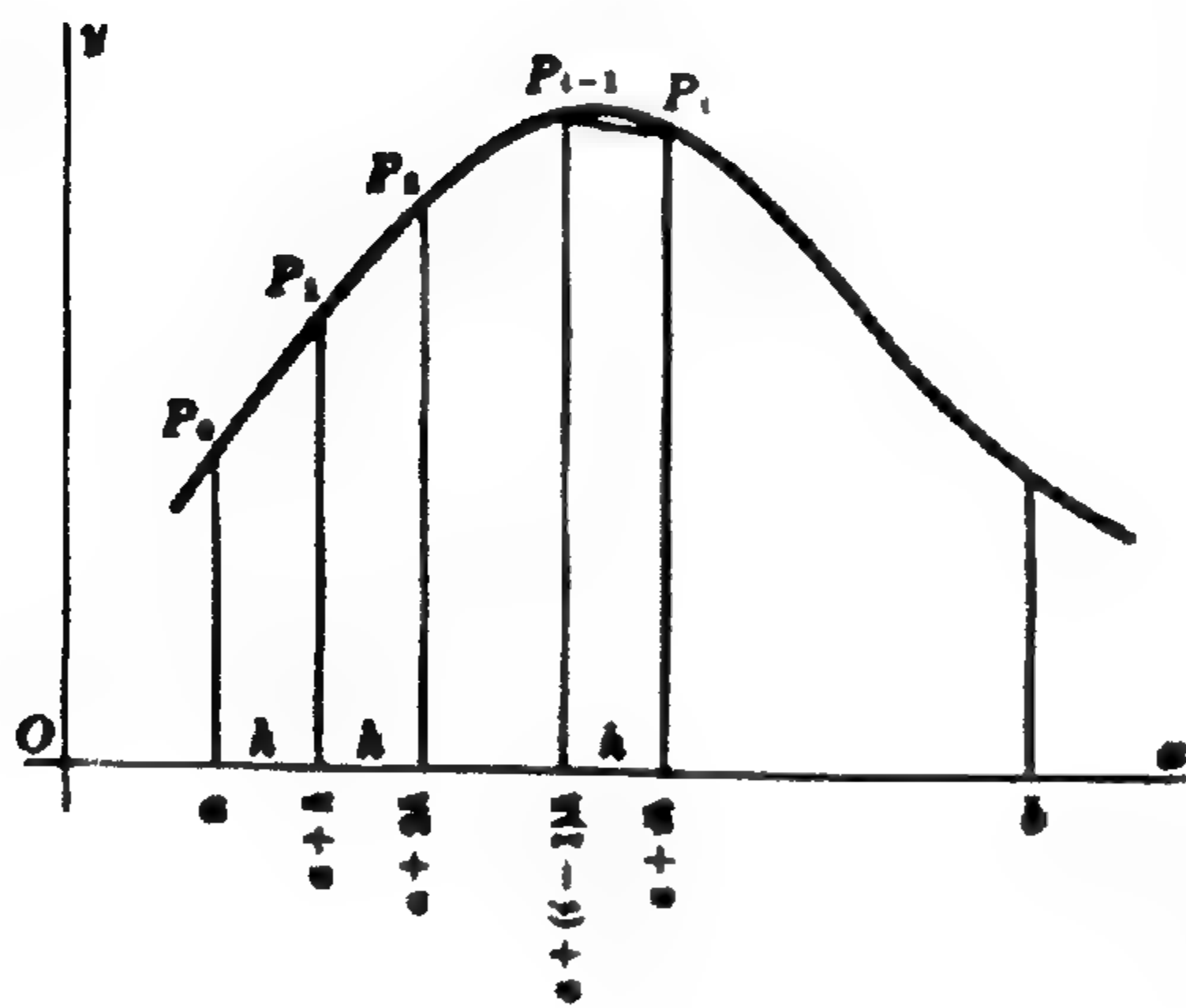
١٨ - أوجد المساحة الواقعة تحت المنحنى  $y = \sin x^2$  من  $x = 0$  إلى  $x = 1$  ج : 0.3103

# الفصل الخامس والخمسون

## القيمة التقريبية للتكامل

يمكن الحصول على القيمة التقريبية لـ  $\int_a^b f(x) dx$  باستخدام صيغ معينة أو بالتكاملات الميكانيكية . وتبرز ضرورة حساب قيمة التكامل التقريبية عندما يكون من الصعب إجراء التكامل بالطرق العادية ، أو عندما يتعذر التعبير عن التكامل غير المحدد بدوال ابتدائية أو عندما تعرف دالة التكامل بمجول لقيم عديدة .

ولقد حصلنا في الفصل ٣٤ على تقريب لـ  $\int_a^b f(x) dx$  بالمجموع  $S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$  والحصول على  $S_n$  فرضنا التكامل المحدود على أنه مساحة سطح وقسمنا هذا السطح إلى  $n$  شريحة وقربنا كل شريحة بمسطيل ثم جئنا مساحات المسطيلات المقربة . وفيما يلي سنذكر بعض الصيغ التي لا تختلف عن بعضها إلا بطريقة تقريب مساحات الشرائح .



شكل ٥٥ - ١

**قاعدة شبه المنحرف .** لتكن المساحة محددة من أجل بالمنحنى  $y = f(x)$  ومن أسفل بالهوار  $x$  ، ومن الجانبين بالمستقيمين  $x = a$  ،  $x = b$  ، ولنقسم هذه المساحة إلى  $n$  شريحة عرض كل منها  $h = (b-a)/n$  كما هو موضح في الشكل ٥٥ - ١ . لنظر في الشريحة الـ  $i$  المحددة من أعلى بالقوس  $P_{i-1} P_i$  من المنحنى  $y = f(x)$  ، وكعتقريب لمساحة هذه الشريحة نأخذ .

$$\frac{h}{2} \{f[a + (i-1)h] + f(a + ih)\}$$

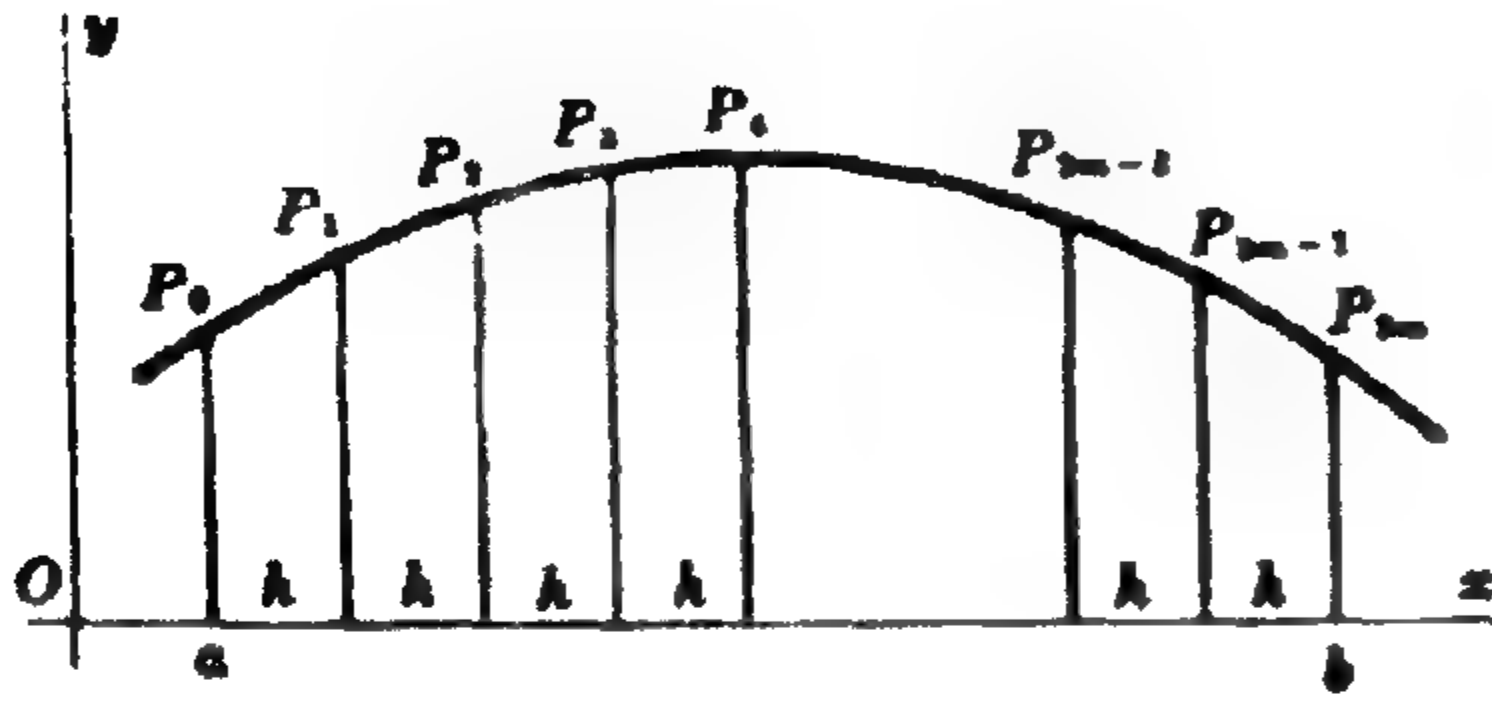
ومساحة شبه المنحرف نحصل عليها باعتبار الخط المستقيم  $P_{i-1} P_i$  بدلا من القوس  $P_{i-1} P_i$  . وإذا قربنا كل شريحة بنفس الطريقة فإننا نجد ( حيث يقرأ الرمز  $\approx$  يساوي تقريبا ) .

$$\int_a^b f(x) dx \sim \frac{h}{2} \{f(a) + f(a+h)\} + \frac{h}{2} \{f(a+h) + f(a+2h)\} + \dots + \frac{h}{2} \{f[a + (n-1)h] + f(b)\}$$

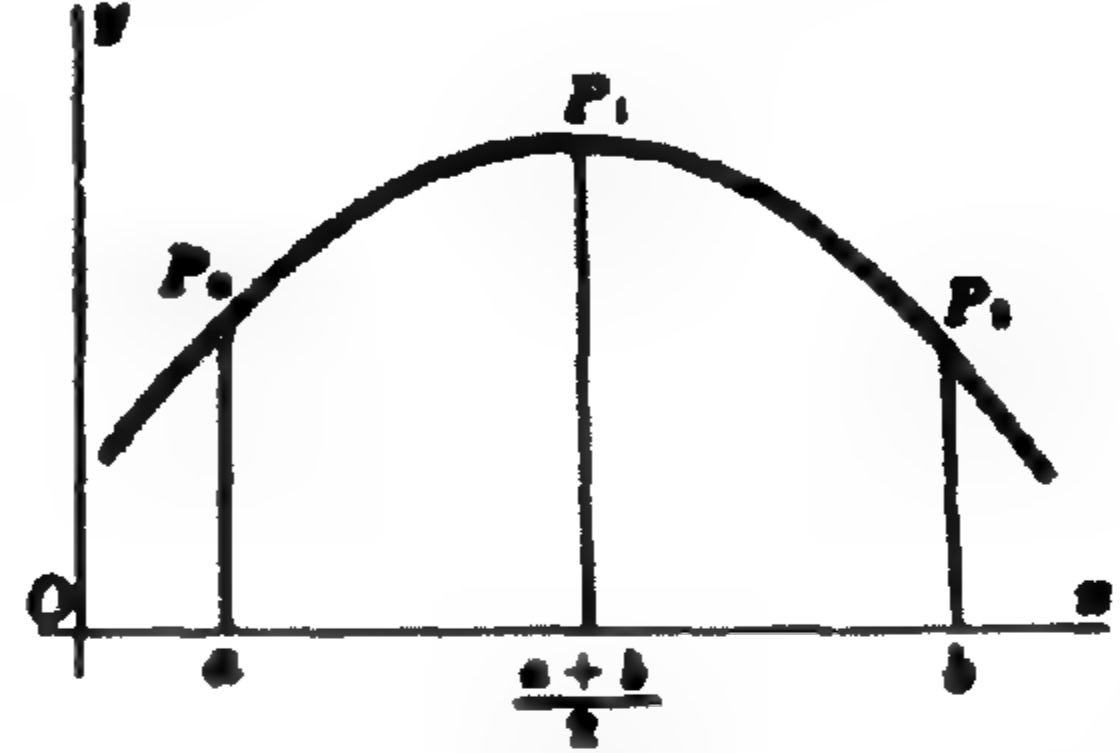
$$\int_a^b f(x) dx \sim \frac{h}{2} \{f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f[a + (n-1)h] + f(b)\} \quad (1) \text{ أو}$$

**قاعدة شبه المنشور.** إذا ضلعت المساحة المرفقة بـ  $\int_a^b f(x)dx$  إلى شريحتين عموديتين عرض كل منهما  $h = 1/2(b-a)$ . وإذا استبدلنا القوس  $P_0, P_1, P_2$  لمنحنى  $y = f(x)$  بقوس القطع المكافئ  $y = Ax^2 + Bx + C$  الذي يمر بالنقط  $P_0, P_1, P_2$  كما في الشكل ٢-٥٥. فإننا نحصل بعد إجراء بعض التغيرات في رموز نتيجة المسألة (١) على :

$$\int_a^b f(x) dx \sim \frac{h}{3} \left\{ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} \quad (٢)$$



شكل ٢-٥٥



شكل ٢-٥٥

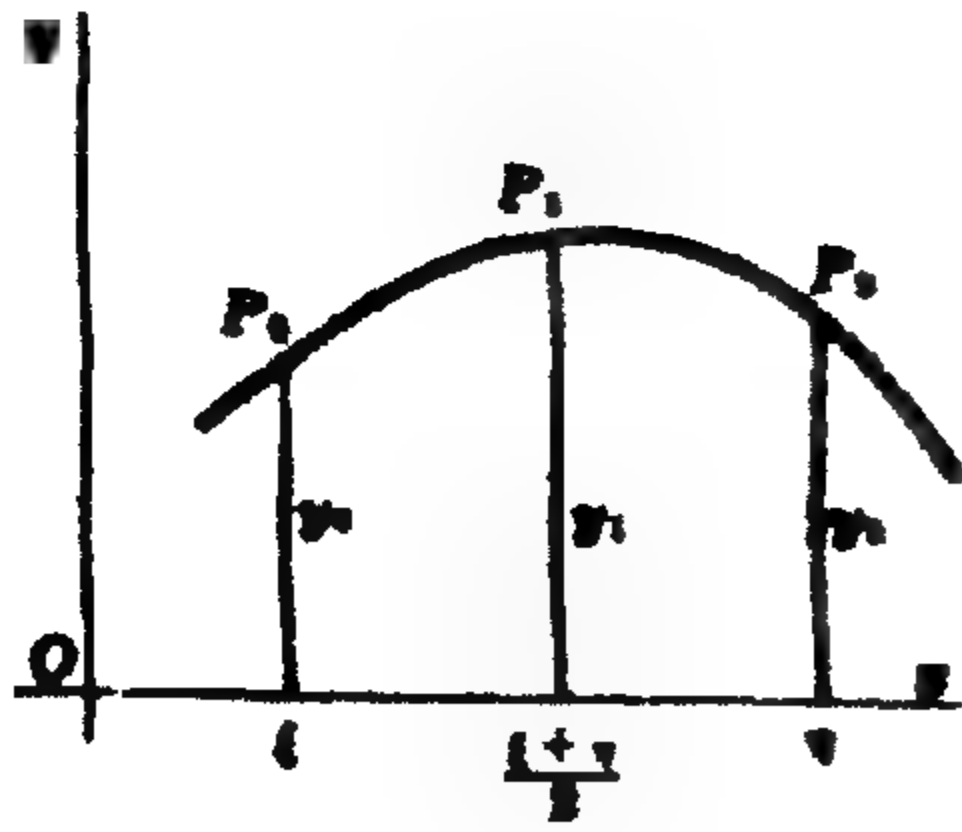
**قاعدة سمبسون.** لنفرض أن الطح المراد حساب مساحته قد قسم إلى  $n = 2m$  شريحة عرض كل منها  $h = (b-a)/n$  كما هو مبين بالشكل ٢-٥٥. وباستخدام قاعدة شبه المنشور لتقريب المساحة الواقعة تحت كل قوس من الأقواس :

نجد  $P_0P_1P_2, P_2P_3P_4, \dots, P_{2m-2}P_{2m-1}P_{2m},$

$$\int_a^b f(x) dx \sim \frac{h}{3} \{ f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \dots + 2f[a+(2m-2)h] + 4f[a+(2m-1)h] + f(b) \}$$

**طريقة مفكوك متسلسلات القوى.** وتتلخص هذه الطريقة في أن نستبدل بدالة التكامل  $f(x)$  الحدود الـ  $n$  الأول من متسلسلة ماكلاورين أو متسلسلة تايلور الموافقة لها. وتكون هذه الطريقة ناجحة إذا أمكن فك دالة التكامل وكان حدا التكامل ضمن فترة تقارب المتسلسلة (أنظر الفصل ٥٤).

### مسائل محلولة



شكل ١-٥٥

١- لقطع المكافئ  $y = Ax^2 + Bx + C$  الذي يمر بالنقط :

كما هو مبين في  $P_0(\xi, y_0), P_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, y_1\right), P_2(\eta, y_2).$

الشكل ١-٥٥ برهن أن :

$$\int_{\xi}^{\eta} y dx = \frac{\eta-\xi}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

$$\int_{\xi}^{\eta} y dx = \int_{\xi}^{\eta} (Ax^2 + Bx + C) dx \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{\eta-\xi}{3} [A(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) + \frac{1}{2}B(\xi + \eta) + 3C].$$



ولكن بما أن  $y = Ax^3 + Bx + C$  يمر بالنقط  $P_0, P_1, P_2$  فإنه يكون :

$$y_0 = A\xi^3 + B\xi + C$$

$$y_1 = A\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^3 + B\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) + C$$

$$y_2 = A\eta^3 + B\eta + C$$

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2[A(\xi^3 + \xi\eta + \eta^3) + \frac{3}{2}B(\xi + \eta) + 3C] \quad \text{و}$$

$$\int_{\xi}^{\eta} y dx = \frac{\eta - \xi}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad \text{إذن :}$$

٢- احسب القيمة التقريبية للتكامل  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2}$  بكل من الطرق الأربع ثم تحقق من الأجوبة بالتكامل .

قاعدة شبه المنحرف : بأخذ  $n = 5$

فإن :  $h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{5} = 0.1$  ، ومنه  $a = 0, a + h = 0.1, a + 2h = 0.2, a + 3h = 0.3, a + 4h = 0.4, b = 0.5$  .

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} &\sim \frac{0.1}{2} [f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + 2f(0.3) + 2f(0.4) + f(0.5)] \\ &\sim \frac{1}{20} \left( 1 + \frac{2}{1.01} + \frac{2}{1.04} + \frac{2}{1.09} + \frac{2}{1.16} + \frac{1}{1.25} \right) = 0.4631 \end{aligned}$$

قاعدة شبه المنحرف :

إن :  $h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{2} = \frac{1}{4}$  ، ومنه  $f(a) = f(0) = 1, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{17}, f(b) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$  .

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{64}{17} + \frac{4}{5} \right) = \frac{1}{12} (1 + 3.76471 + 0.8) = 0.4637$$

قاعدة سمبسون : بأخذ  $n = 4$

فإن :  $h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{4} = \frac{1}{8}$  ، ومنه  $a = 0, a + h = \frac{1}{8}, a + 2h = \frac{1}{4}, a + 3h = \frac{3}{8}, b = \frac{1}{2}$  .

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} &\sim \frac{1}{24} \left( 1 + 4 \frac{1}{1+(\frac{1}{8})^2} + 2 \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + 4 \frac{1}{1+(\frac{3}{8})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} \right) \\ &\sim \frac{1}{24} \left( 1 + \frac{256}{65} + \frac{32}{17} + \frac{256}{73} + \frac{4}{5} \right) = 0.4637 \end{aligned}$$

طريقة متسلسلات القوى : باستخدام متسلسلة حدود

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} &\sim \int_0^{1/2} (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12}) dx = \left[ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} \right]_0^{1/2} \\ &\sim \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 2^{13}} \end{aligned}$$

نجد أن :

$$\sim 0.50000 - 0.04167 + 0.00625 - 0.00112 + 0.00022 - 0.00004 + 0.00001 = 0.4636$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^{1/2} = \arctan \frac{1}{2} = 0.4636 \quad \text{وبالتكامل}$$

٣ - احسب مساحة السطح الواقعة تحت المنحنى  $y = e^{-x^2}$  وفوق المحور  $x$  وبين المستقيمين  $x = 0$  و  $x = 1$  مستخدماً :

(أ) قاعدة سمبسون وأخذ  $n = 4$  ، (ب) طريقة مثلثات القوى .

(أ) أن  $h = \frac{1}{4}$ ;  $a = 0$ ,  $a + h = \frac{1}{4}$ ,  $a + 2h = \frac{1}{2}$ ,  $a + 3h = \frac{3}{4}$ ,  $b = 1$ .

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{9} (1 + 4e^{-1/16} + 2e^{-1/4} + 4e^{-9/16} + e^{-1})$$

$$\approx \frac{1}{9} \{1 + 4(0.9399) + 2(0.7788) + 4(0.5701) + 0.3679\} = 0.747 \text{ square units}$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!}\right) dx \quad (\text{ب})$$

$$\approx \left[ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} \right]_0^1$$

$$\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} + \frac{1}{13 \cdot 6!}$$

$$\approx 1 - 0.3333 + 0.1 - 0.0238 + 0.0046 - 0.0008 + 0.0001 = 0.747 \text{ square units}$$

٤ - تقع قطعة أرض بين نهر من جهة وسياح (حاجز) مستقيم من جهة أخرى . فإذا فرضنا أن عرض قطعة الأرض  $y$  على بعد  $x$  m من أحد طرفي السياج يعطى بالجدول التالي :

$x$	0	20	40	60	80	100	120
$y$	0	22	41	53	38	17	0

أوجد القيمة التقريبية لمساحة قطعة الأرض باستخدام قاعدة سمبسون .

$$\int_0^{120} f(x) dx \approx \frac{20}{3} (0 + 4 \cdot 22 + 2 \cdot 41 + 4 \cdot 53 + 2 \cdot 38 + 4 \cdot 17 + 0) \quad \text{هنا } h = 20$$

$$\approx 3507 \text{ m}^2$$

٥ - يعطى منحنى بالأزواج التالية من الإحداثيات القائمة .

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y$	0	0.6	0.9	1.2	1.4	1.5	1.7	1.8	2

(أ) احسب القيمة التقريبية لمساحة السطح الواقع تحت المنحنى وفوق المحور  $x$  وبين المستقيمين  $x = 1$  و  $x = 9$  مستخدماً قاعدة سمبسون .

(ب) احسب القيمة التقريبية للحجم الناشئ عن دوران السطح السابق حول المحور  $x$  باستخدام قاعدة سمبسون .

(أ) هنا  $h = 1$  و

$$\int_1^9 y dx \approx \frac{1}{3} \{0 + 4(0.6) + 2(0.9) + 4(1.2) + 2(1.4) + 4(1.5) + 2(1.7) + 4(1.8) + 2\}$$

$$= 10.13 \text{ square units}$$

$$\pi \int_1^9 y^2 dx \approx \frac{\pi}{3} \{0 + 4(0.6)^2 + 2(0.9)^2 + 4(1.2)^2 + 2(1.4)^2 + 4(1.5)^2 + 2(1.7)^2 + 4(1.8)^2 + 4\} \quad (\text{ب})$$

$$= 46.68 \text{ cubic units}$$

### مسائل اختيارية

٦ - استنتج قاعدة سمبسون

٧ - احسب القيمة التقريبية لـ  $\int_2^{10} \frac{dx}{x}$  مستخدماً (أ) قاعدة شبه المنحرف حيث  $n = 4$  (ب) قاعدة المنشور .

(ج) قاعدة سمبسون حيث  $n = 4$  . تحقق من النتائج عن طريق التكامل .

ج : (أ) 1.117, (ب) 1.111, (ج) 1.099; 1.100

٨ - احسب القيمة التقريبية لـ  $\int_0^3 \sqrt{35+x} dx$  كافي المسألة ٧ .

ج : (أ) 24.854, (ب) 24.655, (ج) 24.655; 24.655

٩ - احسب القيمة التقريبية لـ  $\int_0^3 \ln x dx$  مستخدماً (أ) قاعدة شبه المنحرف حيث  $n = 5$  و (ب) قاعدة سمبسون

حيث  $n = 8$  ، تحقق من النتائج عن طريق التكامل .

ج : (أ) 1.2870, (ب) 1.2958; 1.2958

١٠ - احسب القيمة التقريبية لـ  $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$  مستخدماً (أ) قاعدة شبه المنحرف حيث  $n = 5$  و (ب) قاعدة سمبسون

حيث  $n = 4$  .

ج : (أ) 1.115, (ب) 1.111

١١ - احسب القيمة التقريبية لـ  $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$  باستخدام قاعدة سمبسون حيث  $n = 6$  .

ج : 1.852

١٢ - استخدم قاعدة سمبسون لحساب (أ) مساحة السطح الواقع تحت المنحنى .

(ب) الحجم الناتج من دوران السطح حول المحور مستخدماً البيانات الآتية :

$x$	1	2	3	4	5
$y$	1.8	4.2	7.8	9.2	12.3

ج : (أ) 27.8, (ب)  $228.44\pi$

## الفصل السادس والخمسون

### المشتقات الجزئية

**الدوال متعددة المتغيرات :** إذا أخذنا بكل نقطة  $(x, y)$  من جزء (منطقة) من المستوى  $xy$  عدداً حقيقياً  $z$  ، فإننا نقول عن  $z$  إنها دالة  $z = f(x, y)$  للمتغيرين المستقلين  $x, y$  ، والمحل الهندسي لجميع النقاط  $(x, y, z)$  التي تحقق العلاقة  $z = f(x, y)$  هو سطح في الفراغ العادي . ويمكن بشكل مماثل تعريف دوال  $w = f(x, y, z, \dots)$  بعدة متغيرات وإن لم تكن هناك صورة هندسية متوفرة .

وفيما يتعلق بحساب التفاضل والتكامل فإن هناك عدة فروق بين حالة متغير واحد وحالة متغيرين ، في الوقت الذي لا يختلف فيه حساب التفاضل والتكامل للدوال في ثلاثة متغيرات أو أكثر عن الدوال لمتغيرين إلا بقدر يسير . ولذا فإننا سنقتصر الدراسة هنا ، بشكل رئيسي ، على الدوال في متغيرين اثنين .

نقول عن دالة  $f(x, y)$  إنها ذات نهاية  $A$  عندما  $x \rightarrow x_0$  و  $y \rightarrow y_0$  إذا وجد لكل عدد موجب مفروض  $\epsilon$  ، مهما كان صغيراً ، عدد  $\delta > 0$  بحيث يتحقق لجميع قيم  $(x, y)$  الشرط :

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad (i)$$

إذن  $|f(x, y) - A| < \epsilon$  . تعرف (i) هنا جواراً محفوفاً لـ  $(x_0, y_0)$  . أي أنها جميع النقاط الواقعة داخل دائرة نصف قطرها  $\delta$  ومركزها  $(x_0, y_0)$  باستثناء المركز نفسه .

نقول عن دالة  $f(x, y)$  إنها متصلة عند  $(x_0, y_0)$  إذا كانت الدالة  $f(x_0, y_0)$  معرفة وكان  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$  .

أنظر المآتين ١ - ٢

**المشتقات الجزئية :** لتكن  $z = f(x, y)$  دالة في المتغيرين المستقلين  $x, y$  . ربما أن  $x$  و  $y$  مستقلان فإنه يمكننا أن (i) نسح لـ  $x$  أن تتغير ونترك  $y$  ثابتة أو أن (ii) نسح لـ  $y$  أن تتغير ونترك  $x$  ثابتة أو أن (iii) نسح لـ  $x$  و  $y$  أن تتغيرا في آن واحد . وفي كل من الحالتين الأولى والثانية تكون  $z$  في الواقع دالة لمتغير واحد ويمكن اشتقاقها استناداً إلى القواعد المعتادة .

وإذا تغير  $x$  مع بقاء  $y$  ثابتة فنستدل تكون  $z$  دالة في  $x$  ومشتقتها بالنسبة لـ  $x$  هي :

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

ونسى المشتقة الجزئية ( الأولى ) لـ  $z = f(x, y)$  بالنسبة لـ  $x$  .

أما إذا تغيرت  $y$  مع بقاء  $x$  ثابتة فإن  $z$  دالة في  $y$  . ومشتقتها بالنسبة لـ  $y$  هي :

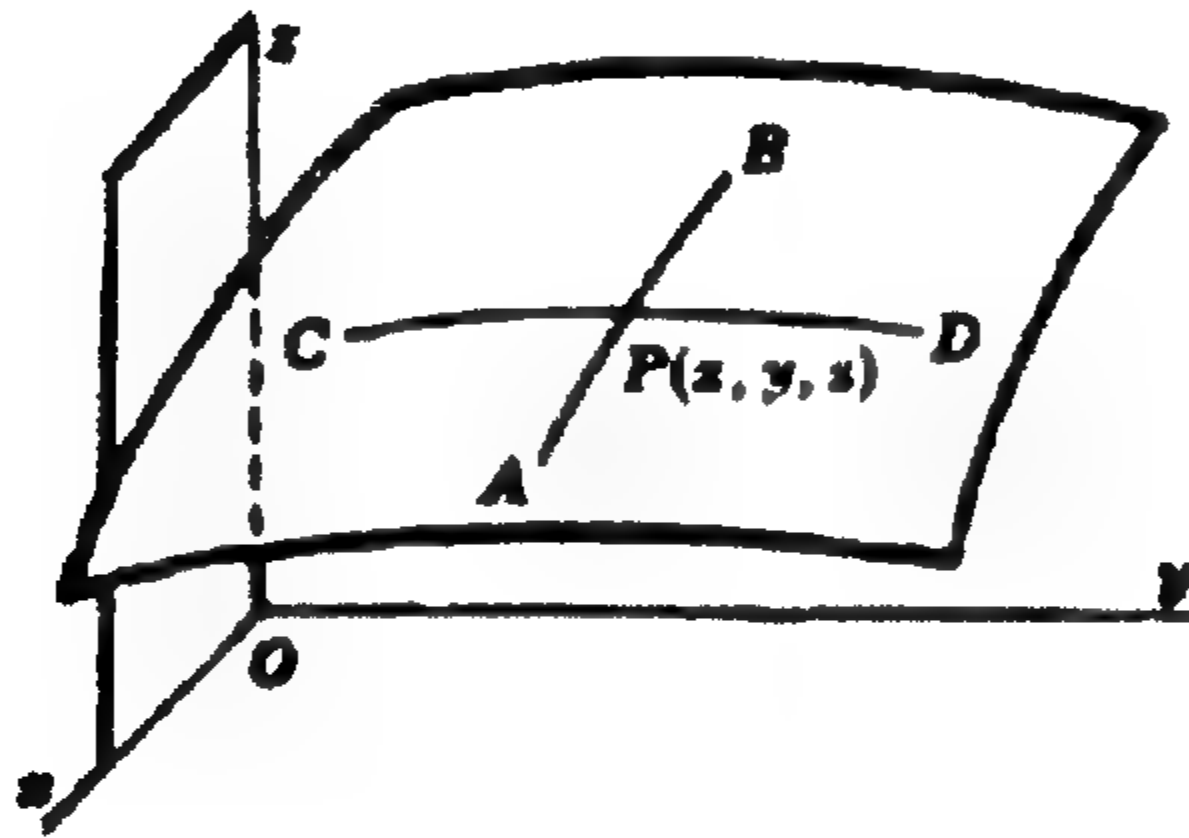
$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

وتسمى المشتقة الجزئية (الأولى) لـ  $z = f(x, y)$  بالنسبة لـ  $y$

أنظر المسائل ٣ - ٨

وإذا كانت  $z$  معرفة بشكل صغى (غير ظاهر) كدالة في  $x$  و  $y$  ، بالعلامة  $F(x, y, z) = 0$  فإنه يمكن إيجاد المشتقتين الجزئيتين  $\frac{\partial z}{\partial x}$  و  $\frac{\partial z}{\partial y}$  باستخدام قاعدة الاشتقاق الضمني التي دُرست في الفصل السادس .

أنظر المسائل ٩ - ١٢



شكل ٥٦ - ١

والمشتقة الجزئية التي عرفناها توضيح هتسنى بسيط . باعتبار السطح  $z = f(x, y)$  المبين بالشكل ٥٦ - ١ وبفرض  $APB$  و  $CPD$  مقطعي السطح بالمستويين المارين بـ  $P$  والموازيين لـ  $yOz$  و  $xOz$  على الترتيب . فإذا جعلنا  $x$  تتغير وتركنا  $y$  ثابتة فإن  $P$  تتحرك على المنحنى  $APB$  وتكون قيمة  $\frac{\partial z}{\partial x}$  عند  $P$  ميل المنحنى  $APB$  عند  $P$  .

وبشكل مماثل إذا جعلنا  $y$  تتغير وتركنا  $x$  ثابتة فإن  $P$  تتحرك على المنحنى  $CPD$  وتكون قيمة  $\frac{\partial z}{\partial y}$  عند  $P$  ميل المنحنى  $CPD$  عند  $P$  .

أنظر المألة ١٣

**التفاضلات الجزئية ذات الرتب العليا** . يمكن أيضاً اشتقاق المشتقة الجزئية لـ  $z = f(x, y)$  جزئياً بالنسبة لـ  $x$  وبالنسبة لـ  $y$  فنحصل على المشتقات الجزئية الثانية  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)$  و  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)$  ويمكن ، بشكل مماثل ، الحصول من  $\frac{\partial z}{\partial y}$  على

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \text{ و } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

إذا كانت الدالة  $z = f(x, y)$  ومشتقاتها الجزئية متصلة فإن ترتيب عملية الاشتقاق ليس بنى بال ، أي أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} .$$

أنظر المائلتين ١٤ - ١٥

### مسائل محلولة

١ - ناقش اتصال  $z = x^2 + y^2$ .

لأي فئة محددة القيمة  $(x, y) = (a, b)$  يكون  $z = a^2 + b^2$ .

وعندما  $x \rightarrow a$  و  $y \rightarrow b$  فإن  $x^2 + y^2 \rightarrow a^2 + b^2$ .

والدالة متصلة في كل موضع.

٢ - إن الدالتين التاليتين متصلتان في كل موضع باستثناء نقطة الأصل  $(0, 0)$ . حيث أنهما غير معرفتين هناك. فهل يمكن جعلهما متصلتين هناك.

$$z = \frac{\sin(x+y)}{x+y}. \quad (1)$$

لنجعل  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  على المستقيم  $y = mx$  فنجد  $z = \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \frac{\sin(1+m)x}{(1+m)x} \rightarrow 1$ . لذا يمكن جعل الدالة متصلة في كل موضع إذا عدلنا تعريفها على النحو التالي.  $z = 1, (x, y) = (0, 0)$ ;  $z = \frac{\sin(x+y)}{x+y}, (x, y) \neq (0, 0)$ .

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}. \quad (ب)$$

لنجعل  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  على المستقيم  $y = mx$  فنجد أن  $z = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{mx}{1+m^2}$  تعتمد على المستقيم الذي نختاره. ولذا لا يمكن جعل الدالة المفروضة متصلة عند  $(0, 0)$ .

أوجد في كل من المسائل ٢ - ٧ المشتقة الجزئية الأولى :

$$z = 2x^2 - 3xy + 4y^2. \quad - ٣$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y. \quad \text{لنعتبر } y \text{ ثابتاً ولنشتق بالنسبة إلى } x \text{ فنجد :}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 8y. \quad \text{لنعتبر } x \text{ ثابتاً ولنشتق بالنسبة إلى } y \text{ فنجد :}$$

$$z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}. \quad - ٤$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2}. \quad \text{لنعتبر } y \text{ ثابتاً ولنشتق بالنسبة إلى } x \text{ فنجد :}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{2y}{x}. \quad \text{لنعتبر } x \text{ ثابتاً ولنشتق بالنسبة إلى } y \text{ فنجد :}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cos(2x + 3y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3 \cos(2x + 3y) \quad z = \sin(2x + 3y). \quad - ٥$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{1+x^2y^2} + \frac{y^2}{1+x^2y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{1+x^2y^2} + \frac{2xy}{1+x^2y^2} \quad z = \arctan x^2y + \arctan xy^2. \quad - ٦$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(2x+y) = z(2x+y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2}(x) = xz \quad z = e^{x^2+y^2}. \quad - ٧$$



٨ - تعطى مساحة مثلث بـ  $K = \frac{1}{2} ab \sin C$  . فإذا كان  $a = 20, b = 30, C = 30^\circ$  فأوجد :

(أ) معدل تغير  $K$  بالنسبة إلى  $a$  باعتبار  $b$  و  $C$  ثابتين .

(ب) معدل تغير  $K$  بالنسبة إلى  $C$  باعتبار  $a$  و  $b$  ثابتين .

(ج) معدل تغير  $b$  بالنسبة إلى  $a$  باعتبار  $K$  و  $C$  ثابتين .

$$\frac{\partial K}{\partial a} = \frac{1}{2} b \sin C = \frac{1}{2} (30) (\sin 30^\circ) = \frac{15}{2} \quad (أ)$$

$$\frac{\partial K}{\partial C} = \frac{1}{2} ab \cos C = \frac{1}{2} (20)(30)(\cos 30^\circ) = 150\sqrt{3} \quad (ب)$$

$$b = \frac{2K}{a \sin C}; \quad \frac{\partial b}{\partial a} = -\frac{2K}{a^2 \sin C} = -\frac{2(\frac{1}{2} ab \sin C)}{a^2 \sin C} = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \quad (ج)$$

أوجد في المسائل ٩ - ١١ المشتقة الجزئية الأولى لـ  $z$  بالنسبة إلى كل من المتغيرين المستقلين  $x$  و  $y$  .

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25. \quad - ٩$$

حل أول : لنحل المعادلة بالنسبة لـ  $z$  فنجد  $z = \pm \sqrt{25 - x^2 - y^2}$  . إذن :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\pm \sqrt{25 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\pm \sqrt{25 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z}$$

حل ثان : لنشتق ضمناً بالنسبة لـ  $x$  معتبرين  $y$  ثابتاً فنجد :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \quad \text{ومن} \quad 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

ثم نشتق ضمناً بالنسبة لـ  $y$  معتبرين  $x$  ثابتاً فنجد :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} \quad \text{ومن} \quad 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$x^2(2y + 3z) + y^2(3x - 4z) + z^2(x - 2y) = xyz. \quad - ١٠$$

إن طريقة الحل الأولى في المسألة ٩ غير مناسبة هنا :

لذلك نشتق ضمناً بالنسبة إلى  $x$  فنجد :

$$2x(2y + 3z) + 3x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 3y^2 - 4y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2z(x - 2y) \frac{\partial z}{\partial x} + z^2 = yz + xy \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4xy + 6xz + 3y^2 + z^2 - yz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy} \quad \text{ومن}$$

ثم نشتق ضمناً بالنسبة إلى  $y$  فنجد :

$$2x^2 + 3x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2y(3x - 4z) - 4y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2z(x - 2y) \frac{\partial z}{\partial y} - 2z^2 = xz + xy \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2 + 6xy - 8yz - 2z^2 - xz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy}$$

$$xy + yz + zx = 1. \quad - ١١$$

نشتق ضمناً بالنسبة إلى  $x$  فنجد  $y + y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial x} + z = 0$  و  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}$ .

ثم نشتق ضمناً بالنسبة إلى  $y$  فنجد  $z + y \frac{\partial z}{\partial y} + z + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  و  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}$ .

١٧ - إذا كان  $x = e^{2r} \cos \theta, y = e^{2r} \sin \theta$  . أوجد باعتبار  $x$  و  $y$  متغيرين مستقلين كلا من  $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$

لنشتق العلاقتين جزئياً بالنسبة إلى  $x$  فنجد :

$$0 = 2e^{2r} \sin \theta \frac{\partial r}{\partial x} + e^{2r} \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{و} \quad 1 = 2e^{2r} \cos \theta \frac{\partial r}{\partial x} - e^{2r} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

وبحل هاتين المعادلتين آنياً نجد  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos \theta}{e^{2r}(2 + \sin^2 \theta)}$  ,  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{2 \sin \theta}{e^{2r}(2 + \sin^2 \theta)}$  ,

ثم نشتق العلاقتين المفروضتين ضمناً بالنسبة إلى  $y$  فنجد :

$$1 = 2e^{2r} \sin \theta \frac{\partial r}{\partial y} + e^{2r} \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{و} \quad 0 = 2e^{2r} \cos \theta \frac{\partial r}{\partial y} - e^{2r} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

وبحل هاتين المعادلتين آنياً نحصل على  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\sin \theta}{e^{2r}(2 + \sin^2 \theta)}$  ,  $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{2 \cos \theta}{e^{2r}(2 + \sin^2 \theta)}$  .

١٢ - أوجد ميل كل من المنحنيين الذين نحصل عليهما من تقاطع السطح  $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$  مع المستويين المارين بالنقطة  $(1, 1, 1)$  والموازيين للمستويين  $xOz$  و  $yOz$  .

إن المستوى  $x=1$  الموازي للمستوى  $yOz$  يقطع السطح في المنحنى  $z = 4y^2 - 3, x=1$  ، وعلى هذا فإن  $\frac{\partial z}{\partial y} = 8y = 8 \cdot 1 = 8$  هو الميل المطلوب .

إن المستوى  $y=1$  الموازي للمستوى  $xOz$  يقطع السطح في المنحنى  $z = 3x^2 - 2, y=1$  ، وعلى هذا فإن  $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x = 6$  هو الميل المطلوب الآخر .

أوجد في كل من المسائلتين ١٤ - ١٥ جميع المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة لـ  $z$  .

$$z = x^2 + 3xy + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 3 \quad - ١٤$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 2$$

$$z = x \cos y - y \cos x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + y \sin x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x \sin y - \cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = y \cos x - ١٥$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = -\sin y + \sin x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = -x \cos y$$

### مسائل إضافية

١٦ - ادرس كلا من الدوال التالية لتبين فيما إذا كان من الممكن جعلها متصلة عند (0,0).

$$(أ) \frac{y^2}{x^2+y^2}, (ب) \frac{x-y}{x+y}, (ج) \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, (د) \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

ج : (أ) لا ، (ب) لا ، (ج) نعم ، (د) لا .

١٧ - أوجد  $\frac{\partial z}{\partial x}$  و  $\frac{\partial z}{\partial y}$  لكل من الدوال التالية :

$$(أ) z = x^2 + 3xy + y^2 : \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y : \quad ج$$

$$(ب) z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} : \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3} - \frac{1}{x^2} : \quad ج$$

$$(ج) z = \sin 3x \cos 4y : \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 3 \cos 3x \cos 4y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4 \sin 3x \sin 4y : \quad ج$$

$$(د) z = \arctan \frac{y}{x} : \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} : \quad ج$$

$$(هـ) x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36 : \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{9z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y}{9z} : \quad ج$$

$$(و) x^2 - 5x^2y + 6xy^2 = 0 : \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y(x-z)}{x^2+2xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x-2z)}{x^2+2xy} : \quad ج$$

$$(ز) yz + xz + xy = 0 : \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y} : \quad ج$$

$$١٨ - (أ) إذا كان  $z = \sqrt{x^2+y^2}$  ، فبين أن  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$  .$$

$$(ب) إذا كان  $z = \ln \sqrt{x^2+y^2}$  ، فبين أن  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1$  .$$

$$(ج) إذا كان  $z = e^{x/y} \sin \frac{x}{y} + e^{y/x} \cos \frac{y}{x}$  ، فبين أن  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  .$$

$$(د) إذا كان  $z = (ax+by)^2 + e^{ax+by} + \sin(ax+by)$  ، فبين أن  $b \frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial y}$  .$$

١٩ - أوجد معادلة المستقيم المماس :

$$(أ) لقطع المكافئ  $z = 2x^2 - 3y^2$  عند النقطة  $(-2, 1, 5)$  : ج  $8x + z + 11 = 0, y = 1$$$

$$(ب) لقطع المكافئ  $z = 2x^2 - 3y^2$  عند النقطة  $(-2, 1, 5)$  : ج  $6y + z - 11 = 0, x = -2$$$

$$(ج) لقطع الزائد  $z = 2x^2 - 3y^2$  عند النقطة  $(-2, 1, 5)$  : ج  $4x + 3y + 5 = 0, z = 5$$$

مزم أن هذه المستقيمات الثلاثة تقع في المستوى  $8x + 6y + z + 5 = 0$  .

٢٠ - أوجد  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  لكل من التوال التالية :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -8, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 : \quad z = 2x^2 - 5xy + y^2 \quad (أ)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{6y}{x^4}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4} : \quad z = \frac{x}{y^3} - \frac{y}{x^3} \quad (ب)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -9z, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12 \cos 3x \sin 4y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -16z : \quad z = \sin 3x \cos 4y \quad (ج)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} : \quad z = \arctan \frac{y}{x} \quad (د)$$

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad \text{فبين أن} \quad z = \frac{xy}{x-y}, \quad (أ) - ٢١$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad \text{فبين أن} \quad z = e^{\alpha x} \cos \beta y \quad \text{و} \quad \beta = \pm \alpha, \quad (ب)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad \text{فبين أن} \quad z = e^{-t} (\sin x + \cos y), \quad (ج)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right\} \quad \text{فبين أن} \quad z = \sin ax \sin by \sin kt \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (د)$$

$$(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = ct, \quad \text{حيث } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ ثوابت.} \quad (٢٢ - \text{لقانون الغازات})$$

أثبت أن :

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{2a(v-b) - (p + a/v^2)v^2}{v^4(v-b)}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{cv^2}{(p + a/v^2)v^2 - 2a(v-b)}, \quad \frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v-b}{c}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial p}\right) = -1$$

## الفصل السابع والخمسون

### التفاضلات الكلية والمشتقات الكلية

**التفاضلات الكلية** . لقد سبق أن عرفنا في الفصل ٢٢ التفاضلين  $dx$  و  $dy$  لدالة  $y = f(x)$  في المتغير المستقل الوحيد  $x$  بالشكل .

$$dx = \Delta x, \quad dy = f'(x) dx = \frac{dy}{dx} dx$$

لنعتبر الدالة  $z = f(x, y)$  في المتغيرين المستقلين  $x$  و  $y$  ولنعرف  $dx = \Delta x$  و  $dy = \Delta y$  فإذا جعلنا  $x$  تتغير وتركنا  $y$  ثابتة فإن  $z$  دالة في  $x$  فقط ، والتفاضل الجزئي لـ  $z$  بالنسبة لـ  $x$  يعرف بـ  $d_x z = f_x(x, y) dx = \frac{\partial z}{\partial x} dx$  وبشكل مماثل نعرف التفاضل الجزئي لـ  $z$  بالنسبة لـ  $y$  على أنه  $d_y z = f_y(x, y) dy = \frac{\partial z}{\partial y} dy$  ويعرف التفاضل الكلي  $dz$  على أنه مجموع التفاضلين الجزئيين أي :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (1)$$

ويعرف التفاضل الكلي  $dw$  لدالة  $w = F(x, y, z, \dots, t)$  بـ :

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \dots + \frac{\partial w}{\partial t} dt \quad (2)$$

أنظر المسائل ١ - ٢

وكما في حالة دالة لمتغير واحد فإن التفاضل الكلي لدالة لعدة متغيرات تعطي تقريبا جيدا للتزايد الكلي الذي يطرأ على الدالة عندما تكون تزايدات المتغيرات المستقلة المتعددة صغيرة .

مثال :

$\Delta z$	$x \cdot \Delta y$	$\Delta x \cdot \Delta y$
$y$	$x \cdot y$	$y \cdot \Delta x$
$x$		$\Delta x$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y dx + x dy; \text{ فإن } z = xy$$

ولكن إذا أعطينا  $x$  و  $y$  التزايدين  $\Delta x = dx$  و  $\Delta y = dy$  فإن التزايد  $\Delta z$  يكون :

$$\begin{aligned} \Delta z &= (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy \\ &= x \Delta y + y \Delta x + \Delta x \Delta y \\ &= x dy + y dx + dx dy \end{aligned}$$

والشكل ٥٧ - ١ يوضح تمثيلا هندسيا لذلك . ويتضح أن  $dz$  و  $\Delta z$

تختلفان عن بعضهما بالتطيل التي مساحتها  $\Delta x \Delta y = dx dy$  .

شكل ٥٧ - ١

انظر المسائل ٢ - ٩

**قاعدة السلسلة لدوال الدوال :** إذا كانت  $z = f(x, y)$  دالة متصلة في المتغيرين  $x$  و  $y$  ولها مشتقتان جزئيتان متصلتان  $\partial z / \partial x$  و  $\partial z / \partial y$  ، وإذا كانت  $x$  و  $y$  دالتين قابلتين للاشتقاق  $x = g(t)$  ،  $y = h(t)$  في المتغير  $t$  ، فمشتق  $z$  دالة في  $t$  ويطلق  $dz/dt$  التفاضل الكلية لـ  $z$  بالنسبة لـ  $t$  بـ :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (٢)$$

وبشكل مماثل إذا كانت  $w = f(x, y, z, \dots)$  دالة متصلة في المتغيرات  $x, y, z, \dots$  وكانت مشتقاتها الجزئية متصلة ، وإذا كانت  $x, y, z, \dots$  دالة قابلة للاشتقاق في المتغير  $t$  فإن المشتقة الكلية لـ  $w$  بالنسبة لـ  $t$  تعطى بـ :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \dots \quad (٢)$$

انظر المسائل ١٠-١٦

وإذا كانت  $z = f(x, y)$  دالة متصلة في المتغيرين  $x, y$  وكانت مشتقاتها الجزئية  $\partial z / \partial x$  و  $\partial z / \partial y$  متصلة ، وإذا كانت  $x$  و  $y$  دالتين متصلتين في المتغيرين المستقلين  $r$  و  $s$  ، أي أن  $x = g(r, s)$  ،  $y = h(r, s)$  فإن  $z$  دالة في  $r$  و  $s$  وإن :

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (٢)$$

وبشكل مماثل إذا كانت  $w = f(x, y, z, \dots)$  دالة متصلة في  $n$  متغيرا  $x, y, z, \dots$  وكانت مشتقاتها الجزئية  $\partial w / \partial x, \partial w / \partial y, \partial w / \partial z, \dots$  متصلة ، وإذا كانت  $x, y, z, \dots$  دوال متصلة في  $m$  متغيرا مستقلا  $r, s, t, \dots$  فإن :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} + \dots \quad (٢')$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} + \dots \quad \dots \dots \dots \text{ الخ}$$

انظر المسائل ١٧ - ١٩

### مسائل مطروحة

أوجد في كل من المسائلين ١ - ٢ التفاضل الكلي.

$$z = x^2y + xy^2 + y^3. \quad - ١$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x^2y + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy^2 + 3y^2$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x^2y + y^2) dx + (x^2 + 2xy^2 + 3y^2) dy \quad \text{و من}$$

$$z = x \sin y - y \sin x. \quad - ٢$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y - y \cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y - \sin x$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (\sin y - y \cos x) dx + (x \cos y - \sin x) dy \quad \text{و من}$$



٢ - قارن بين  $dz$  و  $\Delta z$  بفرض أن  $z = x^2 + 2xy - 3y^2$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 6y, \quad dz = 2(x+y)dx + 2(x-3y)dy$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= [(x+dx)^2 + 2(x+dx)(y+dy) - 3(y+dy)^2] - (x^2 + 2xy - 3y^2) \\ &= 2(x+y)dx + 2(x-3y)dy + (dx)^2 + 2dx dy - 3(dy)^2 \end{aligned}$$

ومكذلك نجد أن  $dz$  و  $\Delta z$  يختلفان بـ  $(dx)^2 + 2dx dy - 3(dy)^2$ .

٤ - احسب القيمة التقريبية لمساحة مستطيل بمقاييس 24.97 units و 35.02 units.

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = y dx + x dy. \text{ وبالتالي فإن } A = xy \text{ هي مساحة المستطيل، بمقاييس } x \text{ و } y.$$

$$\text{فإذا أخذنا } x = 35, dx = 0.02, y = 25, dy = -0.03 \text{ فإننا نجد } A = 35 \times 25 = 875$$

$$\text{و } dA = 25(0.02) + 35(-0.03) = -0.55. \text{ والمساحة التقريبية: } A + dA = 874.47 \text{ sq. un.}$$

٥ - احسب القيمة التقريبية للتغير الذي يطرأ على وتر مثلث قائم الزاوية طولاه ضامى القائمة 15 cm و 20 cm إذا أطلنا الضلع القصير بمقدار 5/8 cm وقصرنا الضلع الطويل بمقدار 5/16 cm.

ليكن  $x, y, z$  أطوال الضلع القائم القصير والضلع القائم الطويل والوتر على الترتيب فيكون:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$dz = \frac{15(5/8) + 20(-5/16)}{\sqrt{15^2 + 20^2}} = 1/8 \text{ cm. فإن } x = 15, y = 20, dx = 5/8, dy = -5/16$$

ولذلك فإن الوتر يزداد طولاً بـ 1/8 cm تقريباً.

٦ - تعطى القدرة الكهربائية التي يستهلكها جهاز كهربائي بـ  $P = E^2/R$  watts. فإذا كانت  $E$  تساوى 200 volts و  $R$  تساوى 8 ohms فاحسب التغير الذي يطرأ على القدرة عندما تزداد  $E$  بمقدار 5 volts وتزداد  $R$  بمقدار 0.2 ohms؟

$$\text{أن } \frac{\partial P}{\partial E} = \frac{2E}{R}, \quad \frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{E^2}{R^2}, \quad dP = \frac{2E}{R} dE - \frac{E^2}{R^2} dR$$

وعندما  $E = 200, R = 8, dE = -5, dR = -0.2$  يكون:

$$dP = \frac{2 \cdot 200}{8} (-5) - \left( \frac{200}{8} \right)^2 (-0.2) = -250 + 125 = -125$$

ولذلك تكون القدرة قد نقصت 125 watts تقريباً.

٧ - لدينا قطعة خشب على شكل متوازي مستطيلات، قيس أبعادها فوجدت 25 cm و 30 و 50 مع احتمال خطأ قدره 0.125 cm في كل من هذه القياسات الثلاثة. أوجد تقريباً أكبر خطأ في حساب مساحة سطح قطعة الخشب والنسبة المئوية للخطأ في المساحة الناتج عن الأخطاء في القياسات المفردة.

بما أن مساحة السطح تعطى بـ  $S = 2(xy + yz + xz)$  فإن:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz = 2(y+z)dx + 2(x+z)dy + 2(y+x)dz$$

ونحصل على أكبر خطأ في  $S$  عندما تكون الأخطاء في الأطوال لها نفس الإشارة ، لنفرض هذه الإشارة موجبة مثلاً فيكون عندئذ :

$$dS = 2(30 + 50)(0.125) + 2(25 + 50)(0.125) + 2(30 + 25)(0.125) = 52.5 \text{ cm}^2.$$

والنسبة المئوية للخطأ تساوى ( الخطأ / المساحة ) (100) وهذا يساوى  $5250/7000$  أى 0.75 % .

٨ - أوجد أكبر خطأ الناتج عن استخدام الصيغة  $R = E/C$  . وأوجد الخطأ النسبى ، وذلك بفرض أن  $C = 20$  بخطأ 0.1 وأن  $E = 120$  بخطأ 0.05 .

$$dR = \frac{\partial R}{\partial E} dE + \frac{\partial R}{\partial C} dC = \frac{1}{C} dE - \frac{E}{C^2} dC$$

ويحدث أكبر خطأ عندما  $dC = -0.1, dE = 0.05$  . إذن :

$$dR = \frac{0.05}{20} - \frac{120}{400}(-0.1) = 0.0325$$

$$\frac{dR}{R}(100) = \frac{0.0325}{8}(100) = 0.40625 = 0.41\%.$$

٩ - قيس ضلعاً مثلث والزاوية المحصورة بينهما فكانت النتائج  $50 \text{ m}$  ،  $65 \text{ m}$  ،  $60^\circ$  ، فإذا كانت الأخطاء المحتملة  $0.06 \text{ m}$  في قياس الأطوال و  $1^\circ$  في قياس الزاوية فما هو الخطأ الأعظم في حساب المساحة ؟

$$A = \frac{1}{2}xy \sin \theta, \quad \partial A / \partial x = \frac{1}{2}y \sin \theta, \quad \partial A / \partial y = \frac{1}{2}x \sin \theta, \quad \partial A / \partial \theta = \frac{1}{2}xy \cos \theta$$

$$dA = \frac{1}{2}y \sin \theta dx + \frac{1}{2}x \sin \theta dy + \frac{1}{2}xy \cos \theta d\theta \quad \text{إذن}$$

$$x = 50, y = 65, \theta = 60^\circ, dx = 0.06, dy = 0.06 \text{ و } d\theta = 1^\circ = \pi/180, \text{ فإذا كان}$$

$$dA = \frac{1}{2}(65)(\sin 60^\circ)(0.06) + \frac{1}{2}(50)(\sin 60^\circ)(0.06) + \frac{1}{2}(50)(65)(\cos 60^\circ)(\pi/180) = 17.169 \text{ m}^2 \quad \text{فإن}$$

١٠ - إذا كان  $z = x^2 + 3xy + 5y^4$  ،  $x = \sin t$  ،  $y = \cos t$  ، فأوجد  $dz/dt$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 10y^3, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x + 3y) \cos t - (3x + 10y^3) \sin t \quad \text{إذن}$$

١١ - إذا كان  $z = \ln(x^2 + y^2)$  ،  $x = e^{-t}$  ،  $y = e^t$  ، فأوجد  $dz/dt$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dx}{dt} = -e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = e^t$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{2x}{x^2 + y^2}(-e^{-t}) + \frac{2y}{x^2 + y^2}(e^t) = 2 \frac{ye^t - xe^{-t}}{x^2 + y^2} \quad \text{إذن}$$

١٢ - لتكن  $z = f(x, y)$  دالة متصلة في  $x$  و  $y$  ولتكن مشتقتها الجزئيتين  $\partial z / \partial x$  و  $\partial z / \partial y$  متصلتين . لتكن بعد ذلك  $y$  دالة قابلة للاختلاف في  $x$  مثلاً تكون  $x$  دالة قابلة للاختلاف في  $x$  ويكون استناداً إلى (٢) :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

يلاحظ أننا استخدمنا الرمز  $z$  بدلا من  $x$  هنا للالتباس الذي يمكن أن يحدث من استخدام  $\partial z/\partial x$  و  $dz/dx$  و نفس العلاقة .

١٣ - إذا كان  $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ ,  $y = e^{ax}$ , فأوجد  $dz/dx$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = (2x + 2y) + (2x + 8y)ae^{ax} = 2(x + y) + 2a(x + 4y)e^{ax}$$

١٤ - إذا كان  $z = f(x, y) = xy^2 + x^2y$ ,  $y = \ln x$ .

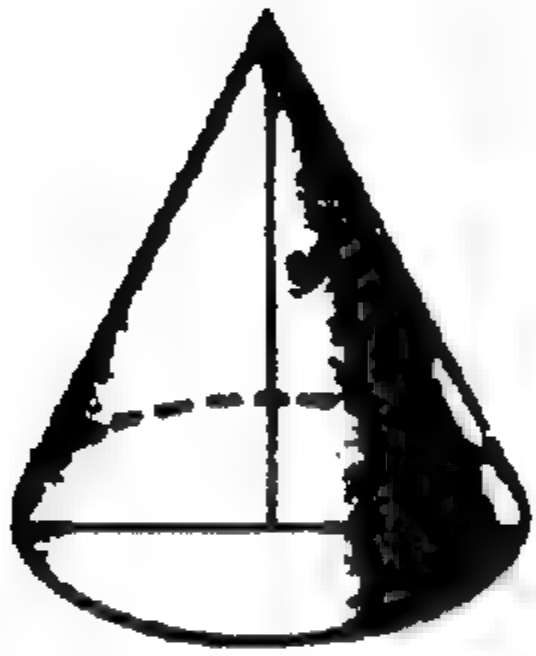
فأوجد (أ)  $dz/dx$  و (ب)  $dz/dy$

(أ) إن  $x$  هنا هو المتغير المستقل ولذلك .

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = (y^2 + 2xy) + (2xy + x^2)\left(\frac{1}{x}\right) = y^2 + 2xy + 2y + x$$

(ب) إن  $y$  هنا هو المتغير المستقل ولذلك .

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y} = (y^2 + 2xy)x + (2xy + x^2) = xy^2 + 2x^2y + 2xy + x^2$$



شكل ٥٧ - ٢

١٥ - إذا كان ارتفاع مخروط دائري قائم 15 cm ونصف قطر قاعدته 10 cm فبأي معدل يتغير الحجم إذا كان ازدياد ارتفاع المخروط  $0.2 \text{ cm s}^{-1}$  ومعدل نقصان نصف قطر القاعدة  $0.3 \text{ cm s}^{-1}$ .

ليكن  $x$  نصف قطر المخروط و  $y$  ارتفاعه. أن  $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$  لنعتبر  $x$  و  $y$  دالتين في  $t$  فيكون .

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}\pi \left( 2xy \frac{dx}{dt} + x^2 \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{3}\pi [2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot (-0.3) + 10^2 \cdot (0.2)] = -70\pi/3 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

١٦ - تتحرك نقطة على منحنى تقاطع حجم القطع المكافئ  $z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$  بالأسطوانة  $x^2 + y^2 = 5$  حيث تقاس  $x$  و  $y$  و  $z$  بـ cm. فإذا كانت  $x$  تزداد بمعدل  $0.2 \text{ cm s}^{-1}$ ، فما هو معدل تغير  $z$  عندما  $x = 2$  ؟

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{x}{8} \frac{dx}{dt} - \frac{2y}{9} \frac{dy}{dt} \text{ ينتج } z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$$

و بما أن  $x^2 + y^2 = 5$  فإن  $y = \pm 1$  عندما  $x = 2$  ويكون كذلك  $x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$ .

$$\text{وعندما } y = 1 \text{ يكون } \frac{dz}{dt} = \frac{2}{8}(0.2) - \frac{2}{9}(-0.4) = \frac{5}{36} \text{ cms}^{-1} \text{ و } \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{1}(0.2) = -0.4$$

$$\text{وعندما } y = -1 \text{ يكون } \frac{dz}{dt} = \frac{2}{8}(0.2) - \frac{2}{9}(-1)(0.4) = \frac{5}{36} \text{ cms}^{-1} \text{ و } \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = 0.4$$

١٧ - إذا كان  $z = x^2 + xy + y^2$ ,  $x = 2r + s$ ,  $y = r - 2s$ . فأوجد  $\partial z/\partial s$  و  $\partial z/\partial r$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = 2, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -2$$

$$\text{إذن } \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = (2x + y)(2) + (x + 2y)(1) = 5x + 4y$$

$$\text{ومنه } \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = (2x + y)(1) + (x + 2y)(-2) = -3y$$

$$18 - \text{أوجد } \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

$$u = x^2 + 2y^2 + 2z^2, \quad x = \rho \sin \beta \cos \theta, \quad y = \rho \sin \beta \sin \theta, \quad z = \rho \cos \beta. \quad \text{إذا كان}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho} = 2x \sin \beta \cos \theta + 4y \sin \beta \sin \theta + 4z \cos \beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \beta} = 2x \rho \cos \beta \cos \theta + 4y \rho \cos \beta \sin \theta - 4z \rho \sin \beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = -2x \rho \sin \beta \sin \theta + 4y \rho \sin \beta \cos \theta$$

$$19 - \text{إذا كان } u = f(x, y, z) = xy + yz + zx, \quad y = 1/x, \quad z = x^2. \quad \text{أوجد } \partial u / \partial x.$$

باستخدام (٢) نجد أن

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = (y + z) + (x + z) \left( -\frac{1}{x^2} \right) + (y + z) 2x = y + z + 2x(x + y) - \frac{x + z}{x^2}$$

٢٠ - إذا كانت  $z = f(x, y)$  دالة متصلة في  $x$  و  $y$  وكانت مشتقتها الجزئيتين  $\partial z / \partial x$  و  $\partial z / \partial y$  متصلتين فاستنتج الصيغة الأساسية :

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + e_1 \Delta x + e_2 \Delta y \quad (1)$$

حيث يتول كل من  $e_1$  و  $e_2$  إلى الصفر عندما  $\Delta x$  و  $\Delta y$  يتولان إلى الصفر.

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \end{aligned} \quad (i)$$

حيث تتغير  $x$  وحدها في العبارة الأولى بين القوسين الكبيرين وتغير  $y$  وحدها في العبارة الثانية. وعلى هذا يمكن تطبيق قانون القيمة المتوسطة [ (V) من الفصل ٢١ ] على كل من هاتين العبارتين.

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \cdot f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \quad (ii)$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \cdot f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \quad (iii)$$

حيث  $0 < \theta < 1$  و  $0 < \theta_2 < 1$  و حيث المشتقات ههنا مشتقات جزئية.

وبما أن  $\partial z / \partial x = f_x(x, y)$  و  $\partial z / \partial y = f_y(x, y)$  دالتان متصلتان في  $x$  و  $y$  حسب الفرض فإن

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f_x(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_x(x, y) \quad , \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y)$$

$$f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y) + e_1, \quad f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_y(x, y) + e_2 \quad \text{وبالتالي}$$

حيث  $e_1, e_2$  يتولان إلى الصفر عندما يتول كل من  $\Delta x$  و  $\Delta y$  إلى الصفر.

لنموض في (ii) و (iii) ثم في (i) فنجد العلاقة المطلوبة :

$$\begin{aligned} \Delta z &= [f_x(x, y) + e_1] \Delta x + [f_y(x, y) + e_2] \Delta y \\ &= f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + e_1 \Delta x + e_2 \Delta y \end{aligned}$$

لاحظ أن التفاضل تمام  $dz$  هو تقريب جيد جدا لزيادة الكل  $\Delta z$  عندما تكون  $|\Delta x|$  و  $|\Delta y|$  صغيرتين

### مسائل إضافية

٢١ - أوجد التفاضل الكلي لكل من الدوال التالية :

$$\begin{array}{ll} (١) & z = x^2y + 2xy^2 \quad : \text{ج} \quad dz = (3x^2 + 2y^2)y dx + (x^2 + 6y^2)x dy \\ (ب) & \theta = \arctan y/x \quad : \text{ج} \quad d\theta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ (٣) & z = e^{x^2-y^2} \quad : \text{ج} \quad dz = 2x(x dx - y dy) \\ (د) & z = x(x^2 + y^2)^{-1/2} \quad : \text{ج} \quad dz = \frac{y(y dx - x dy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{array}$$

٢٢ - إذا كان التردد الأساسي لاهتزاز خيط أو سلك ذا مقطع دائري تحت شد مقدار  $T$  هو  $v = \frac{1}{2\pi l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ ، حيث  $l$  طول الخيط و  $\rho$  نصف قطره و  $d$  كثافته . أوجد القيمة التقريبية لتغير  $n$  بسبب (١) تغير  $l$  بالكمية الصغيرة  $dl$  . (ب) تغير  $T$  بالكمية الصغيرة  $dT$  . (ج) تغير  $l$  و  $T$  في آن واحد .

$$\text{ج : (١) } -\frac{n}{l} dl, \quad (ب) \quad \frac{n}{2T} dT, \quad (ج) \quad n \left( -\frac{dl}{l} + \frac{dT}{2T} \right)$$

٢٣ - احسب . باستخدام التفاضلات .

$$\begin{array}{ll} (١) & \text{حجم صندوق تاعده مربعة وطول صده } 8.005 \text{ cm و ارتفاعه } 9.996 \text{ cm} \quad : \text{ج} \quad 640.544 \text{ cm}^3 \\ (ب) & \text{قطر صندوق على شكل متوازي مستطيلات أبعاده } 0.924 \text{ m و } 2.824 \text{ m و } 1.833 \text{ m} \quad : \text{ج} \quad 2.747 \text{ m} \end{array}$$

٢٤ - احسب القيمة التقريبية للخطأ الأعظم المحتمل والنسبة المئوية للخطأ إذا كانت  $z$  تعطى بالصغ التالية :

$$\begin{array}{ll} (١) & z = \pi r^2 h; \quad r = 5 \pm 0.05, \quad h = 12 \pm 0.1. \quad : \text{ج} \quad 8.5\pi; 2.8\% \\ (ب) & 1/z = 1/f + 1/g; \quad f = 4 \pm 0.01, \quad g = 8 \pm 0.02. \quad : \text{ج} \quad 0.0067; 0.25\% \\ (٣) & z = y/x; \quad x = 1.8 \pm 0.1, \quad y = 2.4 \pm 0.1. \quad : \text{ج} \quad 0.13; 10\% \end{array}$$

٢٥ - احسب القيمة المظلمى التقريبية للنسبة المئوية للخطأ في :

$$\begin{array}{ll} (١) & \omega = \sqrt[3]{g/b} \quad : \text{ج} \quad \text{إذا كان هناك خطأ محتمل قدره } 1\% \text{ في قياس } g \text{ و } 1/2\% \text{ في قياس } b. \\ \text{إرشاد : } & \omega = \frac{1}{3}(\ln g - \ln b); \quad \frac{\partial \omega}{\omega} = \frac{1}{3} \left( \frac{dg}{g} - \frac{db}{b} \right), \quad \left| \frac{dg}{g} \right| = 0.01, \quad \left| \frac{db}{b} \right| = 0.005. \\ & : \text{ج} \quad 0.005 \\ (ب) & g = 2s/t^2 \quad : \text{ج} \quad \text{إذا كان هناك خطأ محتمل قدره } 2\% \text{ في قياس } s \text{ و } 1/4\% \text{ في قياس } t. \\ & : \text{ج} \quad 0.015 \end{array}$$

٢٦ - أوجد  $du/dt$  بفرض أن

$$\begin{array}{ll} (١) & u = x^2y^2, \quad x = 2t^3, \quad y = 3t^2. \quad : \text{ج} \quad 6xy^2t(2yt + 3x) \\ (ب) & u = x \cos y + y \sin x, \quad x = \sin 2t, \quad y = \cos 2t. \quad : \text{ج} \quad 2(\cos y + y \cos x) \cos 2t - 2(-x \sin y + \sin x) \sin 2t \\ (٣) & u = xy + yz + zx, \quad x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = e^t + e^{-t}. \quad : \text{ج} \quad (x + 2y + z)e^t - (2x + y + z)e^{-t} \end{array}$$



فأوجد معدل التغير الزمني لـ (١) حجم الاسطوانة (ب) سطحها في تلك اللحظة .

٢٨ - يتحرك جسم في المستوى بحيث يكون إحداثيا الجسم عند أى لحظة  $t$  هما  $y = t^2 + 4$  و  $x = 2 + 3t$  حيث تقاس  $x$  بـ metres و  $y$  بـ  $t$  بـ sec . بأى سرعة يتغير بعد الجسم عن نقطة الأصل عندما  $t = 1$  .

٢٩- تتحرك نقطة على منحنى تقاطع  $x^2 + 3xy + 3y^2 = z^2$  مع المستوى  $x - 2y + 4 = 0$  ، فإذا فرضنا أن  $x$  تساوى 2 وأنها تزايد بمعدل 3 وحدات في الثانية فأوجد ( أ ) كيف تنغير  $y$  . ( ب ) كيف تنغير  $z$  . ( ج ) سرعة النقطة .

٣٠- أوجد  $\partial z / \partial t$  ،  $\partial z / \partial s$  بفرض أن

$$\begin{array}{ll}
 6(x-2y), 4(x+2y) & : \zeta z = x^2 - 2y^2, x = 3s + 2t, y = 3s - 2t. \quad (1) \\
 5(x+y) \cos s, (x-y) \sin t & : \zeta z = x^2 + 3xy + y^2, x = \sin s + \cos t, y = \sin s - \cos t. \quad (2) \\
 2(x+2y)e^s, 2(2y-x)e^t & : \zeta z = x^2 + 2y^2, x = e^s - e^t, y = e^s + e^t. \quad (3) \\
 9 \cos(4x+5y), -\cos(4x+5y) & : \zeta z = \sin(4x+5y), x = s+t, y = s-t. \quad (4) \\
 2e^{xy}(tx + (s+t)y), & : \zeta z = e^{xy}, x = s^2 + 2st, y = 2st + t^2. \quad (5) \\
 2e^{xy}\{(s+t)x + sy\} & 
 \end{array}$$

٣١- (١) إذا كانت  $w = f(x, y)$  و  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  فحين أن

$$\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta}\right)^2$$

(ب) إذا كانت  $x = r \cos h s, y = r \sin h s$  ,  $w = f(x, y)$  فبين أن

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

٣٧- (١) إذا كان  $z = f(x + ay) + g(x - ay)$ , فبين أن  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

اگر  $x = f(u) + g(v)$ ,  $u = x + \alpha y$ ,  $v = x - \alpha y$ . اکبر :

(ب) إذا كان  $z = x^a f\left(\frac{y}{x}\right)$ ، فبين أن  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = az$ .

(٢) إذا كان  $x = f(x, y)$ ,  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$ ، فإن  $z$ ، إذا تحققت شروط الاتصال (صفحة ٢٢٠).

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = f_{xx}(g')^2 + 2f_{xh}g'h' + f_{hh}(h')^2 + f_{xg}g'' + f_{xh}h'' \quad \text{فإن}$$



(د) إذا كان  $z = f(x, y)$ ,  $x = g(r, s)$ ,  $y = h(r, s)$  فإن - إذا تحققت شروط الاتصال ، أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = f_{xx}(g.)^2 + 2f_{xy}g.r.h.r + f_{yy}(h.)^2 + f_{xx}g.r.r + f_{yy}h.r.r$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} = f_{xy}g.r.g.s + f_{xy}(g.h.r + g.h.s) + f_{yy}h.r.h.s + f_{xx}g.r.s + f_{yy}h.r.s$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = f_{xx}(g.)^2 + 2f_{xy}g.s.h.s + f_{yy}(h.)^2 + f_{xx}g.s.s + f_{yy}h.s.s$$

٣٢ - نتول عن دالة  $f(x, y)$  إنها متجانسة من المرتبة  $n$  إذا كان  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$  مثلا إن الدالة

$f(x, y) = x^3 + 2xy + 3y^3$  متجانسة من المرتبة الثانية . والدالة  $f(x, y) = x \sin y/x + y \cos y/x$  متجانسة

من المرتبة الأولى . اشتق  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$  بالنسبة لـ  $t$  ثم عوض عن  $t$  بـ 1 لتبين أن  $xf_x + yf_y = nf$ .

تحقق من هذه الصيغة باستخدام دالتى التالين المذكورين . انظر كذلك المسألة ٣٢ (ب)

٣٤ - إذا كان  $z = \phi(u, v)$  حيث  $u = f(x, y)$  و  $v = g(x, y)$  وكان  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  و  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  فبين أن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (أ)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right) \quad (ب)$$

٣٥ - استخدم الجزء (أ) من المسألة ٣٠ لتستنتج قاعدة السلسلة (٢) و (٢) .

إرشاد : لـ (٢) انقسم على  $\Delta t$  .

## الفصل الثامن والخمسون

### الدوال الضمنية

**اشتقاق** دالة لمتغير واحد ، معرفة بشكل ضمني بالملاقة  $f(x, y) = 0$  قد تمت معالجته بشكل هندسي في الفصل السادس . وسنذكر هنا ، لهذه الحالة ما يل دون برهان :

**I -** إذا كانت  $f(x, y)$  متصلة في منطقة تحوى نقطة  $(x_0, y_0)$  ، وكان عندها  $f(x_0, y_0) = 0$  ، وإذا كانت  $\partial f / \partial x$  و  $\partial f / \partial y$  متصلتين في هذه المنطقة وكان  $\partial f / \partial y \neq 0$  عند  $(x_0, y_0)$  فإنه يوجد جوار لـ  $(x_0, y_0)$  يمكن فيه حل المعادلة  $f(x, y) = 0$  لنحصل على  $y = \phi(x)$  كدالة متصلة قابلة للاشتقاق في  $x$  :  $y = \phi(x)$  مع  $y_0 = \phi(x_0)$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} .$$

انظر المسائل ١ - ٣

**II -** إذا كانت  $F(x, y, z)$  متصلة في منطقة تحوى نقطة  $(x_0, y_0, z_0)$  وكان عندها  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  . وإذا كانت  $\frac{\partial F}{\partial x}$  ،  $\frac{\partial F}{\partial y}$  ،  $\frac{\partial F}{\partial z}$  متصلة في هذه المنطقة وكان  $\partial F / \partial z \neq 0$  عند  $(x_0, y_0, z_0)$  فإنه يوجد جوار لـ  $(x_0, y_0, z_0)$  يمكن فيه حل المعادلة  $F(x, y, z) = 0$  لنحصل على  $z = \phi(x, y)$  كدالة قابلة للاشتقاق في  $x$  و  $y$  :  $z = \phi(x, y)$  مع

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} . \quad \text{و} \quad z_0 = \phi(x_0, y_0)$$

انظر المسألين ٤ - ٥

**III -** إذا كانت الدالتان  $f(x, y, u, v)$  و  $g(x, y, u, v)$  متصلتين في منطقة تحوى النقطة  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  التى عندها  $f(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$  ،  $g(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$  ، وإذا كانت المشتقات الجزئية الأولى لـ  $f$  و  $g$  متصلة في هذه المنطقة وإذا كان المحدد  $J \left( \frac{f, g}{u, v} \right) = \begin{vmatrix} \partial f / \partial u & \partial f / \partial v \\ \partial g / \partial u & \partial g / \partial v \end{vmatrix} \neq 0$  عند  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  فإنه يوجد جوار  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  يمكن عنده حل المعادلتين  $F(x, y, u, v) = 0$  و  $G(x, y, u, v) = 0$  آنبا لنحصل على  $u = \phi(x, y)$  و  $v = \psi(x, y)$  :  $u = \phi(x, y)$  ،  $v = \psi(x, y)$  كدالتين متصلتين قابلتين للاشتقاق في  $x$  ،  $y$  :  $u = \phi(x, y)$  ،  $v = \psi(x, y)$  وإذا كان المحدد  $J \left( \frac{f, g}{x, y} \right) \neq 0$  عند  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  فإنه يوجد جوار لـ  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  يمكن عنده حل المعادلتين  $f(x, y, u, v) = 0$  و  $g(x, y, u, v) = 0$  لنحصل على  $x = h(u, v)$  و  $y = k(u, v)$  .  $u = \phi(x, y)$  و  $v = \psi(x, y)$  كدالتين متصلتين قابلتين للاشتقاق في  $u$  و  $v$  :  $x = h(u, v)$  ،  $y = k(u, v)$  . انظر المسألين ٦ - ٧

### مسائل مطروقة

١ - استخدم النظرية I لتبرهن أن  $x^2 + y^2 - 13 = 0$  ، تعرف  $y$  على أنها دالة متصلة في  $x$  وقابلة للاشتقاق في أى جوار للنقطة  $(2, 3)$  لا يحوى نقطة من المحور  $x$  .

أوجد المشتقة عند تلك النقطة .

لنفرض  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 13$  فنجد عندها  $f(2, 3) = 0$  ويكون في أى جوار لـ  $(2, 3)$  تكون فيه المشتقتان الجزئيتان  $\partial f / \partial x = 2x$  و  $\partial f / \partial y = 2y$  متصابتين كما أن  $\partial f / \partial y \neq 0$  وفي هذه الحالة يكون :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \text{ at } (2, 3) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$٧ - \text{ بفرض } f(x, y) = y^3 + xy - 12 = 0 \text{ أوجد } dy/dx \text{ أن } \frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\frac{y}{3y^2 + x} \quad ,$$

$$٨ - \text{ بفرض } e^y \sin y + e^x \sin x = 1 \text{ أوجد } dy/dx$$

$$\text{لنضع } f(x, y) = e^y \sin y + e^x \sin x - 1 \text{ فيكون } \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} = -\frac{e^x \sin x + e^y \cos x}{e^y \cos y + e^x \sin x}$$

$$٩ - \text{ بفرض } F(x, y, z) = x^3 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0 \text{ أوجد } \partial z / \partial x \text{ و } \partial z / \partial y$$

ننظر الى  $z$  على أنها دالة في  $x$  و  $y$  نعرف بالعلاقة المعروضة وللشتق جزئيا بالنسبة لـ  $x$  ثم بالنسبة لـ  $y$  فنحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = (2x + 3y + 3z) + (3x + 2z) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (3x - 4y) + (3x + 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (ii)$$

$$\text{ومن (i) ينتج : } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = -\frac{2x + 3y + 3z}{3x + 2z} \quad , \quad \text{ومن (ii) ينتج : } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} = -\frac{3x - 4y}{3x + 2z}$$

$$١٠ - \text{ بفرض } \sin xy + \sin yz + \sin zx = 1 \text{ أوجد } \partial z / \partial x \text{ و } \partial z / \partial y$$

$$\text{لنضع } F(x, y, z) = \sin xy + \sin yz + \sin zx - 1 \text{ فيكون}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \cos xy + z \cos zx, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x \cos xy + z \cos yz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y \cos yz + x \cos zx$$

$$\text{ومن } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = -\frac{y \cos xy + z \cos zx}{y \cos yz + x \cos zx}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} = -\frac{x \cos xy + z \cos yz}{y \cos yz + x \cos zx}$$

$$١١ - \text{ بفرض أن } u \text{ و } v \text{ معرفتين كالتين في } x \text{ و } y \text{ بالمعادلتين}$$

$$f(x, y, u, v) = x + y^2 + 2uv = 0, \quad g(x, y, u, v) = x^2 - xy + y^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

$$\text{أوجد (i) } \partial u / \partial x, \partial v / \partial x \text{ و (ii) } \partial u / \partial y, \partial v / \partial y$$

$$(i) \text{ لنشتق } f \text{ و } g \text{ جزئيا بالنسبة لـ } x \text{ فنجد :}$$

$$1 + 2v \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad 2x - y + 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

وبحل هاتين العلاقتين آنيا بالنسبة لـ  $\partial u/\partial x$  ,  $\partial v/\partial x$  نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v + u(y - 2x)}{2(u^2 - v^2)} \quad \text{و} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v(2x - y) - u}{2(u^2 - v^2)}$$

(ii) لنشتق  $f$  و  $g$  جزئيا بالنسبة لـ  $y$  فنجد :

$$2y + 2v \frac{\partial u}{\partial y} + 2u \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{و} \quad -x + 2y + 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(x - 2y) + 2vy}{2(u^2 - v^2)} \quad \text{و} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v(2y - x) - 2uy}{2(u^2 - v^2)} \quad \text{ومن}$$

$$7 - \text{ بفرض } u^2 - v^2 + 2x + 3y = 0 \quad \text{و} \quad uv + x - y = 0 \quad \text{أو (أ) } \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$(ب) \quad \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

(أ) نعتبر هنا  $x$  و  $y$  متغيرين مستقلين :

نشتق المعادلتين المفروقتين جزئيا بالنسبة لـ  $x$  فنجد :

$$2u \frac{\partial u}{\partial x} - 2v \frac{\partial v}{\partial x} + 2 = 0 \quad \text{و} \quad v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} + 1 = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v - u}{u^2 + v^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u + v}{u^2 + v^2}$$

ثم نشتقها جزئيا بالنسبة لـ  $y$  فنحصل على :

$$2u \frac{\partial u}{\partial y} - 2v \frac{\partial v}{\partial y} + 3 = 0 \quad \text{و} \quad v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2v - 3u}{2(u^2 + v^2)} \quad \text{و} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u + 3v}{2(u^2 + v^2)}$$

(ب) نعتبر هنا  $u$  و  $v$  متغيرين مستقلين .

نشتق المعادلتين المفروقتين جزئيا بالنسبة لـ  $u$  فنجد :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{2u + 3v}{5} \quad \text{و} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2(v - u)}{5} \quad \text{ومن} \quad 2u + 2 \frac{\partial x}{\partial u} + 3 \frac{\partial y}{\partial u} = 0 \quad \text{و} \quad v + \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} = 0.$$

ثم نشتقها جزئيا بالنسبة لـ  $v$  فنجد :

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2v - 3u}{5} \quad \text{و} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(u + v)}{5} \quad \text{ومن} \quad -2v + 2 \frac{\partial x}{\partial v} + 3 \frac{\partial y}{\partial v} = 0 \quad \text{و} \quad u + \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

### مسائل إضافية

٨ - أوجد  $dy/dx$  بفرض أن

$$(أ) \quad x^2 - x^2y + xy^2 - y^3 = 1 \quad (ب) \quad xy - e^y \sin y = 0 \quad (ج) \quad \ln(x^2 + y^2) - \arctan y/x = 0$$

$$\frac{2x+y}{x-2y} \quad (ج) , \quad \frac{e^x \sin y - y}{x - e^x \cos y} \quad (د) , \quad \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - 2xy + 3y^2} \quad (١) : ج$$

٩ - لوجد  $\partial z / \partial x$  و  $\partial z / \partial y$  بفرض أن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x}{5z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y}{5z} \quad : ج \quad 3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = 60 \quad (١)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x+y+4z}{4x+2y+z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+y+2z}{4x+2y+z} \quad : ج \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4yz + 8zx = 20 \quad (ب)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{1-2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3z}{1-2z} \quad : ج \quad x + 3y + 2z = \ln z \quad (ج)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{1 + e^x \sin(y+z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-e^x \sin(y+z)}{1 + e^x \sin(y+z)} \quad : ج \quad z = e^x \cos(y+z) \quad (د)$$

$$\sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(z+x) = 1 \quad (هـ)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(x+y) + \cos(z+x)}{\cos(y+z) + \cos(z+x)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos(x+y) + \cos(y+z)}{\cos(y+z) + \cos(z+x)} \quad : ج$$

١٠ - بفرض  $x^2 + 2yz + 2zx = 1$  أوجد جميع المشتقات الجزئية الأولى والثانية لـ  $z$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x+z}{x+y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{x+y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x-y+2z}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x+2z}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2z}{(x+y)^2} \quad : ج$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1. \quad \text{فبين أن } F(x, y, z) = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial y}} J \left( \frac{f, g}{x, y} \right). \quad \text{فبين أن } g(x, y) = 0 \text{ و } z = f(x, y) \text{ كان}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial z}. \quad \text{فبين أن } g(z, x) = 0 \text{ و } f(x, y) = 0 \text{ كان}$$

١٤ - بفرض  $2u - v + x^2 + xy = 0, u + 2v + xy - v^2 = 0$ . أوجد المشتقات الجزئية الأولى لـ  $u$  و  $v$  بالنسبة لـ  $x$  و  $y$  والمشتقات الجزئية الأولى لـ  $x$  و  $y$  بالنسبة لـ  $u$  و  $v$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{5}(4x+3y), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{5}(2x-y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{5}(2y-3x), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4y-x}{5} \quad : ج$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{4y-x}{2(x^2-2xy-y^2)}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y-2x}{2(x^2-2xy-y^2)}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{3x-2y}{2(x^2-2xy-y^2)}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-4x-3y}{2(x^2-2xy-y^2)}$$

١٥ - إذا كان  $u = x+y+z, v = x^2+y^2+z^2, w = x^3+y^3+z^3$  فبين أن

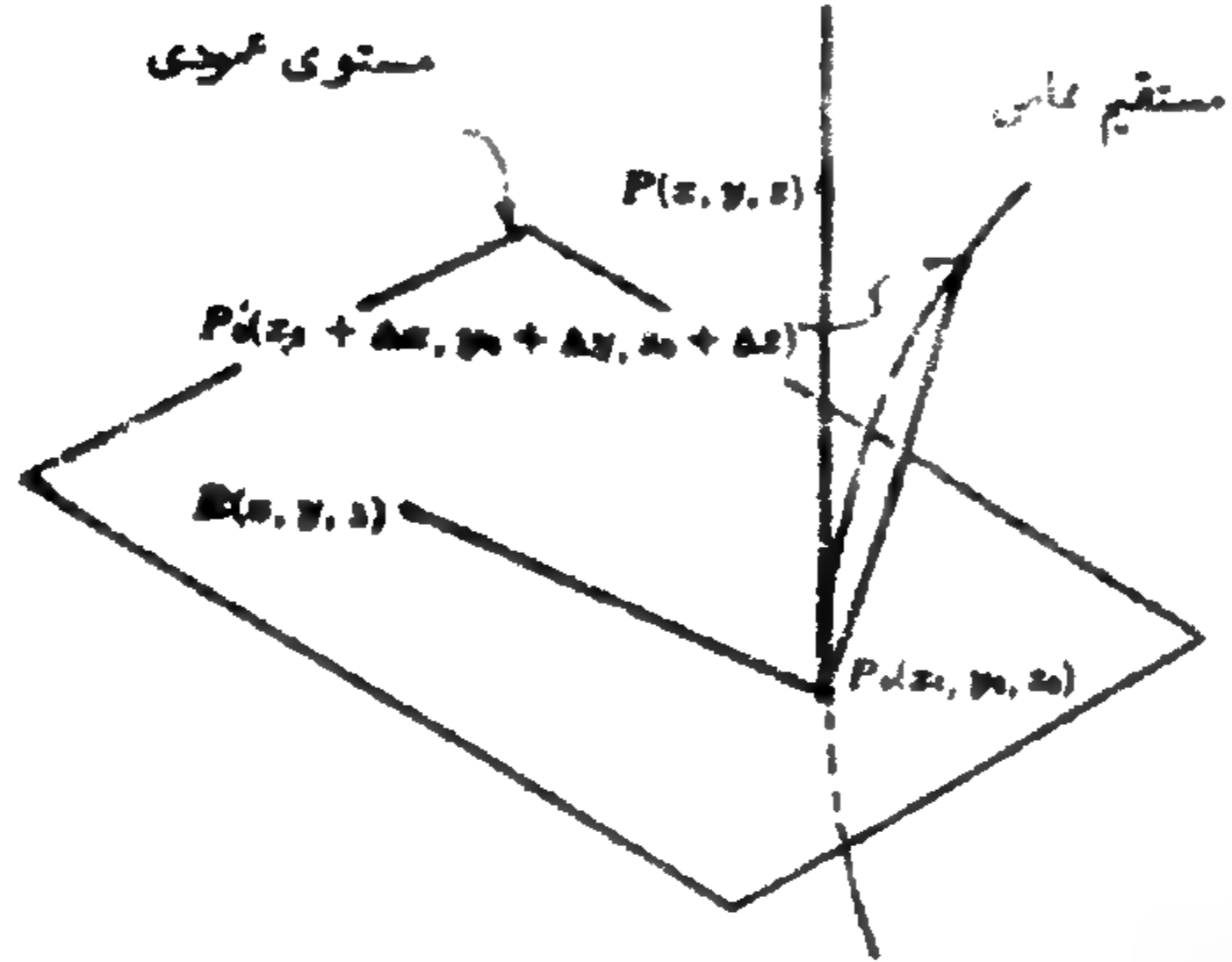
$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{yz}{(x-y)(x-z)}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{x+z}{2(x-y)(y-z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{1}{3(x-z)(y-z)}$$

## الفصل التاسع والخمسون

### المتحنيات والسطوح الفراغية

**المستوى المماس والمستوى العمودي لتحني فراغي** . يمكن تعريف المنحنى الفراغي بأرستريا بالمعادلات

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \quad (1)$$



ومعادلتى المستقيم المماس لهذا المنحنى عند إحدى نقاطه  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  (المعينة بـ  $t = t_0$ ) هما :

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt}} \quad (2)$$

ومعادلة المستوى العمودي (الماز بـ  $P_0$  والعمودي على المستقيم المماس) هي :

$$\frac{dx}{dt}(x - x_0) + \frac{dy}{dt}(y - y_0) + \frac{dz}{dt}(z - z_0) = 0 \quad (3)$$

على أن نحسب المشتقات في (2) و (3) عند النقطة  $P_0$ .

انظر المسائلين ١ - ٢

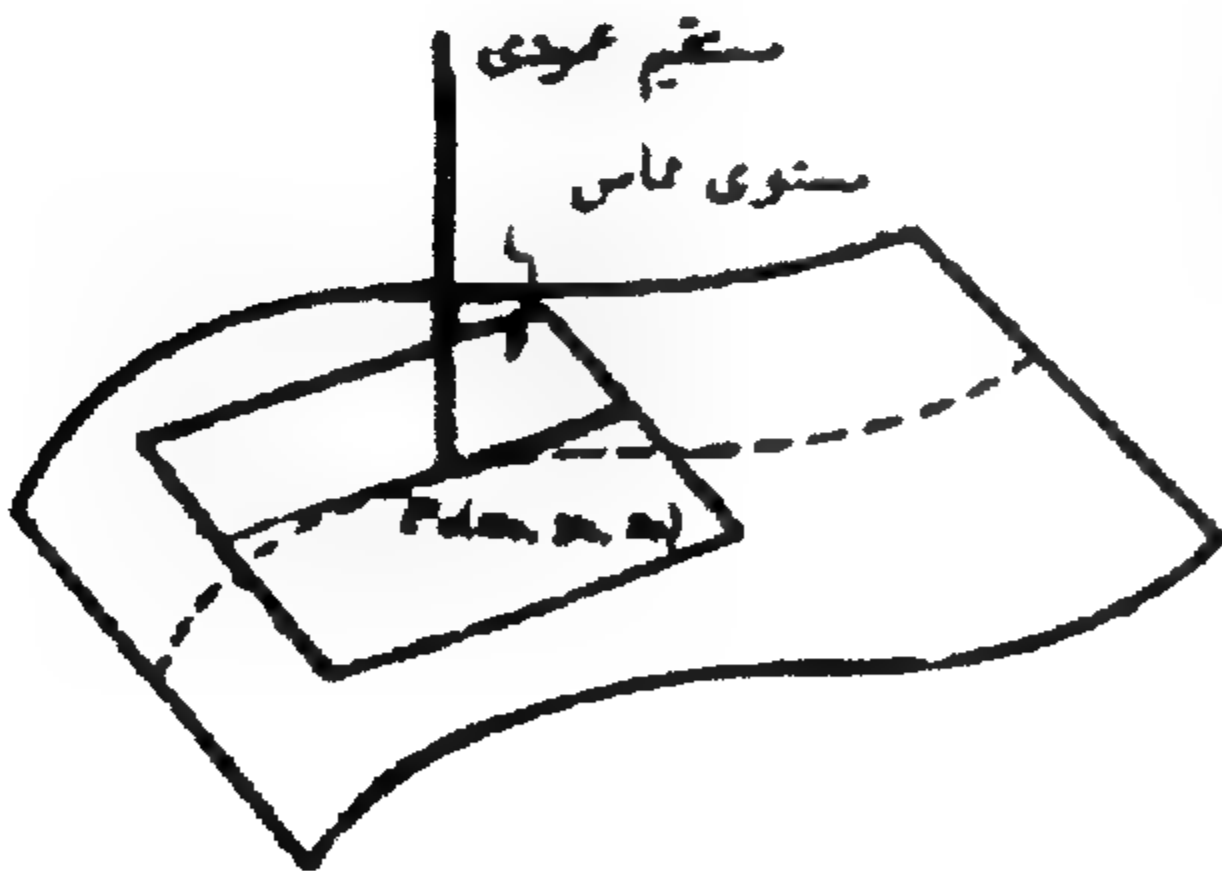
**المستوى المماس والمستقيم العمودي لسطح** . إن معادلة المستوى المماس لسطح  $F(x, y, z) = 0$

عند إحدى نقاطه  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  هي :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0 \quad (4)$$

ومعادلتى المستقيم العمودي هما :

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (5)$$



شكل ٥٩ - ٢

على أن نحسب المشتقات الجزئية عند النقطة  $P_0$ . انظر الشكل ٥٩ - ٢

انظر المسائل ٣ - ٩



المنحنى الفراغى • يمكن أن يعرف كذلك بالمعادلتين .

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \quad (٦)$$

عندئذ تكون معادلتا المستقيم المماس عند النقطة  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  هما :

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} \quad (٧)$$

ومعادلة المستوى العمودى هى :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} (z - z_0) = 0 \quad (٨)$$

على أن تحسب المشتقات الجزئية فى (٧) و (٨) عند النقطة  $P_0$  .

انظر المسألتين ١٠ - ١١

### مسائل محلولة

١ - استنتج المعادلات (٢) و (٣) للمستقيم المماس والمستوى العمودى للمنحنى الفراغى  $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$  عند نقطة منه  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  مبنية بالقيمة  $t = t_0$  . انظر إلى الشكل ٥٩ - ١

لتكن  $P'_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$  نقطة أخرى من المنحنى مبنية بالقيمة  $t = t_0 + \Delta t$  فإذا جعلنا  $P'_0 \rightarrow P_0$  على المنحنى فإن الوتر  $P_0 P'_0$  يقترب من المستقيم المماس للمنحنى عند النقطة  $P_0$  كوضع نهائى .

يمكن تعيين اتجاه الوتر بالمجموعة البسيطة من أعداد الاتجاه  $[\Delta x, \Delta y, \Delta z]$  ولكننا نستخدم المجموعة  $\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right]$  .

عندئذ عندما تتحول  $P'_0$  إلى  $P_0$  وتتحول  $\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right]$  إلى  $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$  فتكون مجموعة أعداد الاتجاه للمستقيم المماس

عند  $P_0$  . لنفرض الآن أن  $P(x, y, z)$  نقطة اختيارية على المستقيم المماس فيكون عندئذ  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  مجموعة أعداد الاتجاه  $P_0 P$  .

ربما أن مجموع أعداد الاتجاه متناسبة فإن معادلتى المستقيم المماس عند  $P_0$  هما .

$$\frac{x - x_0}{dx/dt} = \frac{y - y_0}{dy/dt} = \frac{z - z_0}{dz/dt}$$

وإذا كانت  $R(x, y, z)$  نقطة اختيارية فى المستوى العمودى عند  $P_0$  فإن  $P_0 R$  و  $P_0 P$  متعامدان ، ومعادلة المستوى العمودى عند  $P_0$  هى :

$$(x - x_0) \frac{dx}{dt} + (y - y_0) \frac{dy}{dt} + (z - z_0) \frac{dz}{dt} = 0$$

٢ - أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودي.

(أ) المنحنى  $x = t, y = t^2, z = t^3$  عند النقطة  $t = 1$ .

(ب) المنحنى  $x = t - 2, y = 3t^2 + 1, z = 2t^3$  عند نقطة تقاطعه مع المستوى  $yz$ .

(أ) نلاحظ أنه عند النقطة  $t = 1$  أى عند النقطة  $(1, 1, 1)$  يكون  $dx/dt = 1, dy/dt = 2t = 2,$

و  $dz/dt = 3t^2 = 3$ . وباستخدام المعادلة (٢) نجد معادلات المستقيم المماس  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$  وباستخدام المعادلة

(٢) فإننا نجد معادلة المستوى العمودي:  $(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = x + 2y + 3z - 6 = 0$ .

(ب) إن المنحنى المفروض يقطع المستوى  $yz$  عند النقطة التي يكون عندها  $x = t - 2 = 0$  أى عندما يكون  $t = 2$

فנקطة التقاطع إذن هي  $(0, 13, 16)$ . وعند هذه النقطة يكون  $dx/dt = 1, dy/dt = 6t = 12,$  و  $dz/dt = 6t^2 = 24$ .

ومعادلتا المستقيم المماس هما  $\frac{x}{1} = \frac{y-13}{12} = \frac{z-16}{24}$  ومعادلة المستوى العمودي هي:

$$x + 12(y - 13) + 24(z - 16) = x + 12y + 24z - 540 = 0.$$

٣ - استنتج المعادلات (٤) و (٥) التي تعطي المستوى المماس والمستقيم العمودي للسطح  $F(x, y, z) = 0$  عند النقطة

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ . انظر الشكل ٥٩ - ٢.

لتكن  $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$  المعادلات البارامترية لأي منحنى على السطح  $F(x, y, z) = 0$  ودارا بالنقطة  $P_0$ .

عندئذ يكون عند النقطة  $P_0$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

عل أن نحسب جميع المشتقات عند  $P_0$ .

تعبّر هذه العلاقة عن تعامد المستقيم المار بالنقطة  $P_0$  والذي أعداد اتجاهه (i) مع المستقيم المار بالنقطة  $P_0$

والذي أعداد اتجاهه (ii)  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right]$ . إن المجموعة (i) تتعلق بمماس المنحنى الذي يقع في المستوى المماس للسطح،

أما المجموعة (ii) فتعرف المستقيم العمودي على السطح عند النقطة  $P_0$  ومعادلتا هذا المستوى هما:

$$\frac{x - x_0}{\partial F / \partial x} = \frac{y - y_0}{\partial F / \partial y} = \frac{z - z_0}{\partial F / \partial z}$$

ومعادلة المستوى العمودي عند  $P_0$  هي:

$$\frac{\partial F}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z} (z - z_0) = 0$$

أوجد في كل من المسألتين ٤ - ٥ معادلات المستوى المماس والمستقيم العمودي للسطح

المفروض عند النقطة المفروضة.

$$x = 3x^2 + 2y^2 - 11; (2, 1, 3). \quad - 4$$

لنضع  $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - z - 11 = 0$ . وعند النقطة  $(2, 1, 3)$  يكون :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x = 12, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y = 4, \quad \text{و} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

ومعادلة المستوى المماس هي  $12(x-2) + 4(y-1) - (z-3) = 0$  أو  $12x + 4y - z = 25$ .

$$\text{ومعادلتا المستقيم المودي هما} \quad \frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}.$$

$$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz + 4x - 5z - 22 = 0; (1, -2, 1).$$

ويكون عند النقطة  $(1, -2, 1)$   $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y + 4 = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = 6y + 3x - 10z = -19$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z} = -8z - 10y - 5 = 7$ .

ومعادلة المستوى المماس هي  $0(x-1) - 19(y+2) + 7(z-1) = 0$  أو  $19y - 7z + 45 = 0$ .

$$\text{ومعادلتا المستقيم المودي هما} \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{-19} = \frac{z-1}{7}.$$

٦ - بين أن معادلة المستوى المماس للسطح  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  عند النقطة  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  هي :

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

$$\text{يكون عند النقطة } P_0 \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x_0}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y_0}{b^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2z_0}{c^2}.$$

$$\text{ومعادلة المستوى المماس هي} \quad \frac{2x_0}{a^2}(x-x_0) - \frac{2y_0}{b^2}(y-y_0) - \frac{2z_0}{c^2}(z-z_0) = 0.$$

$$\text{وهذه تأخذ الشكل} \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

٧ - بين أن السطحين :

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0 \quad \text{و} \quad F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$$

متماسان عند النقطة  $(2, 1, 1)$ .

المطلوب هو أن نبرهن وجود مستوى مماس مشترك للسطحين عند النقطة المذكورة

$$\text{لدينا عند } (2, 1, 1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x = 4, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 8y = 8, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -8z = -8$$

$$\text{و} \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 2x - 6 = -2, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 2y - 6 = -4, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = 2z + 2 = 4.$$

ربما أن مجموع أعداد الانحياز  $[4, 8, -8]$  و  $[-2, -4, 4]$  المستقيمين الموديين على السطحين متناسبتان

السطحين المستوى المماس المشترك :

$$1(x-2) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0 \quad \text{أو} \quad x + 2y - 2z = 2$$

٨ - بين أن السطحين  $F(x, y, z) = xy + yz - 4xz = 0$  و  $G(x, y, z) = 3x^2 - 5x + y = 0$  يتقاطعان

بزواوية قائمة عند النقطة  $(1, 2, 1)$  .

المطلوب هو أن نبرهن تعاد المستويين المماسين للسطحين عند النقطة المقروضة أو أن نبرهن أمراً مماثلاً وهو تعاد المبردين عند تلك النقطة .

عند النقطة  $(1, 2, 1)$  يكون  $\frac{\partial F}{\partial z} = y - 4x = -2$  ، و  $\frac{\partial F}{\partial y} = x + z = 2$  ، و  $\frac{\partial F}{\partial x} = y - 4z = -2$  ، ومنه

نجد أن مجموعة أعداد اتجاه المستقيم المبردى على السطح  $F(x, y, z) = 0$  هي  $[l_1, m_1, n_1] = [1, -1, 1]$  .

وعند النقطة  $(1, 2, 1)$  يكون  $\frac{\partial G}{\partial z} = 6z = 6$  ، و  $\frac{\partial G}{\partial y} = 1$  ، و  $\frac{\partial G}{\partial x} = -5$  ، ومنه نجد أن مجموعة أعداد اتجاه المستقيم

المبردى على السطح  $G(x, y, z) = 0$  هي  $[l_2, m_2, n_2] = [-5, 1, 6]$  .

وبما أن  $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 1(-5) + (-1)1 + 1(6) = 0$  ، فالمبردان متعامدان .

٩ - بين أن السطحين  $F(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 8z^2 - 36 = 0$  و  $G(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6 = 0$  يتقاطعان بزواوية قائمة .

لتكن  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  نقطة مشتركة على السطحين عند هذه النقطة يكون :

ومنه تكون  $\frac{\partial F}{\partial x} = 6x_0$  ،  $\frac{\partial F}{\partial y} = 8y_0$  ،  $\frac{\partial F}{\partial z} = 16z_0$  ، في مجموعة أعداد اتجاه المستقيم المبردى على

السطح عند  $P_0$  .

وبالمثل نجد أن  $[x_0, 2y_0, -4z_0]$  تمثل مجموعة أعداد اتجاه المستقيم المبردى على السطح  $G(x, y, z) = 0$  عند  $P_0$  ، وبما أن

$$\begin{aligned} 3x_0(x_0) + 4y_0(2y_0) + 8z_0(-4z_0) &= 3x_0^2 + 8y_0^2 - 32z_0^2 \\ &= 6(x_0^2 + 2y_0^2 - 4z_0^2) - (3x_0^2 + 4y_0^2 + 8z_0^2) = 6(G) - 36 = 0. \end{aligned}$$

إذن المبردان متعامدان

١٠ - استنتج المادلات (٧) ، (٨) التي تعطى المستقيم المماس للسطح الفراغى  $C: F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$  .

والمستوى المبردى عليه عند إحدى نقاطه  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  .

إن الاتجاهين  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right]$  و  $\left[ \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right]$  عند  $P_0$  عموديان على المستويين المماسين للسطحين  $F(x, y, z) = 0$  و  $G(x, y, z) = 0$  . ولذا فإن الاتجاه

$$\left[ \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \right]$$

مبردى على كل من هذين الاتجاهين ، فهو إذن مماس للسطح عند النقطة  $P_0$  . وعلى هذا تكون سادتك المستقيم المماس هما

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

ومعادلة المستوى المبردى هي :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} (z - z_0) = 0$$

١١ - أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى لمنحنى  $x^2 + y^2 + z^2 = 14, x + y + z = 6$  عند النقطة  $(1, 2, 3)$ .

لنضع  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$  و  $G(x, y, z) = x + y + z - 6 = 0$  فيكون عند النقطة  $(1, 2, 3)$

$$\begin{vmatrix} \partial F / \partial y & \partial F / \partial z \\ \partial G / \partial y & \partial G / \partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\begin{vmatrix} \partial F / \partial z & \partial F / \partial x \\ \partial G / \partial z & \partial G / \partial x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \begin{vmatrix} \partial F / \partial x & \partial F / \partial y \\ \partial G / \partial x & \partial G / \partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

ومن ثم نجد أن  $[1, -2, 1]$  هي أعداد اتجاه المماس ومعادلتها إذن هما  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$  ومعادلة المستوى العمودى

$$(x-1) - 2(y-2) + (z-3) = x - 2y + z = 0. \text{ هي}$$

### مسائل إضافية

١٢ - أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى لكل من المنحنيات التالية عند النقطة المفروضة .

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}; \quad 2x + 2y + 5z - 9 = 0 \quad \text{ج} \quad x = 2t, y = t^2, z = t^3, t = 1 \quad (أ)$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}; \quad x + y + z - 1 = 0 \quad \text{ج} \quad x = te^t, y = e^t, z = t; t = 0 \quad (ب)$$

$$x = z, y = 0; \quad x + z = 0 \quad \text{ج} \quad x = t \cos t, y = t \sin t, z = t; t = 0 \quad (د)$$

١٣ - بين أن المنحنيين  $(أ) x = 2 - t, y = -1/t, z = 2t^2$  و  $(ب) x = 1 + \theta, y = \sin \theta - 1, z = 2 \cos \theta$

يتقاطعان عند النقطة  $P(1, -1, 2)$  بشكل عمودى . استنتج معادلات المستقيم المماس ، والمستوى العمودى لكل من المنحنيين عند النقطة  $P$ .

$$\text{ج : (أ) } x - y - 4z + 6 = 0; \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}; \quad (ب) x + y = 0, z = 2; \quad x - y = 2, z = 2$$

١٤ - بين أن مماسات الحلزون  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$  تلاقى المستوى  $xy$  بنفس الزاوية

١٥ - بين أن طول المنحنى  $(أ)$  من النقطة  $t = t_0$  إلى النقطة  $t = t_1$  يعطى بـ :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

أوجد طول الحلزون الوارد فى المسألة ١٤ من  $t = 0$  إلى  $t = t_1$  . ج  $\sqrt{a^2 + b^2} t_1$

١٦ - أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى لكل من المنحنيات عند النقطة المذكورة إلى جانب كل منها :

$$(أ) (1, 1, 1) \quad x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 5, \quad 3x - 2y - z = 0; \quad (ب) (2, 2, 1) \quad 4z^2 = xy, \quad x^2 + y^2 = 8z;$$

$$(ب) (2, -3, 2) \quad 9x^2 + 4y^2 - 36z = 0, \quad 3x + y + z - z^2 - 1 = 0;$$

$$\text{ج : (أ) } 2x + 7y - 8z - 1 = 0; \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-1}{-8}; \quad (ب) x - y = 0, z - 1 = 0, \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1}, \quad x - y = 0$$

$$(ب) x + z - 4 = 0, y + 3 = 0; \quad \frac{x-2}{1} = \frac{z-2}{1}, \quad x + z - 4 = 0$$

١٧ - أوجد معادلات المستوى المماس والمستقيم السوى لسطوح المفروضة عند النقطة المذكورة إلى جانب كل منها .

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 14; (1, -2, 3) & \text{ج: } x - 2y + 3z = 14; \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3} \\
 (ب) \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2; (x_1, y_1, z_1) & \text{ج: } x_1 x + y_1 y + z_1 z = r^2, \frac{x-x_1}{x_1} = \frac{y-y_1}{y_1} = \frac{z-z_1}{z_1} \\
 (ج) \quad x^2 + 2z^2 = 3y^2; (2, -2, -2) & \text{ج: } x + 3y - 2z = 0; \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{-2} \\
 (د) \quad 2x^2 + 2xy + y^2 + z + 1 = 0; (1, -2, -3) & \text{ج: } z - 2y = 1; x - 1 = 0, \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-1} \\
 (هـ) \quad z = xy; (3, -4, -12) & \text{ج: } 4x - 3y + z = 12; \frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+12}{1}
 \end{array}$$

١٨ - (أ) بين أن مجموع ما يقطعه المستوى المماس لسطح  $x^{1/3} + y^{1/3} + z^{1/3} = a^{1/3}$  عند أية نقطة منه يساوى  $a$  .  
 (ب) بين أن الجذر التربيعي لمجموع مربعات ما يقطعه المستوى المماس لسطح  $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$  عند أية نقطة منه يساوى  $a$  .

١٩ - بين أن كلا من زوجي السطوح التاليين مماس عند النقطة المذكورة :

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 18, xy = 9; (3, 3, 0) \\
 (ب) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 6z + 24 = 0, x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9; (2, 1, 1)
 \end{array}$$

٢٠ - بين أن كلا من زوجي السطوح التاليين متعامد عند النقطة المفروضة .

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 8, 4x^2 - y^2 + 2z^2 = 14; (2, 2, 1) \\
 (ب) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 50, x^2 + y^2 - 10z + 25 = 0; (3, 4, 5)
 \end{array}$$

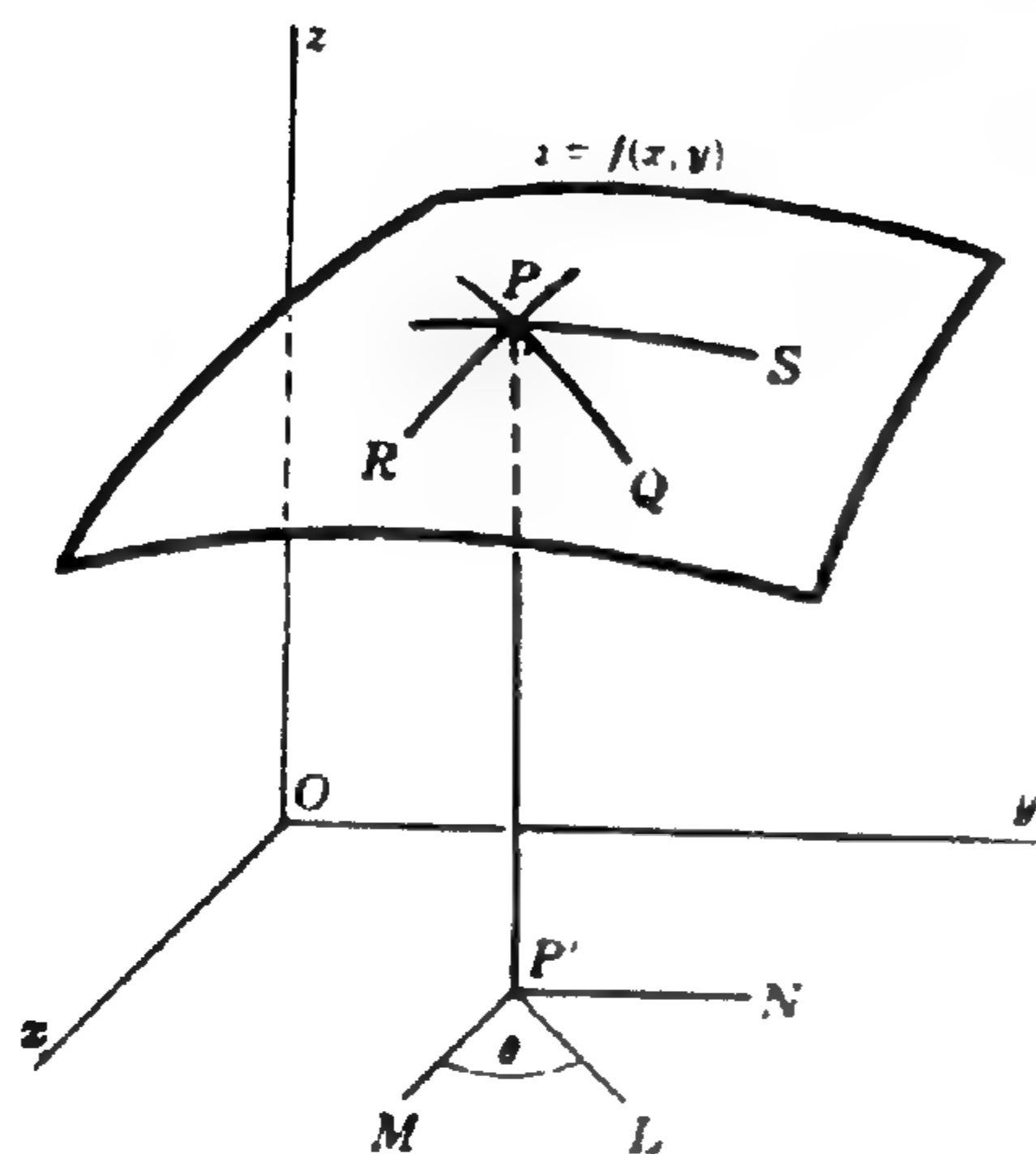
٢١ - بين أن كل سطح من السطوح الثلاثة (i)  $14x^2 + 11y^2 + 8z^2 = 66$  ، (ii)  $3z^2 - 5x + y = 0$  ، (iii)  $xy + yz - 4zx = 0$  عمودى على السطحين الآخرين عند النقطة (1, 2, 1) .



# الفصل الستون

## القيم العظمى والصغرى

### للمشتقات المتجهة



( شكل ٦٠ - ١ )

**المشتقات المتجهة .** يمر بأية نقطة  $P(x, y, z)$  من السطح  $z = f(x, y)$  مستويان موازيان للمستويين الاحداثيين  $xOz$  و  $yOz$  ويقطعان السطح في القوسين  $PR$  و  $PS$  والمستوى  $xOy$  في المستقيمين  $P'M$  و  $P'N$  كما هو مبين في الشكل ٦٠ - ١ .

إن المشتقتين الجزئيتين  $\partial z / \partial x$  و  $\partial z / \partial y$  عند النقطة  $P$  أو عند النقطة  $P'(x, y)$  تعطيان على الترتيب معدل تغير  $z = P'P$  عندما نثبت  $y$  أو نثبت  $x$  ، أى أنهما تعطياننا معدل تغير  $z$  في الاتجاهين الموازيين لمحورين  $x$  و  $y$  أى ميل المنحنيين  $PR$  و  $PS$  عند النقطة  $P$  .

لننظر بعد ذلك في مستوى ، مار بالنقطة  $P$  عمودى على المستوى  $xOy$  وبصنع زاوية  $\theta$  مع المحور  $x$  . ولنفرض أن هذا المستوى يقطع السطح في المنحنى  $PQ$  ويقطع المستوى  $xOy$  في المستقيم  $P'L$  .

إن المشتقة المتجهة لـ  $f(x, y)$  عند  $P$  (أو عند  $P'$ ) في الاتجاه  $\theta$  تعطى بـ

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$$

والمشتقة المتجهة تعطى معدل تغير  $z = P'P$  في اتجاه  $PL$  أو تعطى ميل المنحنى  $PQ$  عند  $P$  .

إن المشتقة المتجهة عند موضع  $P$  هى دالة في  $\theta$  . فإذا حدث أن وجد اتجاه تكون فيه المشتقة المتجهة عند  $P$  لها قيمة عظمى نسبية فإننا نسمى هذه القيمة تدرج  $f(x, y)$  عند  $P$  . فالتدرج إذن هو ميل المماس الأكثر انحداراً للمنحنى يمكن رسمه على السطح عند  $P$  .

انظر المسائل ١ - ٨

تعطى المشتقة المتجهة في الاتجاه  $(\alpha, \beta, \gamma)$  لدالة  $w = F(x, y, z)$  عند  $P(x, y, z)$  بـ

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos \gamma$$

انظر المسألة ٩

**القيم العظمى والصغرى النسبية** - لنفرض أن  $z = f(x, y)$  قيمة عظمى (أو صغرى) نسبية عند  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ . وأي مستوى مار به  $P_0$  وعمودي على المستوى  $xOy$  يقطع السطح في منحنى له قيمة عظمى (أو صغرى) عند النقطة  $P_0$ . أى أن المشتقة المتجهة  $\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$  للدالة  $z = f(x, y)$  لا بد أن تساوى صفراً عند النقطة  $P_0$  مهما كانت قيمة  $\theta$ . إذن عند  $P_0$  يكون  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  و  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

والنقطة التي يكون للدالة  $z = f(x, y)$  عندها قيمة عظمى (أو صغرى) نسبية، إذا وجدت هذه النقطة هي من بين النقط  $(x_0, y_0)$  التي ينعدم عندها  $\frac{\partial f}{\partial x}$  و  $\frac{\partial f}{\partial y}$  في آن واحد. ونميز الحالات المختلفة نقبل دون برهان ما يلي:

ليكن  $z = f(x, y)$  ولنفرض أن لهذه الدالة مشتقات جزئية أولى وثانية في منطقة معينة تحوى النقطة  $(x_0, y_0, z_0)$  التي عندها  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  و  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  فإذا كان  $\Delta = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 > 0$  عند  $P_0$  فإنه يكون  $z = f(x, y)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0 \quad \text{إذا كان } P_0 \text{ قيمة صغرى نسبية عند } P_0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0 \quad \text{إذا كان } P_0 \text{ قيمة عظمى نسبية عند } P_0$$

أما إذا كان  $\Delta > 0$  فليس للدالة عند  $P_0$  قيمة عظمى أو قيمة صغرى. وإذا كانت الحالة  $\Delta = 0$  نكون طبيعة النقطة المخرجة  $P_0$  غير معينة.

انظر المسائل ١٠ - ١٥

### مسائل محلولة

١ - لتكن  $P''(x + \Delta x, y + \Delta y)$  نقطة ثانية على  $P'L$  في الشكل ١٠ - ١ ولترمز بـ  $\Delta s$  لمد  $P'P''$

لنفرض أن للدالة  $z = f(x, y)$  مشتقات جزئية متصلة تكون عندها استناداً إلى المسألة ٢٠ من الفصل ٥٧:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

حيث يتول كل من  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$  إلى الصفر عندما يتول كل من  $\Delta x$  و  $\Delta y$  إلى الصفر. ويكون متوسط معدل تغير  $z$  بين النقطتين  $P'$  و  $P''$  هو:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s} + \epsilon_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} + \epsilon_2 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s} \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta + \epsilon_1 \cos \theta + \epsilon_2 \sin \theta \end{aligned}$$

حيث  $\theta$  الزاوية التي يصنعها المستقيم  $P'P''$  مع المحور  $x$ .

لنجعل الآن  $P' \rightarrow P''$  على  $P'L$  فنحصل على المعدل اللحظي لتغير  $z$  أى على المشتقة المتجهة

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$$

٧- أوجد مشتقة  $z = x^2 - 6y^2$  عند النقطة  $P'(7,2)$  في الاتجاه  $\theta = 45^\circ$  (أ)  $\theta = 135^\circ$  (ب)

إن المشتقة المتجهة عند أية نقطة  $P'(x, y)$  في الاتجاه  $\theta$  هي

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta = 2x \cos \theta - 12y \sin \theta$$

(أ) عند النقطة  $P'(7,2)$  في الاتجاه  $\theta = 45^\circ$  يكون  $dz/ds = 2 \cdot 7(\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 12 \cdot 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -5\sqrt{2}$ .

(ب) وعند النقطة  $P'(7,2)$  في الاتجاه  $\theta = 135^\circ$  يكون  $dz/ds = 2 \cdot 7(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 12 \cdot 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -19\sqrt{2}$ .

٨- أوجد المشتقة المتجهة لـ  $z = y$  عند النقطة  $P'(0,3)$  في الاتجاه  $\theta = 30^\circ$  (أ)  $\theta = 120^\circ$  (ب)

$$\frac{dz}{ds} = ye^x \cos \theta + e^x \sin \theta$$

(أ) عند النقطة  $(0,3)$  في الاتجاه  $\theta = 30^\circ$  يكون  $dz/ds = 3 \cdot 1(\frac{1}{2}\sqrt{3}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + 1)$ .

(ب) وعند النقطة  $(0,3)$  في الاتجاه  $\theta = 120^\circ$  يكون  $dz/ds = 3 \cdot 1(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{3})$ .

٩- تعطى درجة الحرارة  $T$  لصفحة دائرية سائجة عند أى موضع منها  $(x, y)$  بـ  $T = \frac{64}{x^2 + y^2 + 2}$ . بفرض أن نقطة الأصل في مركز الصفحة. أوجد معدل التغير لـ  $T$  في الاتجاه  $\theta = \pi/3$  عند الموضع  $(1, 2)$

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{64(2x)}{(x^2 + y^2 + 2)^2} \cos \theta - \frac{64(2y)}{(x^2 + y^2 + 2)^2} \sin \theta$$

وعند النقطة  $(1, 2)$  في الاتجاه  $\theta = \pi/3$  يكون  $\frac{dT}{ds} = -\frac{128}{49} \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{256}{49} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{64}{49}(1 + 2\sqrt{3})$ .

١٠- يعطى الجهد الكهربائي  $V$  عند أى نقطة  $(x, y)$  بـ  $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ . أوجد معدل تغير  $V$  عند النقطة  $(3, 4)$  في الاتجاه نحو النقطة  $(2, 6)$ .

$$\frac{dV}{ds} = \frac{x}{x^2 + y^2} \cos \theta + \frac{y}{x^2 + y^2} \sin \theta$$

بما أن  $\theta$  زاوية تقع في الربع الثاني و  $\theta = \frac{6-4}{2-3} = -2$ ,  $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$  و  $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . وبالتالي نحصل في الاتجاه المذكور وعند النقطة  $(3,4)$  على :

$$\frac{dV}{ds} = \frac{3}{25} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{4}{25} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{25}$$

١١- أوجد الصرج لسطح ونقطة المسألة ٢.

لدينا عند النقطة  $(7, 2)$  وفي الاتجاه  $\theta$  :  $dz/ds = 14 \cos \theta - 24 \sin \theta$ .

لإيجاد قيمة  $\theta$  التي تجعل  $dz/ds$  نهاية عظمى نضع :  $\frac{d}{d\theta} \left( \frac{dz}{ds} \right) = -14 \sin \theta - 24 \cos \theta = 0$ .

ومن نجد  $\tan \theta = -24/14 = -12/7$  وبالتالي فإن الزاوية  $\theta$  في الربع الثاني أو الرابع . فإذا كانت في الربع الثاني يكون  $\sin \theta = 12/\sqrt{193}$  و  $\cos \theta = -7/\sqrt{193}$  . وإذا كانت في الربع الرابع يكون  $\sin \theta = -12/\sqrt{193}$  و  $\cos \theta = 7/\sqrt{193}$  .

وبما أن المقدار  $\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{dz}{ds} \right) = \frac{d}{d\theta} (-14 \sin \theta - 24 \cos \theta) = -14 \cos \theta + 24 \sin \theta$  سالب لزاوية الربع الرابع فإن التدرج هو  $2\sqrt{193}$   $\frac{dz}{ds} = 14 \left( \frac{7}{\sqrt{193}} \right) - 24 \left( -\frac{12}{\sqrt{193}} \right) = 2\sqrt{193}$  والاتجاه هو  $\theta = 300^\circ 15'$  .  
٧- أوجد التدرج لسطح ونقطة المسألة ٢ .

لدينا عند النقطة  $(0, 3)$  وفي الاتجاه  $\theta$  ،  $dz/ds = 3 \cos \theta + \sin \theta$  .

لإيجاد قيمة  $\theta$  التي تجعل  $dz/ds$  نهاية عظمى نضع  $\frac{d}{d\theta} \left( \frac{dz}{ds} \right) = -3 \sin \theta + \cos \theta = 0$  .

ومن نجد  $\tan \theta = 1/3$  وبالتالي فإن الزاوية  $\theta$  في الربع الأول أو الثالث .

وبما أن المقدار  $\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{dz}{ds} \right) = \frac{d}{d\theta} (-3 \sin \theta + \cos \theta) = -3 \cos \theta - \sin \theta$  سالب لزاوية الربع الأول فإن التدرج هو  $\sqrt{10}$   $\frac{dz}{ds} = 3 \left( \frac{3}{\sqrt{10}} \right) + \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$  والاتجاه هو  $\theta = 18^\circ 26'$  .

٨- بين أن  $V$  في المسألة ٥ تتغير بأقصى سرعة لها على طول المستويات القطرية الخارجة من نقطة الأصل :

لدينا في الاتجاه  $\theta$  وعند نقطة  $(x_1, y_1)$  :  $\frac{dV}{ds} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} \cos \theta + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \sin \theta$  .

وعندما  $\frac{d}{d\theta} \left( \frac{dV}{ds} \right) = -\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} \sin \theta + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \cos \theta = 0$  ، يكون  $\tan \theta = \frac{y_1/(x_1^2 + y_1^2)}{x_1/(x_1^2 + y_1^2)} = \frac{y_1}{x_1}$  .

والزاوية  $\theta$  هي زاوية ميل المستقيم الذي يصل نقطة الأصل بالنقطة  $(x_1, y_1)$  .

٩- أوجد المشتقة المتجهة لـ  $F(x, y, z) = xy + 2xz - y^2 + z^3$  عند النقطة  $(1, -2, 1)$  على طول المنحنى

$z = t^3$  ،  $y = t - 3$  ،  $x = t$  وفي جهة تزايد  $z$  .

إن مجموعة أعداد الاتجاه لمماس المنحنى عند  $(1, -2, 1)$  هي  $[1, 1, 2]$  وجيوب تمام الاتجاه هي  $[1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}]$  والمشتقة المطلوبة هي :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos \gamma = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{13\sqrt{6}}{6}$$

١٠- أبحث في القيم العظمى والصغرى لـ  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$

أن الشرطين  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0$  و  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6 = 0$  يتحققان عندما  $x = 2$  و  $y = -3$

وبما أن  $f(x, y) = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 25 - 4 - 9 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + 12$  فإنه

لترافح أن  $f(2, -3) = 12$  قيمة صغرى لذلك .

ومن الناحية الهندسية تمثل النقطة  $(2, -3, 12)$  أدنى نقطة لسطح  $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$  .

١١- أبحث في القيم العظمى والصغرى لـ  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$

أن الشرطين  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x + y) = 0$  و  $\frac{\partial f}{\partial y} = 3(y + x) = 0$  يتحققان عندما  $x = 0$  ،  $y = 0$

وعندما  $x = -1, y = -1$  وعند النقطة  $(0, 0)$  يكون  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0$ . وبالتالي فإن  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9 > 0$  والنقطة  $(0, 0)$  ليست قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

أما عند النقطة  $(-1, -1)$  فيكون  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6$  وبالتالي فإن  $-27 < 0$ ، فإن  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ ، حيث أن  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ ، فإن  $f(-1, -1) = 1$  تمثل قيمة عظمى للدالة.

١٢ - قسم العدد 120 إلى ثلاثة أقسام بحيث يكون مجموع حاصل ضرب كل اثنين منها نهاية عظمى.

لتكن  $x$  و  $y$  و  $(x + y)$  الأقسام الثلاثة.

إذن الدالة التي نبحث عن قيمها العظمى هي  $S = xy + (x + y)(120 - x - y)$ .

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - 2x - y, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - x - 2y.$$

وعندما يكون  $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0$  نجد  $2x + y = 120$  و  $x + 2y = 120$  والأعداد الثلاثة هي  $40, 40, 40$ ،  $x = 40, y = 40, 120 - (x + y) = 40$  و  $S = 3 \cdot 40^2 = 4800$ . لتقسيم 1, 1, 118 يكون  $S = 237$  ومن الواضح إذن أن  $S = 4800$  قيمة عظمى.

١٣ - أوجد أقرب نقطة لنقطة الأصل في المستوى  $2x - y + 2z = 16$

لتكن  $(x, y, z)$  النقطة المطلوبة فمعدنذ يكون مربع البعد عن نقطة الأصل  $D = x^2 + y^2 + z^2$ ، ولكن بما أن  $2x - y + 2z = 16, y = 2x + 2z - 16$  فإن  $D = x^2 + (2x + 2z - 16)^2 + z^2$ . وبمطينا الشرطان  $\frac{\partial D}{\partial x} = 2x + 4(2x + 2z - 16) = 0$  و  $\frac{\partial D}{\partial z} = 4(2x + 2z - 16) + 2z = 0$  نحصل على  $5x + 4z = 32, 4x + 5z = 32$  والمعادلتين  $x = z = 32/9$ ، وبما أنه من المعلوم أن النقطة التي نجعل  $D$  أصغر ما يمكن موجودة فإن  $(32/9, -16/9, 32/9)$  هي تلك النقطة.

١٤ - بين أن متوازي المستطيلات الذي حجمه  $V$  أكبر ما يمكن ومساحة سطحه ثابتة هو مكعب.

لتكن  $x, y, z$  أبعاد متوازي المستطيلات. عندئذ يكون  $V = xyz$  و  $S = 2(xy + yz + zx)$ .

يمكن حل العلاقة الثانية بالنسبة لـ  $z$  والتعويض بعد ذلك في الأولى لنحصل على  $V$  كدالة في  $x$  و  $y$  ولكننا نفضل أن نتجاوز هذه الخطوة ونعتبر  $z$  دالة في  $x$  و  $y$  عندئذ يكون:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz + xy \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz + xy \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0 = 2\left(y + z + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 0 = 2\left(x + z + x \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ومن المعادلتين الأخيرتين نجد  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}$  و  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}$ .

وعلى هذا فإن الشرطين  $\frac{\partial V}{\partial x} = yz - \frac{xy(y+z)}{x+y} = 0$  و  $\frac{\partial V}{\partial y} = xz - \frac{xy(x+z)}{x+y} = 0$  يأخذان الشكل  $x^2(z-y) = 0$  و  $y^2(z-x) = 0$  ومنه نجد  $x = y = z$  وهو المطلوب.



١٥ - أوجد الحجم  $V$  لأكبر متوازي مستطيلات يمكن رسمه داخل مجسم القطع الناقص  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

لتكن  $P(x, y, z)$  رأس متوازي المستطيلات الواقع في الثمن الأول عند  $V = 8xyz$ .

لنعتبر  $z$  دالة في المتغيرين المستقلين  $x$  و  $y$  معرفة بمعادلة الجسم. عندئذ يكون شرط القيمة العظمى هما :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz + xy \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz + xy \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{ومن معادلة الجسم نحصل على} \quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

وبخلاف  $\partial z / \partial x$  ،  $\partial z / \partial y$  من هاتين المعادلتين والمعادلة (١) نحصل على

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz - \frac{c^2 x^2 y}{a^2 z}\right) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz - \frac{c^2 x^2 y}{a^2 z}\right) = 0$$

$$\text{ومن هنا نجد أخيراً : (٢) } \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

ومن (٢) ومعادلة الجسم نجد  $z = c\sqrt{3}/3$  ، و  $y = b\sqrt{3}/3$  ، و  $x = a\sqrt{3}/3$  وعلى هذا يكون :

$$V = 8xyz = (8\sqrt{3}/9)abc$$

### مسائل إضافية

١٦ - أوجد المشتقات الاتجاهية للدوال التالية عند النقطة المفروضة في الاتجاه المذكور إلى جانب كل منها :

- ( أ )  $z = x^2 + y^2 + 3xy$  ،  $(3, 1)$  ،  $\theta = \pi/3$  ، ( ب )  $z = x^2 + y^2 - 3xy$  ،  $(2, 1)$  ،  $\theta = \arctan 2/3$  ،  
( ج )  $z = y + x \cos xy$  ،  $(0, 0)$  ،  $\theta = \pi/3$  ، ( د )  $z = 2x^2 + 3xy - y^2$  ، عند النقطة  $(1, -1)$  ونحو النقطة  $(1, 2)$

$$\text{ج : ( أ ) } \frac{1}{2}(\pi + 5\sqrt{3}) \quad ( ب ) \quad 21\sqrt{13}/13 \quad ( ج ) \quad \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \quad ( د ) \quad 11\sqrt{5}/5$$

١٧ - أوجد تدرج كل من دوال المسألة ١٦ عند النقطة المفروضة :

$$\text{ج : ( أ ) } \sqrt{74} \quad ( ب ) \quad 3\sqrt{10} \quad ( ج ) \quad \sqrt{2} \quad ( د ) \quad \sqrt{26}$$

١٨ - بين أن تدرج الدالة  $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  من المسألة ٨ ثابتاً على أية دائرة  $x^2 + y^2 = r^2$ .

١٩ - لدينا مضخة بثلة  $z = 8 - 4x^2 - 2y^2$  أوجد ( أ ) اتجاه أكبر ميل عند  $(1, 1, 2)$  ، و ( ب ) اتجاه خط المنسوب ( حيث يكون  $z$  ثابتاً ) لاحظ أن الاتجاهين متعامدين ( أ )  $\arctan \frac{1}{2}$  في الربع الثالث ( ب )  $\arctan -2$

٢٠ - بين أن مجموع مربعي مشتقي  $z = f(x, y)$  عند أية نقطة من السطح في اتجاهين متعامدين ، ثابت ، وأنه يساوى مربع التدرج .



٢١- بفرض أن  $z = f(x, y)$  و  $w = g(x, y)$  بحيث يكون  $\partial z / \partial y = -\partial w / \partial x$  و  $\partial z / \partial x = \partial w / \partial y$  فإذا كان  $\theta_1, \theta_2$  اتجاهين متعامدين فيين أنه عند أية نقطة  $P(x, y)$  يكون  $\partial z / \partial \theta_1 = -\partial w / \partial \theta_1$  و  $\partial z / \partial \theta_2 = \partial w / \partial \theta_2$ .

٢٢- أوجد مشتقات الدوال التالية عند النقطة والاتجاه المذكور إلى جانب كل منها.

(أ)  $[1, -2, 2], (2, 1, 3), xy^2z$  ، (ب)  $x^2 + y^2 + z^2$  عند النقطة  $(1, 1, 1)$  ونحو النقطة  $(2, 3, 4)$

(ج)  $x^2 + y^2 - 2xz$  عند النقطة  $(1, 2, 3)$  وعلى  $3x^2 - y^2 + 3z = 0$  ،  $x^2 + y^2 - 2xz = 6$  وفي جهة تزايد  $z$

ج : (أ)  $-17/3$  (ب)  $6\sqrt{14}/7$  (ج)  $0$

٢٣- ابحث في القيم العظمى والصغرى لكل من الدوال التالية :

(أ)  $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$  ج : قيمة عظمى  $= 2$  عندما  $x = 1, y = 2$

(ب)  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  ج : قيمة صغرى  $= -1$  عندما  $x = 1, y = 1$

(ج)  $z = x^3 + 2xy + 2y^2$  ج : قيمة صغرى  $= 0$  عندما  $x = 0, y = 0$

(د)  $z = (x - y)(1 - xy)$  ج : لا يوجد قيم عظمى أو صغرى

(هـ)  $z = 2x^2 + y^2 + 6xy + 10x - 6y + 5$  ج : لا يوجد قيم عظمى أو صغرى

(و)  $z = 3x - 3y - 2x^3 - xy^3 + 2x^2y + y^3$  ج : قيمة صغرى  $= -\sqrt{6}$  عندما  $x = -\sqrt{6}/6, y = \sqrt{6}/3$

قيمة عظمى  $= \sqrt{6}$  عندما  $x = \sqrt{6}/6, y = -\sqrt{6}/3$

(ز)  $z = xy(2x + 4y + 1)$  ج : قيمة عظمى  $1/216$  عندما  $x = -1/6, y = -1/12$

٢٤- أوجد الأعداد الموجبة  $x, y, z$  بحيث يكون :

(أ)  $x + y + z = 18$  و  $x, y, z$  نهاية عظمى ، (ب)  $xyz = 27$  و  $x + y + z$  نهاية صغرى ،

(ج)  $x + y + z = 12$  ،  $xyz^2z^3$  نهاية عظمى . (د)  $x + y + z = 20$  و  $xyz^2$  نهاية عظمى .

ج : (أ)  $x = y = z = 6$  ، (ب)  $x = y = z = 3$  ، (ج)  $x = y = 5, z = 10$  ، (د)  $x = 2, y = 4, z = 6$

٢٥- أوجد القيمة الصغرى لمربع البعد بين نقطة الأصل والمستوى  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

ج :  $D^2 / (A^2 + B^2 + C^2)$

٢٦- (أ) لتفرض أن مساحة سطح صندوق على شكل متوازي مستطيلات مكشوف من أعلى تساوى  $12 \text{ m}^2$  . لتوجد أعظم حجم ممكن (ب) لتفرض أن حجم صندوق على شكل متوازي مستطيلات مكشوف من أعلى يساوى  $32 \text{ m}^3$  . أوجد أصغر مساحة سطح له .

ج : (أ)  $4 \text{ m}^2$  (ب)  $48 \text{ m}^2$

٢٧ - أوجد أقرب نقطة من  $z = xy - 1$  لنقطة الأصل .

ج :  $(0, 0, -1)$

٢٨ - أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة  $(1, 1, 2)$  ويقطع من المحاور الثلاثة أصغر حجم ممكن .

ج :  $2x + 2y + z = 6$  .

٢٩ - عين قيم  $p$  و  $q$  بحيث يكون المجموع  $S$  لمربعات الأبعاد الرأسية لنقط  $(2, 5)$  و  $(1, 3)$  و  $(0, 2)$  من المستقيم  $y = px + q$  أصغر ما يمكن .

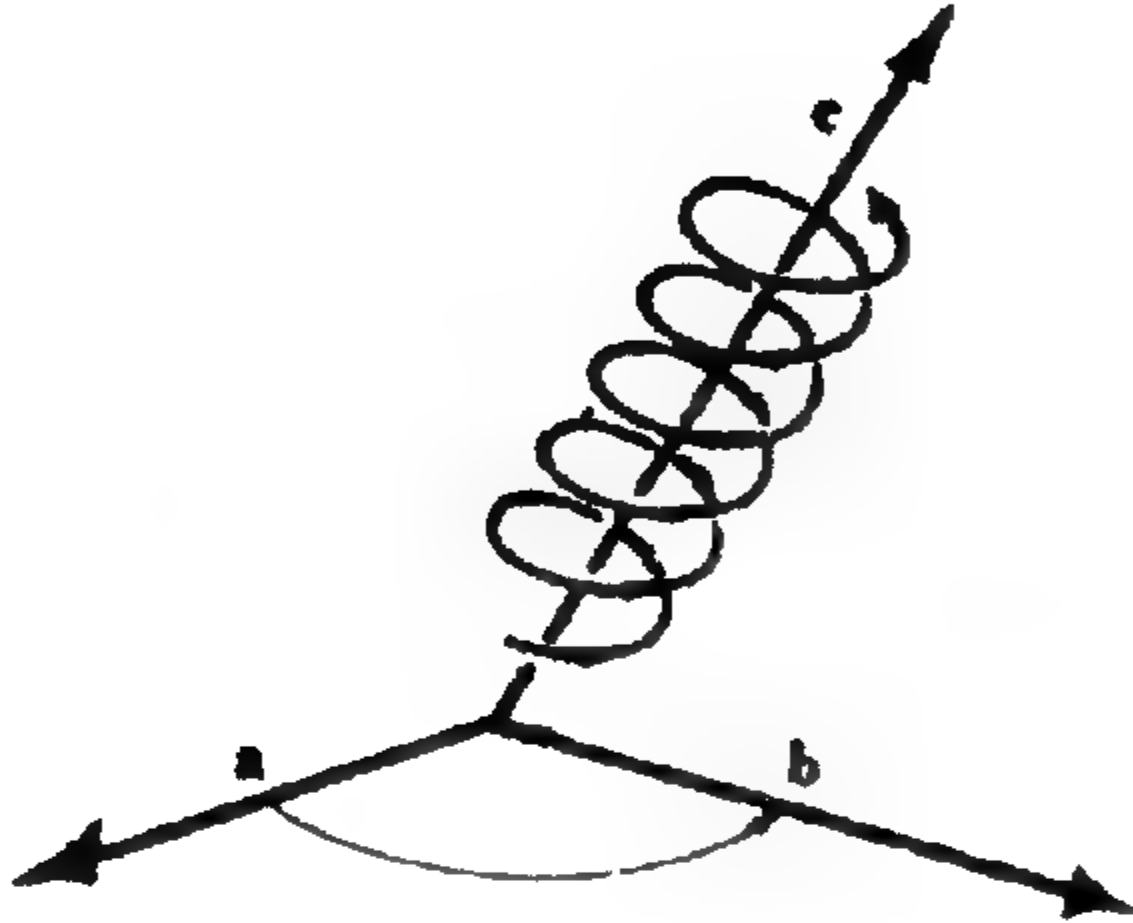
إرشاد أن :  $S = (q - 2)^2 + (p + q - 3)^2 + (2p + q - 5)^2$  .

ج :  $p = 3/2, q = 11/6$  .

# الفصل الحارى والسرون

## المتجهات فى الفراغ

ان دراسة الهندسة التحليلية المستوية : تنمذ إذا ما استخدمنا طرق المتجهات وذلك بسبب الهيمنة التقليدية على الموضوع الناشئ عن مفهوم ميل المستقيم. وعلى العكس من ذلك فإن تبسيطات هامة تطرأ على دراسة الهندسة التحليلية الفراغية باستخدام المتجهات .



شكل ٦١ - ١

نقول عن ثلاثة متجهات  $a, b, c$  ليست واقعة فى مستوى واحد وليس فيها متجهان متوازيان ، ومنبئة من نقطة مشتركة إنها تشكل مجموعة يمينية أو ثلاثية يمينية إذا كان للمتجه  $c$  جهة تقدم لولبية يمينية عندما تدور الزاوية الصغيرة من  $a$  إلى  $b$  كما هو مبين فى الشكل ٦١ - ١ . يتضح عندئذ أن جهة  $b$  ستكون جهة تقدم البريمة اليمنى عندما تدور من  $c$  إلى  $a$  وإن جهة  $a$  هى جهة تقدم البريمة عندما تدور من  $b$  إلى  $c$  .

لنفرض أننا اخترنا مجموعة محاور احداثية يمينية فى الفراغ وأنها اتخذنا  $i, j, k$  متجهات وحدة فى الاتجاه الموجب للمحاور  $x, y, z$  على الترتيب ، كما هو مبين فى الشكل ٦١ - ٢ عندئذ يمكن ، بشكل مواز لما تقدم فى الفصل ١٨ أن نكتب أى متجه  $a$  بالشكل :

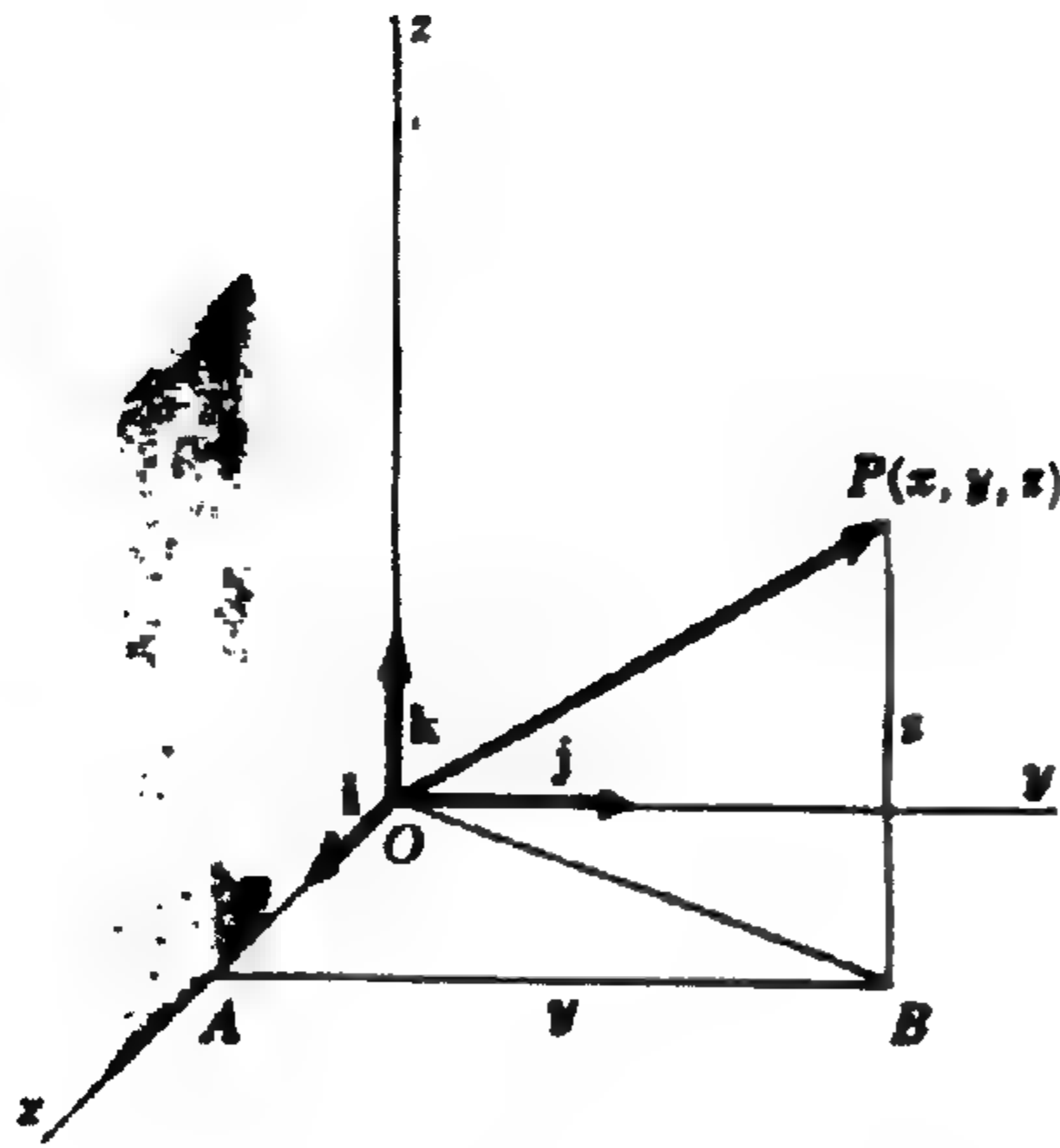
$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

بينما يمكن ، إذا كانت  $P(x, y, z)$  نقطة عامة فى الفراغ ، أن نكتب متجه الموضع  $r$  للنقطة  $P$  بالشكل :

$$r = OP = OB + BP = OA + AB + BP \quad (1) \\ = xi + yj + zk$$

بالإضافة لذلك فإن الجبر الذى قلناه فى الفصل ١٨ يصلح هنا كذلك مع تغييرات بسيطة كالتى يستلزمها اختلاف الأبعاد المطلوبة فثلا إذا كان  $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$  ،  $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$  فإن :

$$ka = ka_1 i + ka_2 j + ka_3 k \text{ حيث } k \text{ أى مقدار عسدى .} \\ a = b \text{ إذا (وإذا فقط) كان : } a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3 \\ a \pm b = (a_1 \pm b_1)i + (a_2 \pm b_2)j + (a_3 \pm b_3)k$$



شكل ٦١ - ٢

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta, \quad \text{حيث } \theta \text{ هي الزاوية الصغرى بين } \mathbf{a} \text{ و } \mathbf{b}$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1; \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  إذا كان  $\mathbf{a} = 0$  أو  $\mathbf{b} = 0$  أو  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  متعامدين .

ومن (١) نستنتج البعد بين النقطة  $P(x, y, z)$  ونقطة الأصل :

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (١-٢)$$

وإذا كانت  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  و  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  نقطتين (أنظر الشكل ٦١-٢) فإن :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 &= \mathbf{P}_1 \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{P}_2 \\ &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

ومنـه يكون :

$$|\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (٢-٢)$$

وهى الصيغة الشائعة التى تعطى المسافة بين نقطتين .

أنظر المسائل ١ - ٢

**جيوب تمام اتجاه متجه :** ليكن لدينا المتجه  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  ولنفرض أنه يصنع الزوايا  $\alpha, \beta, \gamma$  مع المحاور  $x, y, z$  الموجبة على الترتيب ، كما هو مبين فى الشكل ٦١-٤ لدينا إذن :

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{i}| |\mathbf{a}| \cos \alpha = |\mathbf{a}| \cos \alpha$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \beta, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \gamma$$

ومنـه ينتج

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

وهذه هى جيوب تمام اتجاه  $\mathbf{a}$  وبما أن :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\mathbf{a}|^2} = 1$$

فإن المتجه  $\mathbf{u} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$  هو متجه وحدة مواز

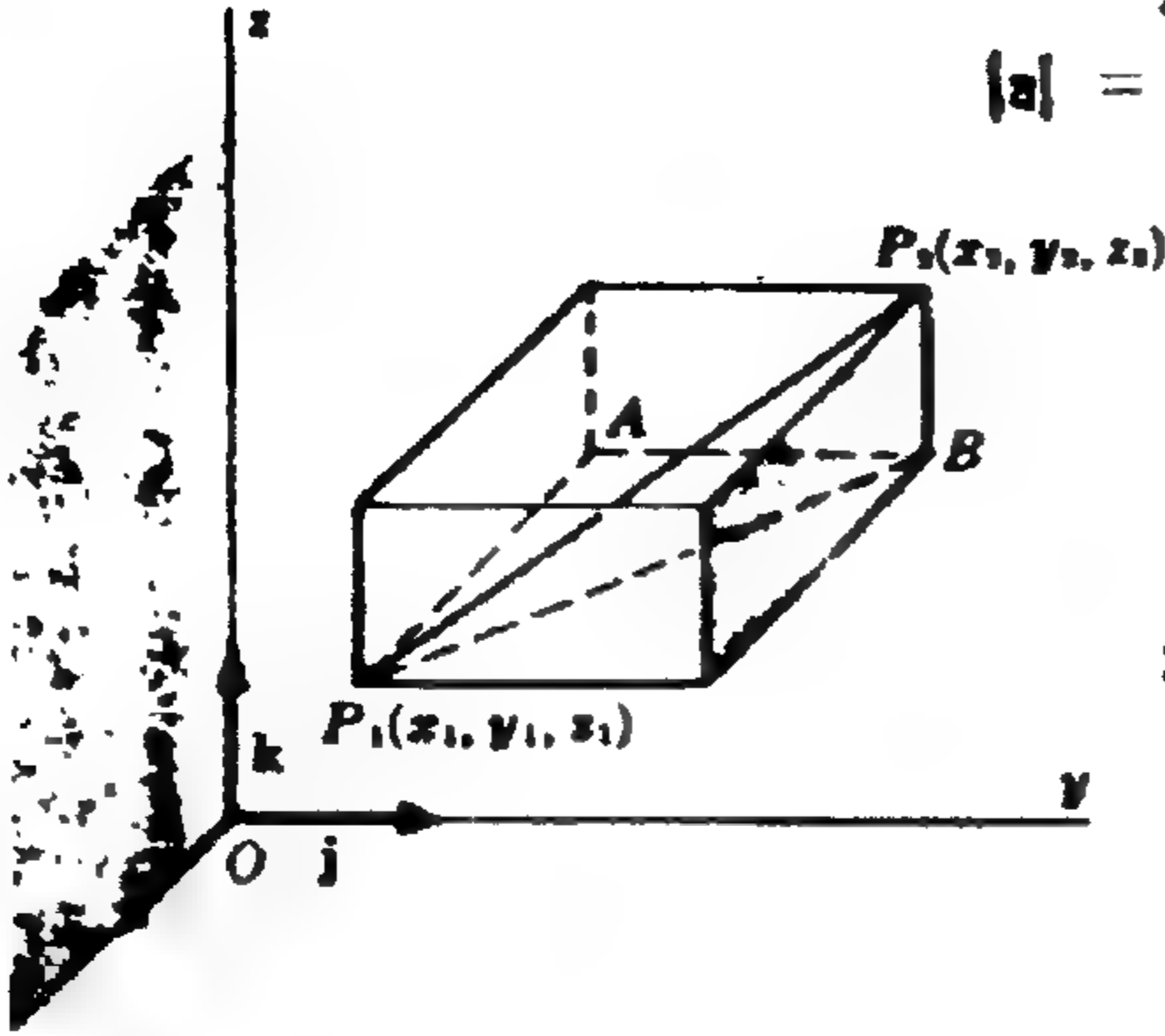
لـمتجه  $\mathbf{a}$  .

**المتجه العمودى على متجهين مفروضين :** ليكن :

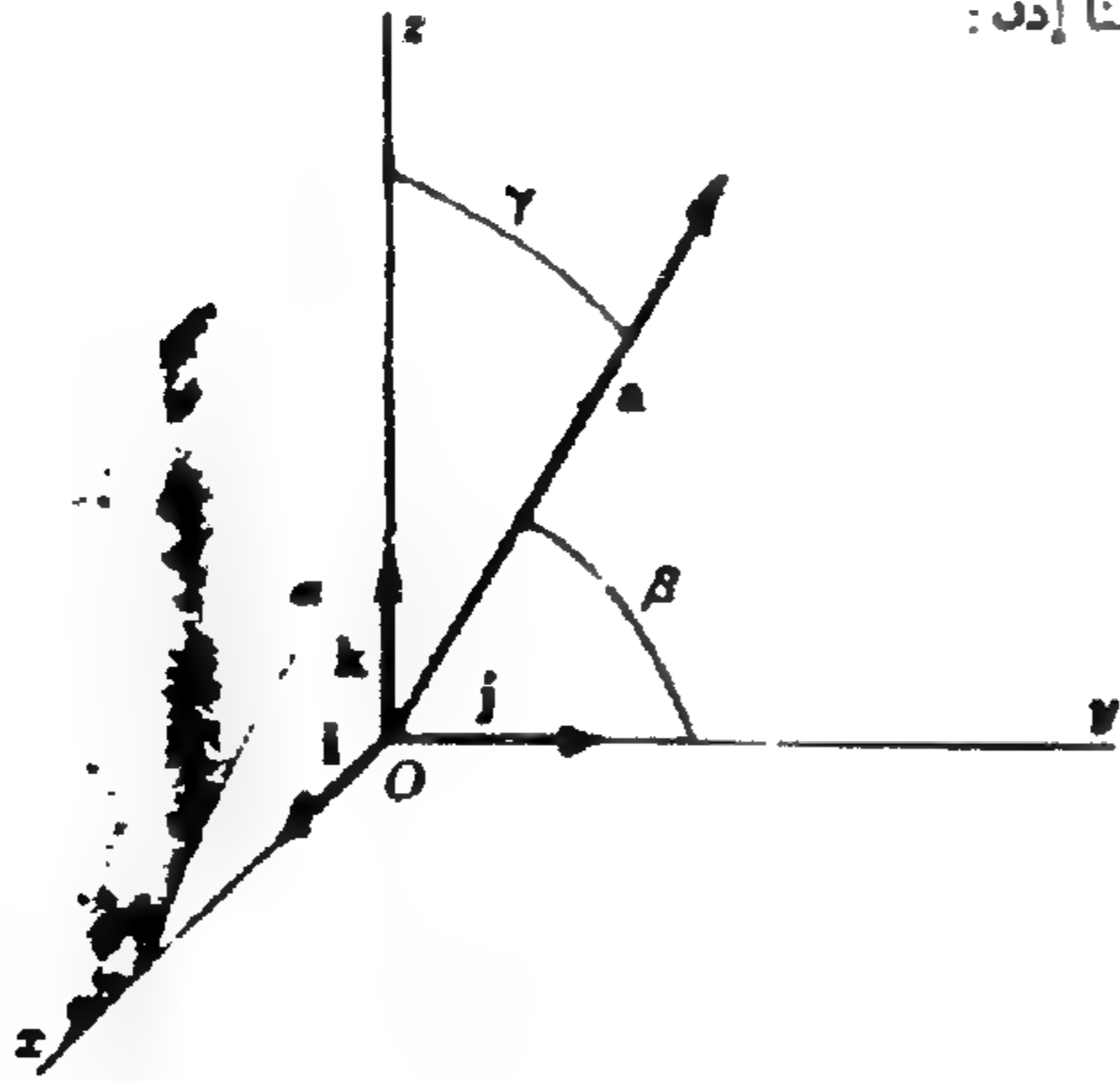
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

متجهين غير متوازيين متجهين من نقطة بداية مشتركة  $P$  . يمكننا بحسابات سهلة برهنة أن :

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (٢)$$



شكل ٦١ - ٢



شكل ٦١ - ٤

عمودى على كل من  $a$  و  $b$  وبالتالي فهو عمودى على مستوى هذين المتجهين .  
سنرى في المسألة ٥ و ٦ أن :

$$|c| = |a||b| \sin \theta \quad (٤)$$

وهي مساحة متوازي الأضلاع الذى فيه  $a$  و  $b$  ضلعان غير متوازيين .  
وإذا كان  $a$  و  $b$  متوازيين فإن  $b = ka$  ومن (٣) نجد أن  $c = 0$  أى أن  $c$  هو المتجه الصفري . والمتجه الصفري ، حسب التعريف هو متجه طوله صفر وليس له اتجاه محدد .

حاصل الضرب المتجهة لمتجهين : ليكن :

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k \quad و \quad a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

متجهين ببداية مشتركة  $P$  لنرمز بـ  $n$  لمتجه الوحدة العمودى على مستوى  $a$  و  $b$  بحيث تشكل  $a, b, n$  بهذا الترتيب ، ثنائية يمينية عند  $P$  كما هو مبين في الشكل ٦١ - ٥ . يعرف حاصل الضرب المتجه لمتجه  $a$  في المتجه  $b$  بالصيغة

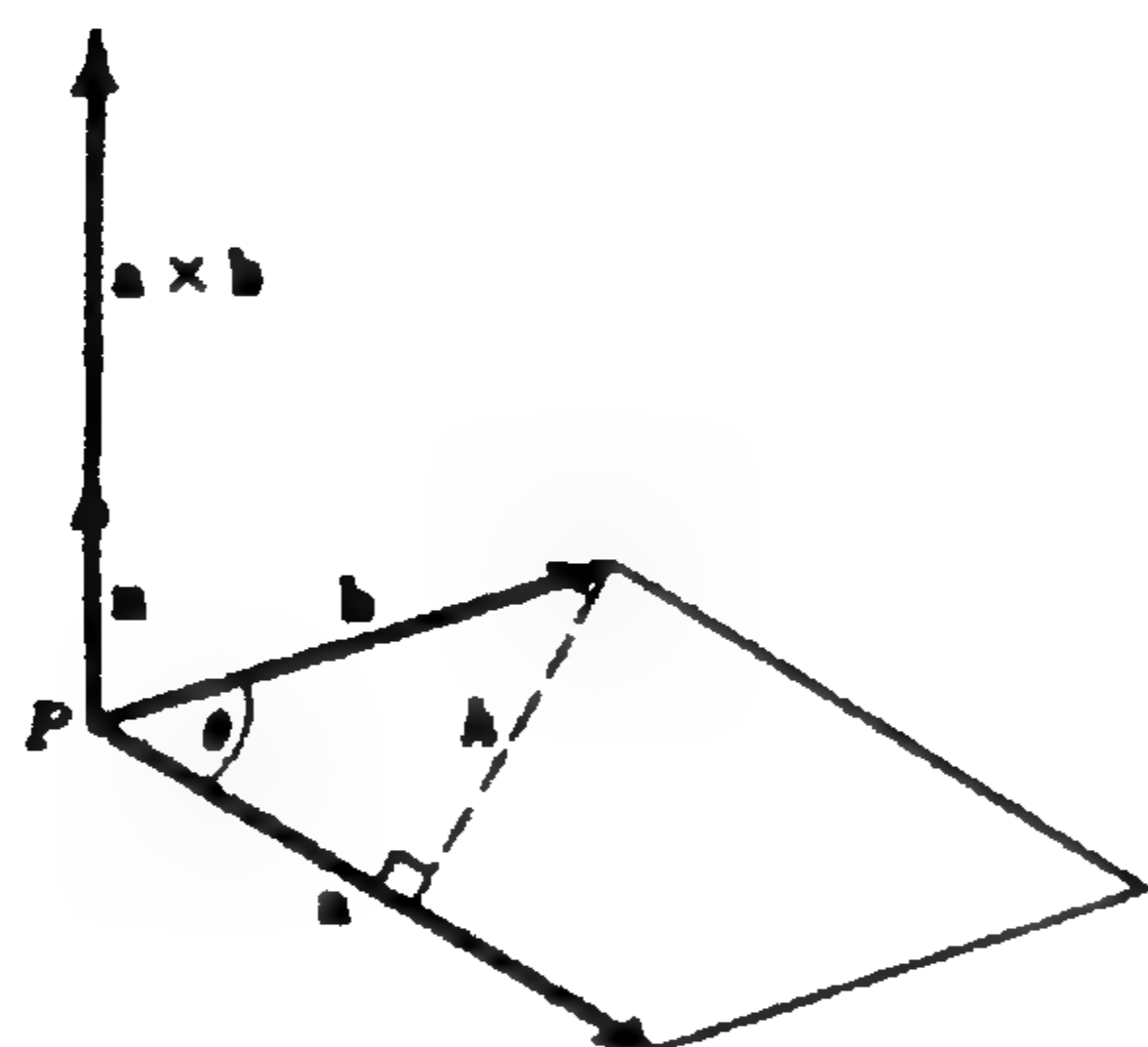
$$a \times b = |a||b| \sin \theta n \quad (٥)$$

حيث  $\theta$  هي الزاوية الصفري بين  $a$  و  $b$  وعلى هذا فإن المتجه  $a \times b$  عمودى على كل من  $a$  و  $b$  .  
واستناداً إلى المسألة ٦ يكون :

$$|a \times b| = |a||b| \sin \theta$$

مساوياً لمساحة متوازي الأضلاع الذى فيه  $a$  و  $b$  ضلعان غير متوازيين .

وإذا كان  $a$  و  $b$  متوازيين فإن  $\theta = 0$  أو  $\theta = \pi$  ومنه  $a \times b = 0$  وعلى هذا :



شكل ٦١ - ٥

$$\text{فإن : (٦) } i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

وإذا عكسنا في (٥) موضعى  $a$  و  $b$  فإنه يتبين أن نضع  $-a$  بدلا من  $a$  وبالتالي :

$$b \times a = -(a \times b) \quad (٧)$$

وبما أننا اخترنا مجموعة المحاور الإحداثية يمينية فإنه ينتج أن :

$$\begin{array}{lll} i \times j = k & j \times k = i & k \times i = j \\ j \times i = -k & k \times j = -i & i \times k = -j \end{array} \quad (٨)$$

وسنبرهن في المسألة ٨ قانون التوزيع التالى لآى متجهات :

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c \quad (٩)$$

وبضرب المعادلة (٩) في - واستخدام المعادلة (٧) لنحصل على قانون التوزيع المرافق :

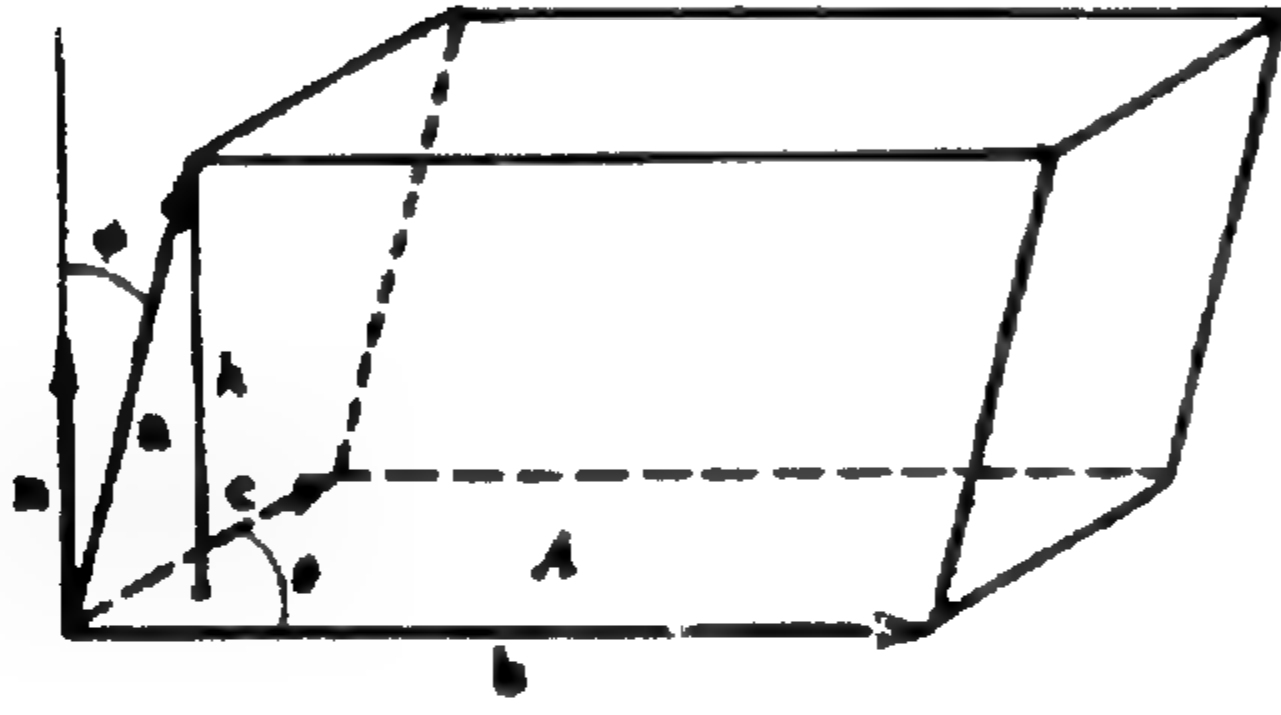
$$c \times (a+b) = c \times a + c \times b \quad (٩')$$

ومن هذا ينتج أن :

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d \quad (١٠)$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (١١)$$

أنظر المآلة ٩ - ١٠



شكل ٦١ - ٦

**حاصل الضرب التلاتى العددى :** لتكن  $\theta$  أصغر الزاويتين بين المتجهين  $b$  و  $c$  كما هو مبين فى الشكل ٦١-٦ ولتكن  $\phi$  أصغر الزاويتين بين المتجهين  $a$  و  $b \times c$ . نعرف حاصل الضرب التلاتى العددى على أنه :

$$\begin{aligned} a \cdot (b \times c) &= a \cdot |b| |c| \sin \theta n = |a| |b| |c| \sin \theta \cos \phi \\ &= (|a| \cos \phi) (|b| |c| \sin \theta) = hA \\ &= \text{حجم متوازى السطوح} \end{aligned}$$

يمكننا أن نبرهن أن (أنظر المآلة ١١) .

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a \times b) \cdot c \quad (١٢)$$

$$c \cdot (a \times b) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a \cdot (b \times c) \quad \text{والآن :}$$

$$b \cdot (a \times c) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -a \cdot (b \times c) \quad \text{بينما :}$$

ولدينا ، بشكل مائل :

$$a \cdot (b \times c) = c \cdot (a \times b) = b \cdot (c \times a) \quad (١٣)$$

$$a \cdot (b \times c) = -b \cdot (a \times c) = -c \cdot (b \times a) = -a \cdot (c \times b) \quad (١٤) \text{ و}$$

وينتج من تعريف  $a \cdot (b \times c)$  كحجم ، أنه إذا كانت  $a, b, c$  واقعة فى مستوى واحد فإن  $a \cdot (b \times c) = 0$  وبالعكس .

إن الأتواس المستخدمة فى  $a \cdot (b \times c)$  و  $(a \times b) \cdot c$  ليست ضرورية . فثلا لا يمكننا أن نفهم  $a \cdot b \times c$  إلا على الشكل  $a \cdot (b \times c)$  أو على الشكل  $(a \cdot b) \times c$  والشكل الأخير مرفوض لأن  $a \cdot b$  عددي و  $(a \cdot b) \times c$  لا معنى له . أنظر المآلة ١٢ .



حاصل الضرب المتجه الثلاثي. سنرى في المآلة ١٣. أن :

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (١٥)$$

وبشكل مماثل سنجد :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \quad (١٦)$$

وعلى هذا إذا استثنينا الحالة التي يكون فيها  $\mathbf{b}$  عمودياً على كل من  $\mathbf{a}$  ،  $\mathbf{c}$  فإن :

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

مع العلم أن استخدام الأقواس هنا ضروري .

**الخط المستقيم** . يمكن في الفراغ تعريف المستقيم الذي يمر بنقطة مفروضة  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  على أنه المحل الهندسي للنقطة

$P(x, y, z)$  بحيث يكون  $P_0P$  موازياً لاتجاه مفروض  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  ليكن  $\mathbf{r}$  ،  $\mathbf{r}_0$  متجهي الموضع لـ  $P$  و  $P_0$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = k\mathbf{a} \quad (k \text{ متغير عددي}) \quad (١٧)$$

وهي المعادلة الاتجاهية للمستقيم . (أنظر الشكل ٦١ - ٧)

لنكتب (١٧) بالشكل :

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = k(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}),$$

وبفصل المركبات نجد :

$$x - x_0 = ka_1, \quad y - y_0 = ka_2, \quad z - z_0 = ka_3$$

وبحذف  $k$  نجد :

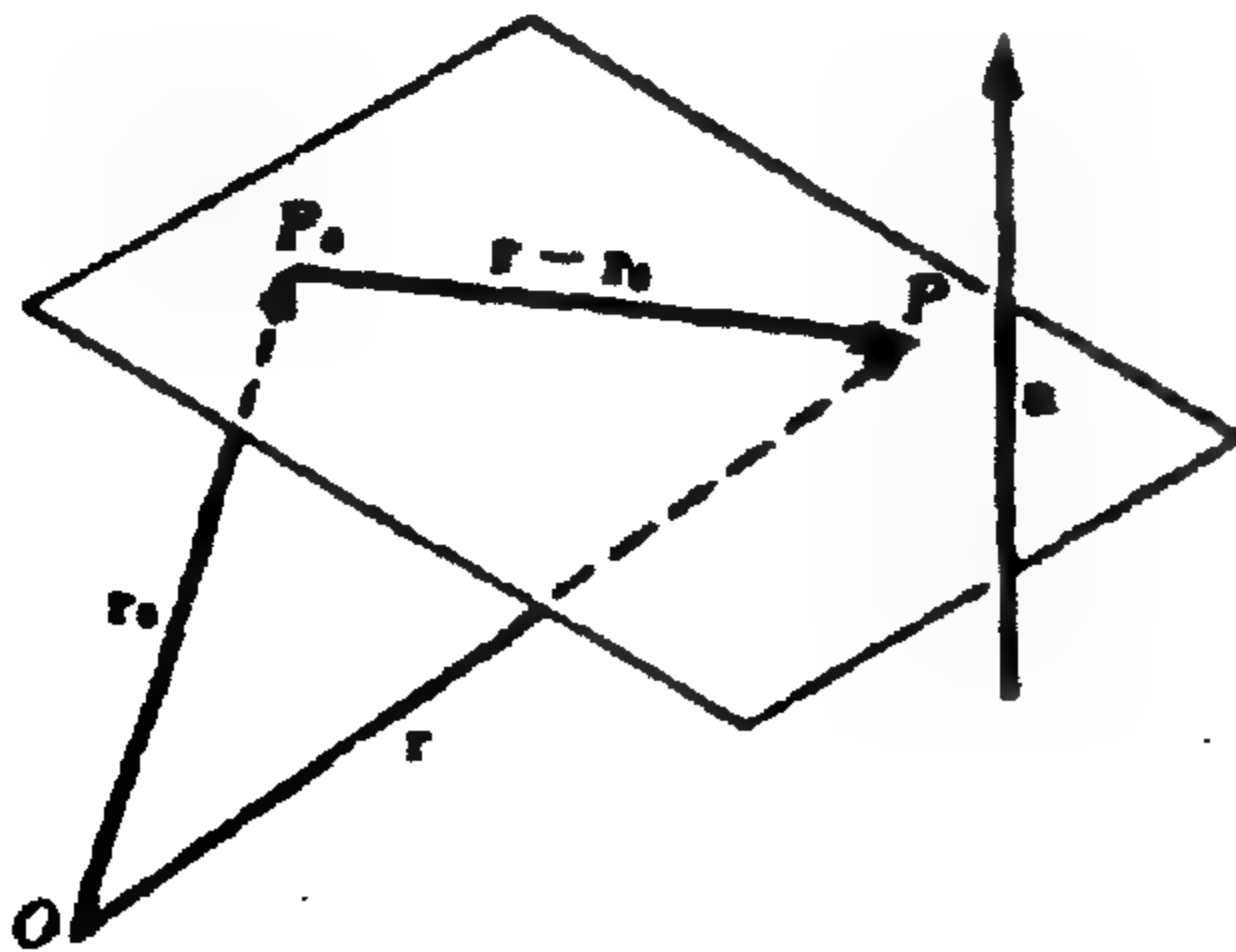
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (١٨)$$

وهذه هي معادلتا المستقيم في الإحداثيات القائمة . أن  $[a_1, a_2, a_3]$

أعداد الاتجاه للمستقيم و  $\left[ \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|} \right]$  هي جيب تمام اتجاه المستقيم .

إذا انعدم أى من الأعداد  $a_1, a_2, a_3$  فإنه ينبغي أن ينعدم البسط المقابل في (١٨) فإذا كان على سبيل المثال  $a_1 = 0$  ،  $a_2 \neq 0$  ،  $a_3 \neq 0$  فإن معادلتى المستقيم هما :

$$x - x_0 = 0, \quad \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$



شكل ٦١ - ٨

**المستوى** : نعرف المستوى في الفراغ المار بنقطة مفروضة  $P_0(x_0, y_0, z_0)$

على أنه المحل الهندسي لجميع المستقيبات المارة بالنقطة  $P_0$  وعمودية على

المستقيم (الاتجاه) المفروض  $\mathbf{a} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$  فإذا كانت

$P(x, y, z)$  أية نقطة أخرى في المستوى فإن  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{P}_0P$

عمودية على  $\mathbf{a}$  كما هو مبين في الشكل ٦١ - ٨ والمعادلة المطلوبة هي :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (١٩)$$

وتأخذ هذه المعادلة فى الإحداثيات القائمة الشكل :

$$\{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}\} \cdot (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \text{أو}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{أو}$$

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0). \quad \text{حيث}$$

وبالعكس إذا كانت  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  نقطة على السطح :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad \text{إذن :}$$

وبالطرح نجد أن  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$

$$= (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot \{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}\} = 0$$

وهذا يعنى أن المتجه الثابت  $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$  عمودى على السطح عند كل نقطة من نقطة . وعلى هذا فإن السطح مستوى .

### مسائل محلولة

١ - أوجد بعد النقطة  $P_1(1, 2, 3)$  عن (أ) نقطة الأصل ، (ب) المحور السينى ، (ج) المحور  $z$  (د) المستوى  $xy$  (هـ) النقطة  $P_2(3, -1, 5)$

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}; |\mathbf{r}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \quad (أ)$$

$$\mathbf{AP}_1 = \mathbf{AB} + \mathbf{BP}_1 = 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}; |\mathbf{AP}_1| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \quad (ب)$$

$$\mathbf{DP}_1 = \mathbf{DE} + \mathbf{EP}_1 = 2\mathbf{j} + \mathbf{i}; |\mathbf{DP}_1| = \sqrt{5} \quad (ج)$$

$$\mathbf{BP}_1 = 3\mathbf{k}; |\mathbf{BP}_1| = 3 \quad (د)$$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (3 - 1)\mathbf{i} + (-1 - 2)\mathbf{j} + (5 - 3)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad (هـ)$$

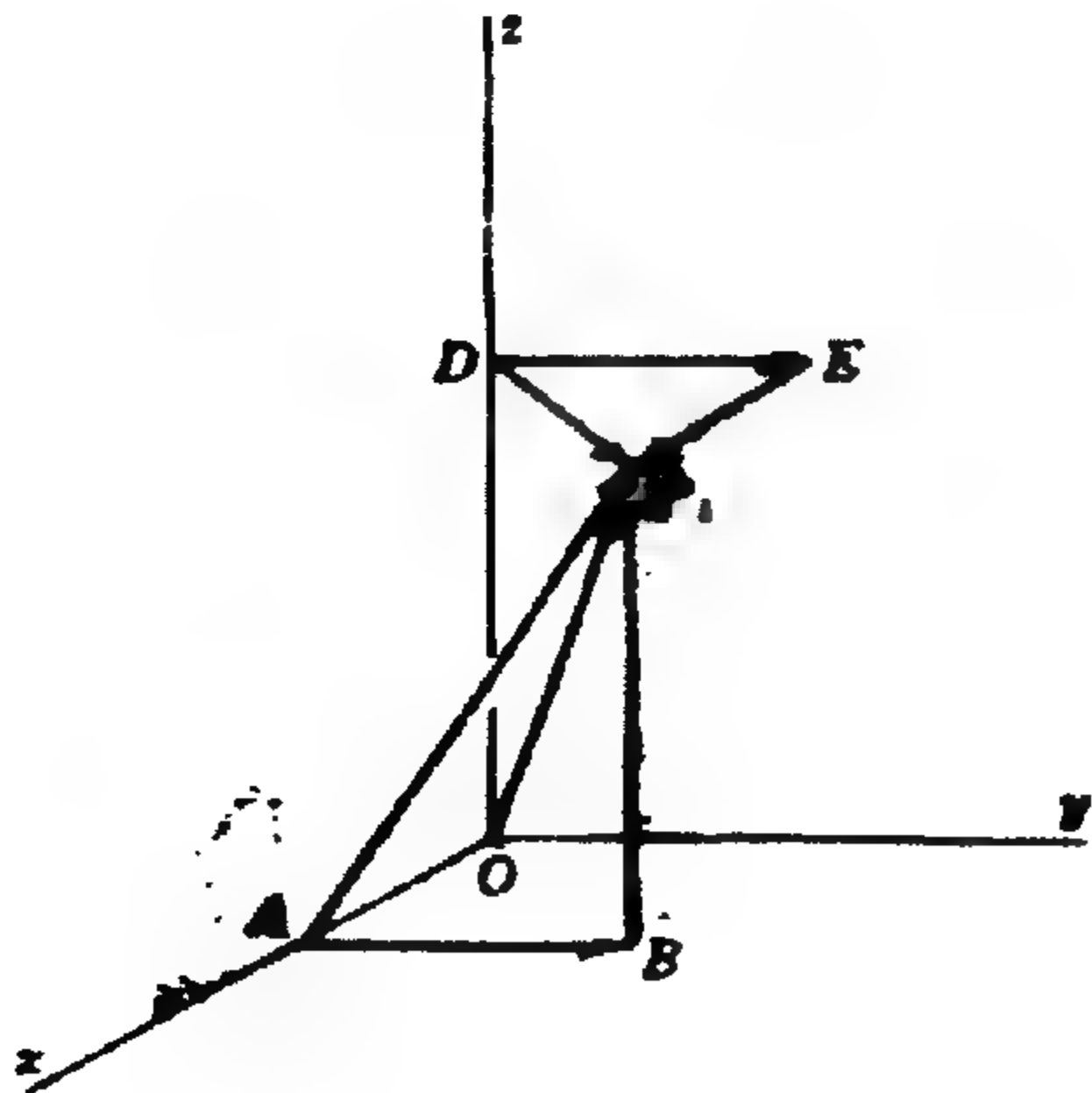
$$|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$$

٢ - أوجد الزاوية  $\theta$  المحصورة بين المتجه الذى يصل  $P_1(1, 2, 3)$

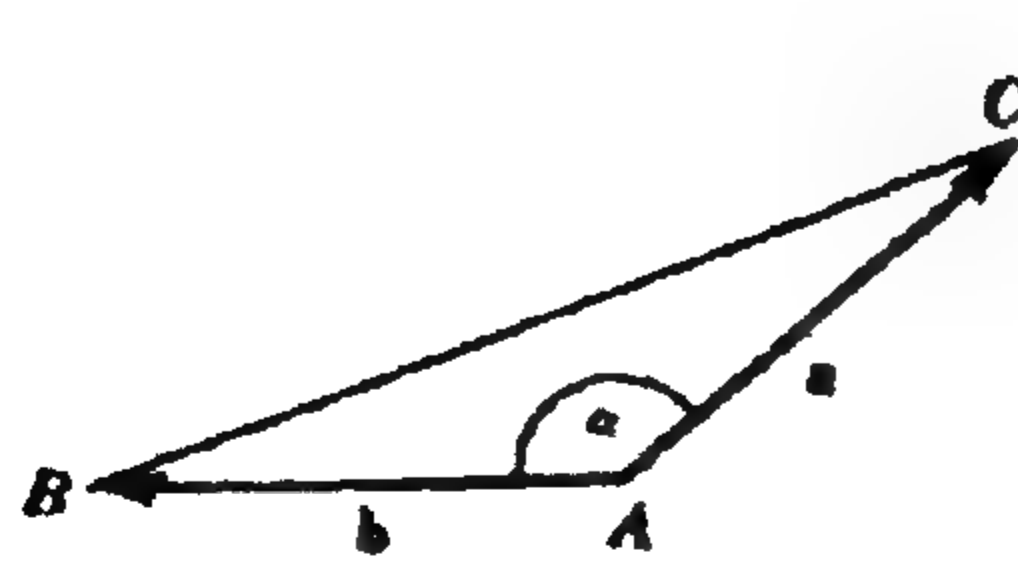
والمتجه الذى يصل  $P_2(2, -3, -1)$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{OP}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{OP}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|} = \frac{1(2) + 2(-3) + 3(-1)}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = -\frac{1}{2}, \quad \theta = 120^\circ$$



شكل ٦١ - ١



شكل ٦١ - ١٠

٢- أوجد الزاوية  $\alpha = \angle BAC$  في المثلث  $ABC$  الذى رؤوسه هى :  
 $A(1, 0, 1), B(2, -1, 1), C(-2, 1, 0).$   
 $a = AC = -3i + j - k, \quad b = AB = i - j$   
 $\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-3 - 1}{\sqrt{22}} = -0.85280, \quad \alpha = 148^\circ 31'$

٤- أوجد جيب تمام اتجاه المتجه  $a = 3i + 12j + 4k$ .  
 إن جيب تمام الاتجاه هو :

$$\cos \alpha = \frac{i \cdot a}{|a|} = \frac{3}{13}, \quad \cos \beta = \frac{j \cdot a}{|a|} = \frac{12}{13}, \quad \cos \gamma = \frac{k \cdot a}{|a|} = \frac{4}{13}$$

٥- إذا كان  $a = a_1i + a_2j + a_3k$  و  $b = b_1i + b_2j + b_3k$  متجهين متجهين من نقطة  $P$ . برهن أنه إذا كان :

$$c = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

فإن  $|c| = |a||b| \sin \theta$  حيث  $\theta$  الزاوية الصغرى بين  $a$  و  $b$ .

نريد  $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$  ومنه .

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left\{ \frac{a \cdot b}{|a||b|} \right\}^2} = \frac{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}}{|a||b|} = \frac{|c|}{|a||b|}$$

وبالتالى فإن  $|c| = |a||b| \sin \theta$  وهو المطلوب .

٦- أوجد مساحة سوارى الأضلاع . الذى ضلعه غير المتوازيين هما  $a$  و  $b$  .

يتضح من الشكل ٦١ - ١١ . وأن  $h = |b| \sin \theta$  وأن المساحة هى  $h|a| = |a||b| \sin \theta$ .

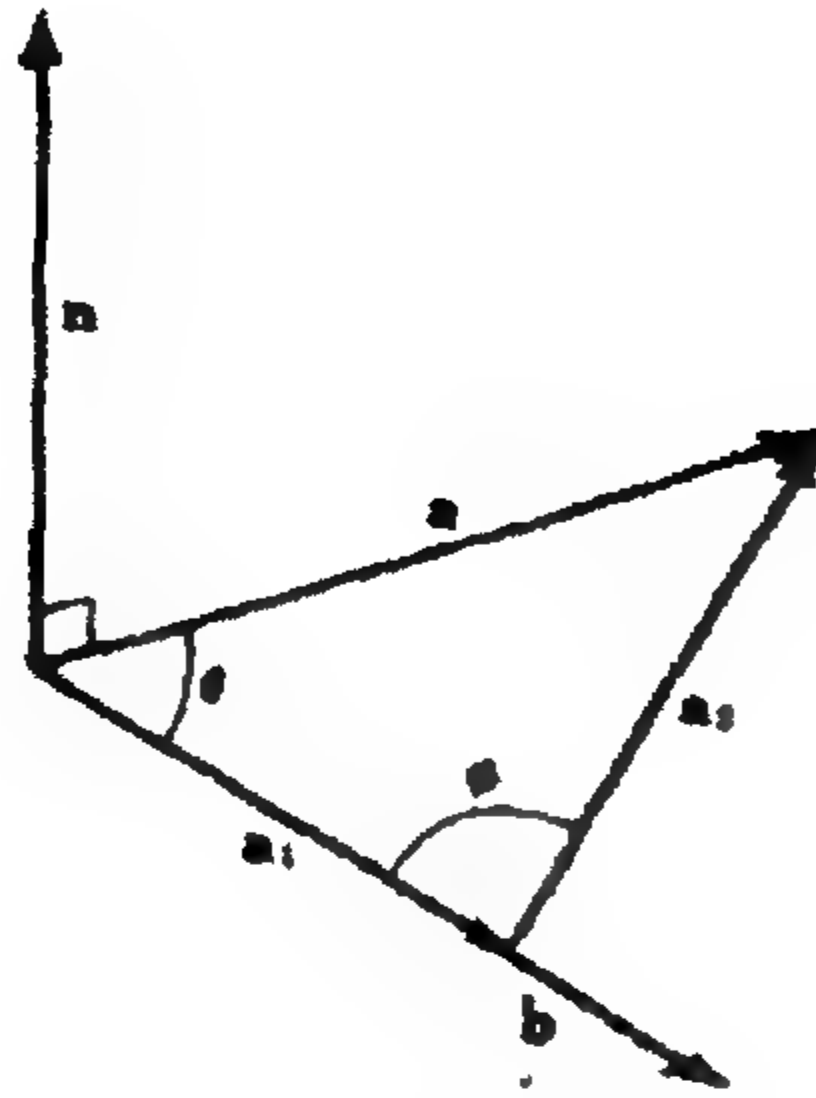
٧- نفرض أن  $a_1$  و  $a_2$  هما مركبتا المتجه  $a$  في الاتجاه الموازى والمعمود للمتجه  $b$  كما هو مبين في الشكل ٦١ - ١٢ .  
 بين أن :

$$a_1 \times b = 0 \quad \text{و} \quad a_2 \times b = a \times b$$

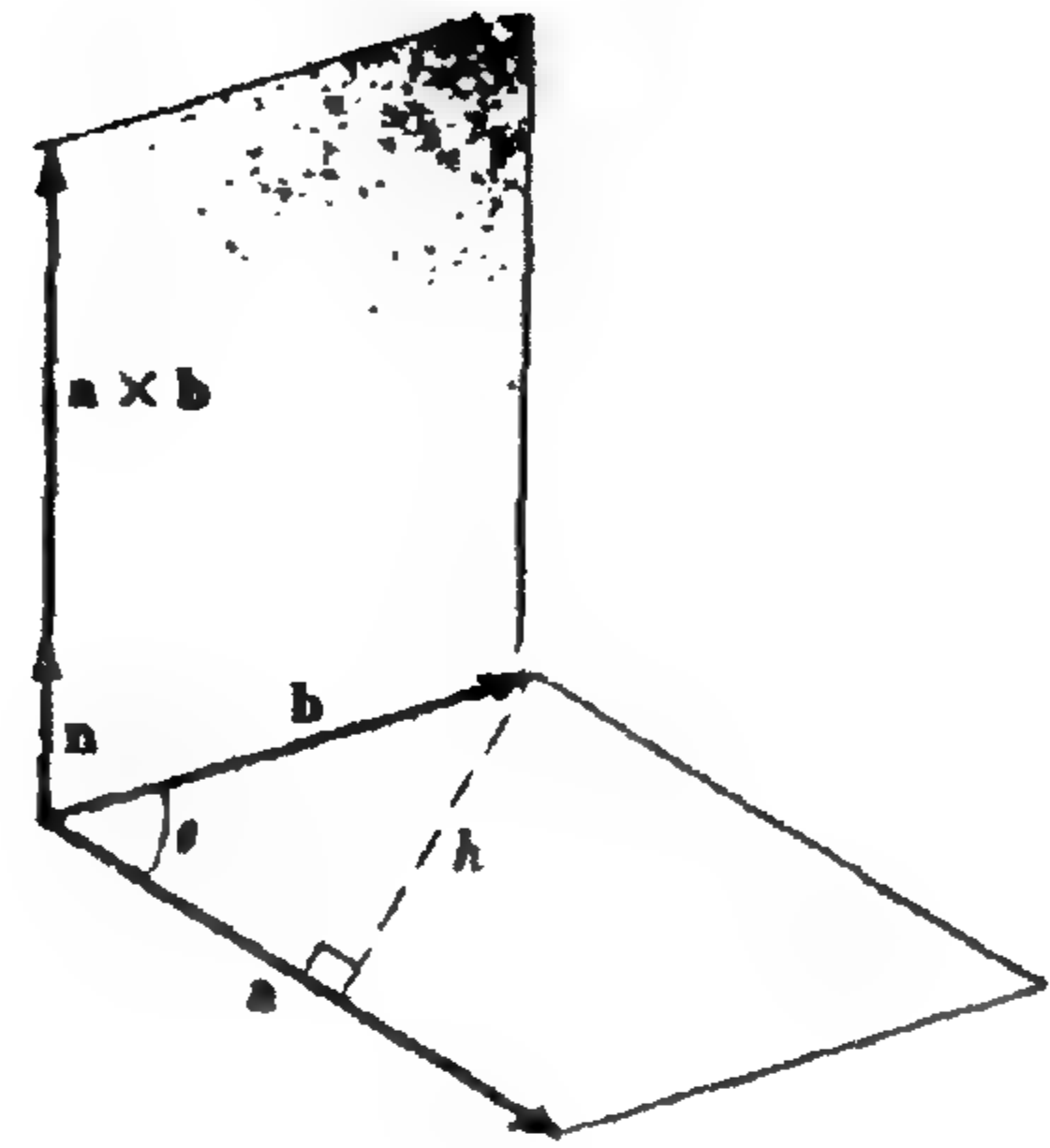
وإذا كانت  $\theta$  الزاوية بين  $a$  و  $b$  فإن  $|a_1| = |a| \cos \theta$  و  $|a_2| = |a| \sin \theta$  . وبما أن  $a, a_2, b$  واقعة في مستوى واحد فإن :

$$\begin{aligned} a_2 \times b &= |a_2||b| \sin \phi = |a| \sin \theta |b| \sin \phi \\ &= |a||b| \sin \theta = a \times b \end{aligned}$$

وحيث أن  $a_1$  و  $b$  متوازيان فإن  $a_1 \times b = 0$



شكل ٦١ - ١٢



شكل ٦١ - ١١

٨- برهن أن  $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

لنفرض فى الشكل ٦١-١٣ أن نقطة البداية  $P$  للاتجاهات  $a, b, c$  واقعة فى مستوى الورقة بينما تقع نهايات الاتجاهات فوق هذا المستوى. وليكن  $a_1, b_1$  هما المركبتين الموديتين على  $c$ ،  $a, b$  على الترتيب. عندئذ تقع  $a_1 \times c, b_1 \times c, (a+b)_1 \times c$  فى مستوى الورقة. ومن تشابه المثلثين  $PMQ$  و  $PRS$  نجد أن:

$$\frac{RS}{PR} = \frac{|b_1 \times c|}{|a_1 \times c|} = \frac{|b_1| |c|}{|a_1| |c|} = \frac{|b_1|}{|a_1|} = \frac{MQ}{PM}$$

وبما أن  $P$  عمودى على  $PM$  و  $RS$  عمودى على  $MQ$  فإن  $PS$  عمودى على  $PQ$  ومنه  $PS = PQ \cdot c$  وبما أن:

$$PS = PQ \times c = PR + RS; \\ (a+b)_1 \times c = a_1 \times c + b_1 \times c$$

فإنه لدينا

شكل ٦١ - ١٣

وسيت أنه، استناداً إلى المسألة ٧، يمكن تبديل  $a_1$  و  $b_1$  بـ  $a$  و  $b$

على الترتيب فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة:

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c$$

٩- إذا كان  $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$  و  $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$  بين أن:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

استناداً إلى قانون التوزيع لدينا :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
 &= a_1 \mathbf{i} \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) + a_2 \mathbf{j} \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) + a_3 \mathbf{k} \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\
 &= (a_1 b_2 \mathbf{k} - a_1 b_3 \mathbf{j}) + (-a_2 b_1 \mathbf{k} + a_2 b_3 \mathbf{i}) + (a_3 b_1 \mathbf{j} - a_3 b_2 \mathbf{i}) \\
 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{k} \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

١٠ - اشتق قانون الجيوب فى علم المثلثات المستوية .

اعتبر المثلث  $ABC$  الذى لأضلاعه  $a, b, c$  الأطوال  $a, b, c$  على الترتيب ، والذى زواياه الداخلية هي  $\alpha, \beta, \gamma$  ،

ف نجد :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{c} \times \mathbf{a} \quad \text{أو} \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \text{إذن :} \\
 \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \text{أو} \quad \mathbf{b} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \text{و}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \gamma = |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin \alpha = |\mathbf{c}| |\mathbf{a}| \sin \beta \quad \text{وهكذا :}$$

$$ab \sin \gamma = bc \sin \alpha = ca \sin \beta$$

$$\frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \quad \text{ومنه}$$

١١ - إذا كان  $\mathbf{c} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}$  ،  $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$  ،  $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$  ، فبين أن :

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot [(b_2 c_3 - b_3 c_2) \mathbf{i} + (b_3 c_1 - b_1 c_3) \mathbf{j} + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \mathbf{k}] \\
 &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

١٢ - بين أن :  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = 0$  .

استناداً إلى المعادلة (١٢) لدينا  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = 0$  .

١٣ - إذا كانت  $a, b, c$  هى متجهات المسألة ١١ فبين أن :  $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ .

$$\begin{aligned}
 a \times (b \times c) &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times [(b_2 c_3 - b_3 c_2)i + (b_3 c_1 - b_1 c_3)j + (b_1 c_2 - b_2 c_1)k] \\
 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{vmatrix} \\
 &= i(a_2 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_3) \\
 &\quad + j(a_3 b_2 c_3 - a_3 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1) \\
 &\quad + k(a_1 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3 - a_2 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_2) \\
 &= \begin{cases} i b_1 (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\ + j b_2 (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\ + k b_3 (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \end{cases} - \begin{cases} i c_1 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ + j c_2 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ + k c_3 (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \end{cases} \\
 &= (b_1 i + b_2 j + b_3 k)(a \cdot c) - (c_1 i + c_2 j + c_3 k)(a \cdot b) \\
 &= b(a \cdot c) - c(a \cdot b) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

١٤ - إذا كان  $l_1$  و  $l_2$  مستقيمين غير متقاطعين فى الفراغ فإن أصغر بعد  $d$  بينهما هو بعد أية نقطة على  $l_1$  عن المستوى المار بـ  $l_2$  والموازى لـ  $l_1$  ، أى أنه إذا كانت  $P_1$  نقطة على  $l_1$  و  $P_2$  نقطة على  $l_2$  ، فإن البعد  $d$  يساوى ، بغض النظر عن الإشارة ، المسقط العمودى لـ  $P_1 P_2$  على السرد المشترك لـ  $l_1$  و  $l_2$  .

ليكن  $l_1$  ماراً بـ  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  وفى الاتجاه  $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$  وليكن  $l_2$  ماراً بـ  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  وفى الاتجاه  $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ .

عندئذ يكون  $P_1 P_2 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$  ويكون المتجه  $a \times b$  عمودياً على كل من  $l_1$  و  $l_2$  وهكذا يكون

$$d = \left| \frac{P_1 P_2 \cdot (a \times b)}{|a \times b|} \right| = \left| \frac{(r_2 - r_1) \cdot (a \times b)}{|a \times b|} \right|$$

١٥ - اكب معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة  $P_0(1, 2, 3)$  ويوازى  $a = 2i - j - 4k$  . أى النقطة  $A(3, 1, -1)$  ،  $B(1/2, 9/4, 4)$  ،  $C(2, 0, 1)$  تقع على هذا المستقيم .

إن المعادلة الاتجاهية للمستقيم ، استناداً على المعادلة (١٧) هى :

$$(xi + yj + zk) - (1 + 2j + 3k) = k(2i - j - 4k)$$

$$(x-1)i + (y-2)j + (z-3)k = k(2i - j - 4k) \quad (i) \quad \text{أو}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-4} \quad (ii) \quad \text{والمعادلتان فى الإحداثيات المتعامدة هما :}$$



وباستخدام (ii) يتضح بسهولة أن  $A$  و  $B$  تقعان على المستقيم في حين لا تقع  $C$ . أما إذا أردنا أن نستخدم المعادلة الاتجاهية (i) فإن النقط  $P(x, y, z)$  التي تقع على المستقيم يمكن إيجادها بإعطاء قيمة عددية لـ  $k$ ، ثم نقارن المركبات والنقطة  $A$  تقع على المستقيم لأن :

$$(3-1)i + (1-2)j + (-1-3)k = k(2i - j - 4k)$$

عندما  $k = 1$ . وبشكل مماثل تقع  $B$  على المستقيم لأن :

$$-\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}j + k = k(2i - j - 4k)$$

عندما  $k = -\frac{1}{4}$ . أما النقطة  $C$  فليست على المستقيم لأن :

$$i - 2j - 2k = k(2i - j - 4k)$$

غير محققة لأية قيمة لـ  $k$ .

١٩ - اكتب معادلة المستوى .

(أ) الذي يمر بالنقط  $P_0(1, 2, 3)$  و يوازي المستوى  $3x - 2y + 4z - 5 = 0$ .

(ب) الذي يمر بالنقطتين  $P_0(1, 2, 3)$  و  $P_1(3, -2, 1)$  ويتعامد مع المستوى  $3x - 2y + 4z - 5 = 0$ .

(ج) الذي يمر بالنقط  $P_0(1, 2, 3)$ ,  $P_1(3, -2, 1)$ ,  $P_2(5, 0, -4)$ .

لتكن  $P(x, y, z)$  نقطة عامة في المستوى المطلوب .

(أ) إن المتجه  $\mathbf{a} = 3i - 2j + 4k$  عمودى على المستوى المفروض وعلى المستوى المطلوب . ولذا فإن المعادلة

الاتجاهية للمستوى الأخير هي :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{a} = 0$$

والمعادلة في الإحداثيات المتعامدة :

$$3(x-1) - 2(y-2) + 4(z-3) = 0$$

$$\text{أو } 3x - 2y + 4z - 11 = 0$$

(ب) إن المتجه  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = 2i - 4j - 2k$  والمتجه  $\mathbf{a} = 3i - 2j + 4k$  موازيان للمستوى المطلوب . ولذلك فإن

$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}$  عمودى على هذا المستوى . وإن المعادلة الاتجاهية للمستوى المطلوب هي :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}] = 0$$

والمعادلة في الإحداثيات المتعامدة :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = [(x-1)\mathbf{i} + (y-2)\mathbf{j} + (z-3)\mathbf{k}] \cdot [-20\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 8\mathbf{k}]$$

$$= -20(x-1) - 14(y-2) + 8(z-3) = 0$$

$$20x + 14y - 8z - 24 = 0$$

(ج) إن المتجهين  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = 2i - 4j - 2k$  و  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0 = 4i - 2j - 7k$  موازيان للمستوى المطلوب وبالتالي

فإن  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)$  عمودى عليه . والمعادلة الاتجاهية هي :  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)] = 0$

والمعادلة فى الاحداثيات المتعامدة :

$$(r - r_0) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & -7 \end{vmatrix} = [(x-1)i + (y-2)j + (z-3)k] \cdot [24i + 6j + 12k]$$

$$= 24(x-1) + 6(y-2) + 12(z-3) = 0$$

$$4x + y + 2z - 12 = 0 \quad \text{أو}$$

١٧- أوجد أقصر بعد بين النقطة  $P_0(1, 2, 3)$  والمستوى  $\Pi: 3x - 2y + 5z - 10 = 0$ .

إن المتجه  $a = 3i - 2j + 5k$  عمودى على المستوى. لتكن  $P_1(2, 3, 2)$  نقطة فى المستوى عندئذ يكون  $d$  ،  
نفس النظر عن الإشارة ، هو السقط العددي لـ  $P_0 P_1$  على  $a$  وبالتالى :

$$d = \left| \frac{(r_1 - r_0) \cdot a}{|a|} \right| = \left| \frac{(i + j - k) \cdot (3i - 2j + 5k)}{\sqrt{38}} \right| = \frac{2}{19} \sqrt{38}$$

### مسائل اضافية

١٨- أوجد طول كل من المتجهات :

$$a = 2i + 3j + k. \quad (أ)$$

$$b = 3i - 5j + 9k. \quad (ب)$$

(ج) المتجه الذى يصل  $P_1(3, 4, 5)$  بـ  $P_2(1, -2, 3)$  : (أ)  $2\sqrt{14}$  ، (ب)  $\sqrt{115}$  ، (ج)  $\sqrt{11}$

١٩- ليكن لدينا متجهات المسألة ١٨

(أ) بين أن  $a$  و  $b$  متعامدين .

(ب) أوجد الزاوية الصغرى بين  $a$  و  $c$  ، وكذلك بين  $b$  و  $c$

(ج) أوجد الزوايا التى يصنعها  $b$  مع المحاور الإحداثية .

ج : (ب)  $10^\circ 45'$  ،  $85^\circ 14'$  ،  $165^\circ 14'$  (-)  $56^\circ 32'$  ،  $47^\circ 47'$  ،  $117^\circ 45'$  ،  $73^\circ 45'$

٢٠- برهن أن  $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$  ;  $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$ .

٢١- أكتب متجه وحدة فى اتجاه  $a$  ومتجه وحدة فى اتجاه  $b$  حيث  $a$

و  $b$  متجهي المسألة ١٨ .

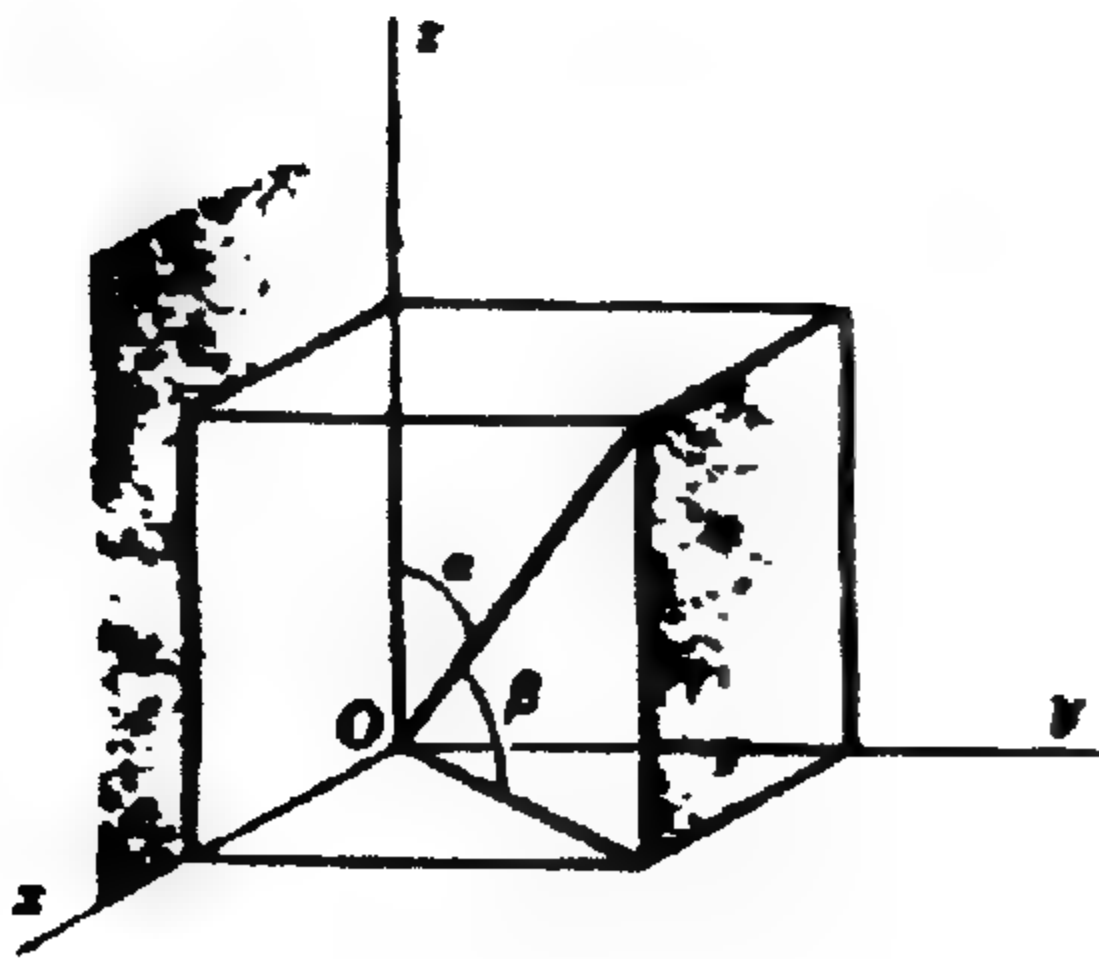
٢٢- أوجد الزاويتين الداخليتين  $\beta$  و  $\gamma$  لثلث المسألة ٢

$$\beta = 22^\circ 12' , \gamma = 9^\circ 16' \quad \text{ج}$$

٢٣- ليكن لدينا فى الشكل المرفق مكعب الوحدة أوجد :

(ب) الزاوية بين قطره وقطر أحد أوجهه

ج : (أ)  $54^\circ 44'$  (ب)  $35^\circ 16'$



شكل ٦١ - ١٤

٢٤ - بين أن المسقط المسمى لـ  $b$  على  $a$  هو  $\frac{a \cdot b}{|a|}$

٢٥ - بين أن المتجه  $c$  فى المعادلة (٢) عمودى على كل من  $a$  و  $b$

٢٦ - إذا كان  $a = i + j$ ,  $b = i - 2k$ ,  $c = 2i + 3j + 4k$ , فأوجد :

$$\begin{array}{ll} a \cdot (a \times b) = 0 & (أ) \\ a \cdot (b \times c) = -2 & (ب) \\ a \times (b \times c) = 3i - 3j - 14k & (ج) \\ c \times (a \times b) = -11i - 6j + 10k & (د) \end{array} \quad \begin{array}{l} a \times b = -2i + 2j - k \quad (١) \\ b \times c = 6i - 8j + 3k \quad (٢) \\ c \times a = -4i + 4j - k \quad (٣) \\ (a + b) \times (a - b) = 4i - 4j + 2k \quad (٤) \end{array}$$

٢٧ - أوجد مساحة المثلث الذى رؤسه  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(1, 1, 2)$ ,  $C(2, 1, 1)$  :

إرشاد : إن  $AB \times AC$  يساوى ضعف المساحة. ج :  $5\sqrt{3}$

٢٨ - أوجد حجم متوازي السطوح الذى أضلاعه  $OA, OB, OC$  حيث  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(2, -1, 1)$ ,  $C(-2, 1, -1)$ .

ج : 2

٢٩ - إذا كان  $u = a \times b$ ,  $v = b \times c$ ,  $w = c \times a$ ، بين أن :

$$\begin{array}{l} u \cdot c = v \cdot a = w \cdot b \quad (١) \\ a \cdot u = b \cdot v = c \cdot w = 0, \quad b \cdot u = c \cdot v = a \cdot w = 0 \quad (ب) \\ u \cdot (v \times w) = (a \cdot (b \times c))^2 \quad (ج) \end{array}$$

٣٠ - برهن أن  $(a + b) \cdot \{(b + c) \times (c + a)\} = 2a \cdot (b \times c)$ .

٣١ - أوجد أسفر زاوية تقاطع المستويين  $5x - 14y + 2z - 8 = 0$  و  $10x - 11y + 2z + 15 = 0$ .

إرشاد : أوجد الزاوية بين العمودين ج :  $22^\circ 25'$

٣٢ - اكتب المعادلة الاتجاهية لخط تقاطع المستويين  $4x - y - z + 2 = 0$  و  $x + y - z - 5 = 0$ .

ج :  $k(-2i - 3j - 5k)$  حيث  $(x - 1)i + (y - 5)j + (z - 1)k = k(-2i - 3j - 5k)$ .  $P_0(1, 5, 1)$  نقطة على المستقيم.

٣٣ - أوجد مسر بعد بين المستقيم المار بـ  $A(2, -1, -1)$  و  $B(6, -8, 0)$  والمستقيم المار بـ  $C(2, 1, 2)$

و  $D(0, 2, -1)$  ج :  $\sqrt{6}/6$

٣٤ - عرف مستقيماً ماراً بـ  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  على أنه المثلث المتساوى لجميع النقاط  $P(x, y, z)$  بحيث يكون  $P_0P$

و  $OP_0$  متعامدين. بين أن المعادلة الاتجاهية :

$$(r - r_0) \cdot r_0 = 0.$$

٣٥ - أوجد معادلة المستقيم المار بـ  $P_0(2, -3, 5)$  و :

$$\begin{array}{l} (١) \text{ العمودى على } 7x - 4y + 2z - 8 = 0. \\ (ب) \text{ الموازى للمستقيم } x - y + 2z + 4 = 0, \quad 2x + 3y + 6z - 12 = 0. \\ (ج) \text{ المار بـ } P_1(3, 6, -2) \end{array}$$

$$\text{ج : (أ) } \frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-5}{2}, \text{ (ب) } \frac{x-2}{12} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-5}, \text{ (ج) } \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{9} = \frac{z-5}{-7}$$

٣٦ - أوجد معادلة المستوى :

$$\text{(أ) المار بـ } P_0(1, 2, 3) \text{ والموازى لـ } a = 2i + j - k \text{ و } b = 3i + 6j - 2k.$$

$$\text{(ب) المار بـ } P_0(2, -3, 2) \text{ والمستقيم } 6x + 4y + 3z + 5 = 0, 2x + y + z - 2 = 0.$$

$$\text{(ج) المار بـ } P_0(2, -1, -1) \text{ و } P_1(1, 2, 3) \text{ والمستوى على } 2x + 3y - 5z - 6 = 0.$$

$$\text{ج . (أ) } 4x + y + 9z - 33 = 0 \text{ (ب) } 16x + 7y + 8z - 27 = 0 \text{ (ج) } 9x - y + 3z - 16 = 0$$

٣٧ - إذا كانت  $r_1 = 2i - 3j - 4k$  و  $r_2 = 3i + 5j + 7k$  و  $r_0 = i + j + k$  ثلاثة متجهات فبين أن  $r_0 + r_1 + r_1 \times r_2 + r_2 \times r_0 = 0$  وما الذى يمكن قوله بالنسبة لنهايات هذه المتجهات .

ج : واثقة على مستقيم واحد .

٣٨ - إذا كانت  $P_0, P_1, P_2$  ثلاث نقط ليست واثقة على استقامة واحدة و  $r_0, r_1, r_2$  متجهات الموضع لها ، فـ

هو وضع  $r_0 \times r_1 + r_1 \times r_2 + r_2 \times r_0$  بالنسبة للمستوى  $P_0 P_1 P_2$  ؟

ج : عمودى .

$$\text{٣٩ - برهن (أ) } a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

$$\text{(ب) } (a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c).$$

٤٠ - برهن أن (أ) الأعمدة القائمة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتلاقى فى نقطة واحدة (ب) الأعمدة الساقطة من رؤوس مثلث إلى الأضلاع المقابلة (أو امتداداتها إن لزم الأمر) تتلاقى فى نقطة واحدة .

٤١ - لتكن  $A(1, 2, 3), B(2, -1, 5), C(4, 1, 3)$  ثلاث رؤوس المتوازي الأضلاع  $ABCD$  . أوجد (أ)

احداثيات  $D$  (ب) مساحة  $ABCD$  (ج) مساحة المماسط العمودية لـ  $ABCD$  على كل من المستويات الاحداثية .

$$\text{ج : (أ) } D(3, 4, 1), \text{ (ب) } 2\sqrt{26}, \text{ (ج) } 8, 6, 2$$

٤٢ - برهن أن مساحة متوازي الأضلاع فى الفراغ تساوى الجذر التربيعى لمجموع مربعات مساحات ساقطه على

المستويات الاحداثية .

# الفصل الثاني والستون

## تفاضل وتكامل المتجهات

التفاضل : لنكن

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= i f_1(t) + j f_2(t) + k f_3(t) = i f_1 + j f_2 + k f_3 \\ \mathbf{s} &= i g_1(t) + j g_2(t) + k g_3(t) = i g_1 + j g_2 + k g_3 \\ \mathbf{u} &= i h_1(t) + j h_2(t) + k h_3(t) = i h_1 + j h_2 + k h_3 \end{aligned}$$

متجهات ، مركباتها دوال لتغير عددي  $t$  ذات مشتقات متصلة من الرتبة الأولى والرتبة الثانية .  
يمكننا ، كما فعلنا في الفصل ١٨ ، أن نبرهن أن :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} \quad (١)$$

ويمكن القارئ الذي اعتاد اشتقاق المحددات التي عناصرها دوال لتغير واحد ، أن يجد بسهولة :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g'_1 & g'_2 & g'_3 \end{vmatrix} \quad (٢) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{s} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{s}}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{u})) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{u}) + \mathbf{r} \cdot \left( \frac{d\mathbf{s}}{dt} \times \mathbf{u} \right) + \mathbf{r} \cdot \left( \mathbf{s} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \quad (٣) \text{ و}$$

ويمكن ، بالإضافة لذلك ، أن نحصل على هذه الصيغ بفك حاصل الضرب قبل الاشتقاق .

وينتج من (٢) أن :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{u})) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{u}) + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(\mathbf{s} \times \mathbf{u}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{u}) + \mathbf{r} \times \left( \frac{d\mathbf{s}}{dt} \times \mathbf{u} \right) + \mathbf{r} \times \left( \mathbf{s} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \quad (٤) \end{aligned}$$

**المتجهات الفراغية :** اعتبر المنحنى الفراغي

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \quad (٥)$$

حيث يكون للحوال  $f(t), g(t), h(t)$  مشتقات أولى وثانية متصلة . ولنفترض أن متجه الموضع لنقطة متغيرة عامة  $P(x, y, z)$  من المنحنى معطى بـ :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

وكما في الفصل ١٨ فإن المتجه  $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  هو متجه الوحدة في اتجاه المماس للمنحنى . وإذا كان  $\mathbf{R}$  هو متجه الموضع لنقطة  $(X, Y, Z)$  من المستقيم المماس عند  $P$  ، فإن المعادلة الاتجاهية للمستقيم ( أنظر الفصل ١١ ) هي :

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{t} \quad (k \text{ متغير عددي}) \quad (٦)$$

وفي الاحداثيات المتعامدة تكون معادلتا المستقيم هما :

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{ds}}$$

حيث  $\left[ \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right]$  هي مجموعة جيوب تمام اتجاه المستقيم . هذا ولقد استخدمنا في المعادلات المناظرة ( ٢ ) في الفصل ٩ مجموعة أعداد الاتجاه  $\left[ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right]$

أما المعادلة الاتجاهية للمستوى العمودي على المنحنى عند النقطة  $P$  فهي :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (٧)$$

حيث  $\mathbf{R}$  متجه الموضع لنقطة عامة من المستوى .

نلاحظ مرة أخرى ، كما في الفصل ١٨ أن المتجه  $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$  عمودي على  $\mathbf{t}$  . وإذا كان  $\mathbf{n}$  متجه الوحدة المتفق مع  $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$  في الاتجاه يكون

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |\mathbf{K}| \mathbf{n}$$

حيث  $|\mathbf{K}|$  القيمة المطلقة للنفوس عند  $P$  . ومتجه الوحدة .

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{K}|} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (٨)$$

يسمى المستوى الأساسي على المنحنى عند  $P$  .

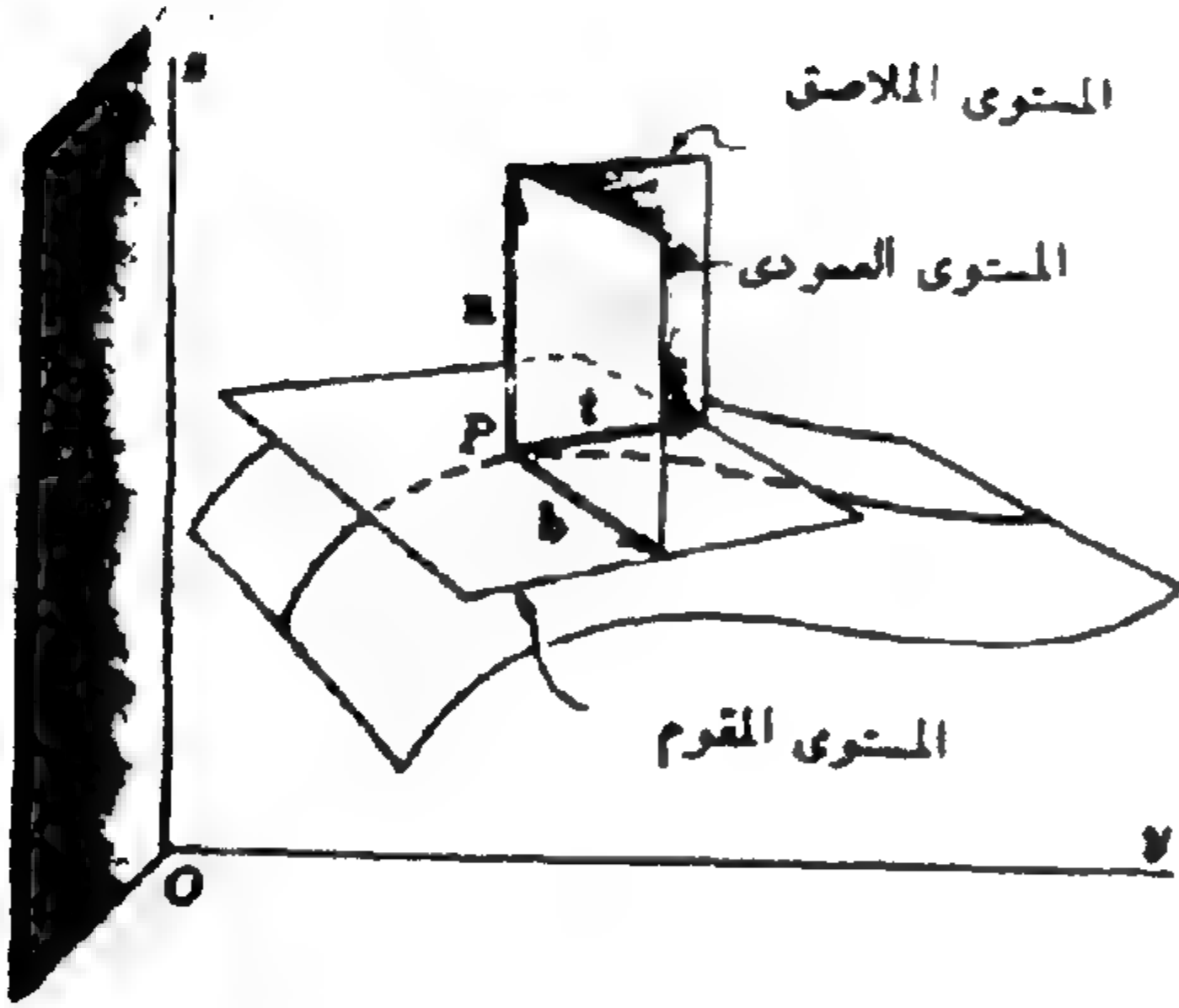
متجه الوحدة  $\mathbf{b}$  عند النقطة  $P$  المحرف باللائحة .

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (٩)$$

يسمى ثنائي العمود عند  $P$  . إن المتجهات الثلاثة  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  عند النقطة  $P$  تشكل ثلاثية يمينية من متجهات متعامدة . ولذا فهي تزودنا بمجموعة احداثية موضعية تفيد في دراسة إضافية للمنحنى الفراغي بجوار إحدى نقاطه .

أنظر المسألين ١ - ٢

تحدد المتجهات  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  عند نقطة عامة  $P$  من منحنى فراغي ثلاثة مستويات متعامدة ، قبادليا :



شكل ٦٢ - ١



(i) المستوى المماس وهو المستوى الذى يحوى  $\mathbf{t}$  و  $\mathbf{n}$  معادلته هى :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = 0$$

(ii) المستوى العمودى وهو المستوى الذى يحوى  $\mathbf{n}$  و  $\mathbf{b}$  ومعادلته هى :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0$$

(iii) المستوى المقوم وهو المستوى الذى يحوى  $\mathbf{t}$  و  $\mathbf{b}$  ومعادلته هى :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

حيث  $\mathbf{R}$  فى كل من هذه المعادلات هى متجه الموضع لنقطة عامة من المستوى المقروض .

**المسطوح :** إن أقدم معادلة لسطح هى  $F(x, y, z) = 0$  ( أنظر الفصل ٥٩ ) . ونحصل على تمثيل بارامترى لسطح بكتابة  $x, y, z$  على شكل دوال لمتغيرين مستقلين  $u$  و  $v$  فثلا :

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v) \quad (10)$$

وإذا عوضنا عن  $u$  بـ  $u_0$  (ثابت) فى (١٠) فإننا نحصل على :

$$x = f_1(u_0, v), \quad y = f_2(u_0, v), \quad z = f_3(u_0, v) \quad (11)$$

وهى معادلة منحنى فراغى ( منحنى  $u$  ) على السطح . أما إذا عوضنا عن  $v$  بـ  $v_0$  (ثابت) فى (١٠) فإننا نحصل على

$$x = f_1(u, v_0), \quad y = f_2(u, v_0), \quad z = f_3(u, v_0) \quad (12)$$

وهذه معادلة منحنى فراغى آخر ( منحنى  $v$  ) على السطح . ويتقاطع المنحنيان فى نقطة على السطح نحصل عليها من (١٠) بوضع  $u = u_0, v = v_0$  فهذه نقطة واحدة .

يعطى متجه الموضع عامة  $P$  على السطح بـ

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i}f_1(u, v) + \mathbf{j}f_2(u, v) + \mathbf{k}f_3(u, v) \quad (13)$$

فإذا فرضنا أن (١١) و (١٢) تمثل منحنى  $u$  و  $v$  المارين بالنقطة  $P$  فممنفذ يكون :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial v} f_1(u_0, v) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial v} f_2(u_0, v) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial v} f_3(u_0, v)$$

وهو المتجه المماس للمنحنى  $u$  عند النقطة  $P$  . ويكون :

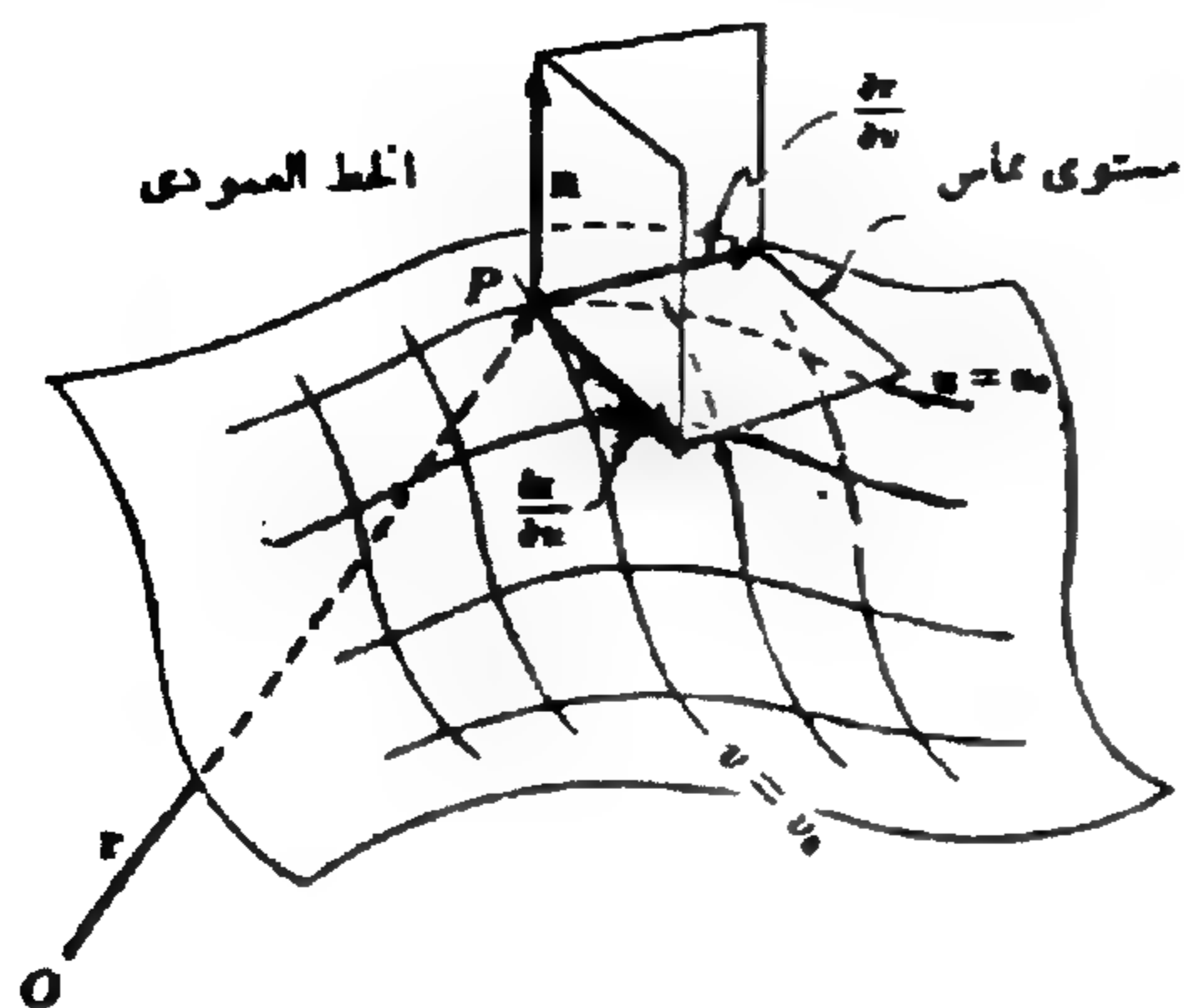
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial u} f_1(u, v_0) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial u} f_2(u, v_0) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial u} f_3(u, v_0)$$

وهو المتجه المماس للمنحنى  $v$  عند النقطة ذاتها . ويحدد المماسان مستويا مماسا لسطح عند  $P$  .

ومن الواضح أن العمودى على هذا المستوى يعطى بـ :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad (14)$$

يعرف متجه الوحدة العمودي للسطح عند  $P$  بـ :



$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} \quad (15)$$

إذا كان  $\mathbf{R}$  هو متجه الموضع لنقطة عامة على السطح عند  $P$  فإن المعادلة المتجهة هي :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) = k \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \quad (16)$$

شكل ٦١ - ٢

إذا كان  $\mathbf{R}$  متجه الموضع لنقطة عامة من المستوى المماس للسطح عند  $P$  فإن المعادلة المتجهة هي :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = 0 \quad (17)$$

أنظر المسألة ٣

**المؤثر  $\nabla$**  : لقد رأينا في الفصل ٦٠ أن مشتقة  $z = f(x, y)$  عند نقطة اختيارية  $(x, y)$  وفي اتجاه يصنع زاوية  $\theta$  مع المحور السيني الموجب هي :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

لنكتب هذه المشتقة بالشكل :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta = \left( i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (i \cos \theta + j \sin \theta) \quad (18)$$

إن المتجه  $\mathbf{u} = i \cos \theta + j \sin \theta$  هو متجه وحدة في الاتجاه الذي يصنع زاوية  $\theta$  مع محور  $x$  الموجب وإذا كتبنا العامل الآخر بالشكل :

$$\left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

فإننا نتوصل إلى تعريف مؤثر تفاضل متجه  $\nabla$  (نقرأ دل) بالشكل :

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \quad (19)$$

ربطى  $\nabla f = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y}$  في التحليل المتجه ، تدرج  $f$  ويكتب  $\text{grad } f$  وهكذا نشير (١٨) إلى أن مركبة  $\nabla f$  في اتجاه متجه الوحدة  $\mathbf{u}$  هو المشتقة المتجهة لـ  $f$  في اتجاه  $\mathbf{u}$  .

ليكن الآن  $\mathbf{r} = xi + yj$  هو متجه الموضع لنقطة  $P(x, y)$  فبأن

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \left( i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \left( i \frac{dx}{ds} + j \frac{dy}{ds} \right) \\ &= \nabla f \cdot \frac{dr}{ds}\end{aligned}$$

$$\left| \frac{df}{ds} \right| = |\nabla f| \cos \phi$$

حيث  $\phi$  الزاوية بين المتجهين  $\nabla f$  و  $\frac{dr}{ds}$  فإننا نرى أن  $\frac{df}{ds}$  يكون نهاية عظمى عندما  $\cos \phi = 1$  أى عندما يكون  $\nabla f$  و  $\frac{dr}{ds}$  نفس الاتجاه. وهكذا نجد أن القيمة العظمى للمشتقة المتجهة عند نقطة  $P$  هي  $|\nabla f|$  وأن اتجاهها هو اتجاه  $\nabla f$ .

أنظر المسألة ٤

والدالة  $w = F(x, y, z)$  نعرف

$$\nabla F = i \frac{\partial F}{\partial x} + j \frac{\partial F}{\partial y} + k \frac{\partial F}{\partial z}$$

والمشتقة المتجهة لـ  $F(x, y, z)$  عند نقطة اختيارية  $P(x, y, z)$  في الاتجاه  $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$  هي

$$\frac{dF}{ds} = \nabla F \cdot a \quad (20)$$

وكما في حالة دالة لتغيرين اثنين فإن  $|\nabla F|$  هو القيمة العظمى للمشتقة المتجهة لـ  $F(x, y, z)$  عند  $P(x, y, z)$  واتجاهها هو اتجاه  $\nabla F$ .

أنظر المسألة ٥

اعتبر الآن السطح  $F(x, y, z) = 0$ . إن معادلة المستوى المماس لهذا السطح عند إحدى نقاطه  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  هي :

$$\begin{aligned}(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z} \\ = [(x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k] \cdot \left[ i \frac{\partial F}{\partial x} + j \frac{\partial F}{\partial y} + k \frac{\partial F}{\partial z} \right] = 0\end{aligned} \quad (21)$$

عل أن نحسب المشتقات الجزئية عند  $P_0$ . يلاحظ أن العامل الأول هو متجه اختياري مار بـ  $P_0$  وواقع في المستوى المماس، بينما العامل الثاني  $\nabla F$  المحسوب عند  $P_0$  عمودى على المستوى المماس أى عمودى على السطح عند  $P_0$ .

أنظر المسألتين ٦ - ٧

**التفرق والدوران :** يعرف تفرق متجه  $F = i f_1(x, y, z) + j f_2(x, y, z) + k f_3(x, y, z)$  بـ :

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial z} f_3 \quad (22)$$

ويعرف دوران متجه  $F$  بـ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y} f_3 - \frac{\partial}{\partial z} f_2 \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial}{\partial z} f_1 - \frac{\partial}{\partial x} f_3 \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1 \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (22)$$

أنظر المسألة ٨

**التكامل :** سنقصر دراسة التكامل هنا على التكامل المادي للتجهات وعلى ما يسمى بالتكاملات الخطية ونورد مثال على التكامل الأول ما يلي . لنفرض

$$\mathbf{F}(u) = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u + a u \mathbf{k}$$

متجهها يتعلق بالمتغير العددي  $u$  . عندئذ يكون .

$$\mathbf{F}'(u) = -\mathbf{i} \sin u + \mathbf{j} \cos u + a \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F}'(u) du &= \int (-\mathbf{i} \sin u + \mathbf{j} \cos u + a \mathbf{k}) du \\ &= \mathbf{i} \int -\sin u du + \mathbf{j} \int \cos u du + \mathbf{k} \int a du \\ &= \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u + a u \mathbf{k} + \mathbf{c} \\ &= \mathbf{F}(u) + \mathbf{c} \end{aligned}$$

حيث  $\mathbf{c}$  متجه ثابت اختياري مستقل عن  $u$  بالإضافة إلى ذلك نجد :

$$\int_a^b \mathbf{F}'(u) du = \left[ \mathbf{F}(u) + \mathbf{c} \right]_a^b = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

أنظر المسألتين ٩ - ١٠

**التكاملات الخطية :** لنكن  $P_0$  و  $P_1$  نقطتين في الفراغ يصل بينهما قوس  $C$  . يمكن لهذا القوس أن يكون قطعة مستقيمة أو قطعة من منحنى فراغي  $x = g_1(t)$ ,  $y = g_2(t)$ ,  $z = g_3(t)$  أو يمكن أن يتكون من عدة أقواس منحنيات ومهما كان الأمر فإننا نفرض في  $C$  أن يكون متصلا عند كل نقطة من نقاطه وأن لا يتقاطع مع نفسه . ليكون لدينا بالإضافة لذلك الدالة الاتجاهية :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} f_1(x, y, z) + \mathbf{j} f_2(x, y, z) + \mathbf{k} f_3(x, y, z)$$

التي نعرف لنا في كل نقطة من منطقة حول  $C$  ، وبشكل خاص في كل نقطة من  $C$  ، متجه ذو طول واتجاه معلومين ل نرمز به

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (23)$$

المتجه الموضع للنقطة  $P(x, y, z)$  من  $C$  يسمى التكامل :

$$\int_C^{P_1} \left( \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds = \int_C^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (24)$$

تكاملاً خطياً ، أى أنه تكامل على طول المسار المفروض  $C$  .

كذلك على ذلك لتكن  $F$  قوة . الشغل الذى تبذله  $F$  في تحريك جسم إزاحة  $dr$  يعطى بـ ( أنظر المسألة ٩ من الفصل ١٨ ) .

$$|F| |dr| \cos \theta = F \cdot dr$$

والشغل المبذول لتحريك الجسم من موضع  $P_0$  إلى الموضع  $P_1$  على القوس  $C$  هو

$$\int_C^{P_1} F \cdot dr$$

ومن المعادلة (٢٤) نجد أن

$$dr = i dx + j dy + k dz$$

وعلى هذا تأخذ (٢٥) الشكل :

$$\int_C^{P_1} F \cdot dr = \int_C^{P_1} (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) \quad (٢٦)$$

أنظر المسألة ١١

### مسائل محلولة

١ - يتحرك جسم على المنحنى  $x = 4 \cos t, y = 4 \sin t, z = 6t$  . أوجد مقدار متجه السرعة ومقدار متجه العجلة عند الحظتين  $t = 0$  و  $t = 1/2\pi$

لتكن  $P(x, y, z)$  نقطة من المنحنى وليكن

$$r = xi + yj + zk = 4i \cos t + 4j \sin t + 6kt$$

متجه الموضع لهذه النقطة فيكون عندئذ

$$v = \frac{dr}{dt} = -4i \sin t + 4j \cos t + 6k$$

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = -4i \cos t - 4j \sin t$$

$$v = 4j + 6k; |v| = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$$

$$a = -4i; |a| = 4$$

وعند  $t = 0$  يكون

$$v = -4i + 6k; |v| = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$$

$$a = -4i; |a| = 4$$

وعند  $t = 1/2\pi$  يكون

٢ - لدينا المنحنى الفراغى  $x = t, y = t^2, z = t^3$  . أوجد عند النقطة  $t = 1$  أو عند النقطة (١ و ١ و ١) .

(أ) معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى .

(ب) متجهات الوحدة للمماس للعمودى الأساسى وثنائى العمود .

(ج) معادلات العمودى الأساسى وثنائى العمودى .

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} \quad \text{إن}$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}). \quad \text{وعند } t = 1 \text{ يكون}$$

(أ) ليكن  $\mathbf{R}$  متجه الموضع لنقطة عامة  $(X, Y, Z)$  من المستقيم المماس. فتكون المعادلة الاتجاهية لهذا المستقيم هي :

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{t}$$

$$(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k} = \frac{k}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \quad \text{أو}$$

وعلى هذا تكون معادلة المستقيم في الإحداثيات المتعامدة :

$$\frac{X-1}{1} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-1}{3}$$

وإذا كان  $\mathbf{R}$  متجه الموضع لنقطة عامة  $(X, Y, Z)$  في المستوى العمودي فإن معادله الاتجاهية هي :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0$$

$$[(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k}] \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 0 \quad \text{أو}$$

وتكون معادله في الإحداثيات المتعامدة هي :

$$(X-1) + 2(Y-1) + 3(Z-1) = X + 2Y + 3Z - 6 = 0$$

(أنظر المسألة ٢ (أ) من الفصل ٥٩)

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{(-4t - 18t^3)\mathbf{i} + (2 - 18t^2)\mathbf{j} + (6t + 12t^2)\mathbf{k}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}} \quad \text{إن (ب)}$$

$$\text{عند } t = 1 \text{ يكون : } \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right| = \frac{1}{7} \sqrt{\frac{19}{14}} = |\mathbf{K}|. \quad \text{ومن} \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{98}$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{K}|} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{\sqrt{266}}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{266}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -11 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad \text{و}$$

(ج) إذا كان  $\mathbf{R}$  متجه الموضع لنقطة عامة  $(X, Y, Z)$  على المستوى الأساسي ، فإن معادله الاتجاهية هي :

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{n}$$

$$(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k} = k \frac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{\sqrt{266}} \quad \text{أو}$$



وتكون معادلتاه في الاحداثيات المتعامدة هما :

$$\frac{X-1}{-11} = \frac{Y-1}{-8} = \frac{Z-1}{9}$$

وإذا كان  $R$  متجه الموضع لنقطة عامة  $(X, Y, Z)$  من ثنائي الممود ، فإن معادلتاه الاتجاهية هي :

$$R - r = k \cdot b$$

$$(X-1)i + (Y-1)j + (Z-1)k = k \frac{3i-3j+k}{\sqrt{19}} \quad \text{أو}$$

وتكون معادلتاه في الاحداثيات المتعامدة هما :

$$\frac{X-1}{3} = \frac{Y-1}{-3} = \frac{Z-1}{1}$$

٣- أوجد معادلات المستوى المماس والمستقيم المموى للسطح  $z = 2(u+v)$ ,  $y = 3(u-v)$ ,  $z = uv$  عند النقطة  $P(u=2, v=1)$  . إن

$$r = 2(u+v)i + 3(u-v)j + uvk$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = 2i + 3j + vk, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = 2i - 3j + uk$$

وعند  $P$  يكون :

$$r = 6i + 3j + 2k, \quad \frac{\partial r}{\partial u} = 2i + 3j + k, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = 2i - 3j + 2k$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = 9i - 2j - 12k \quad \text{ومنه}$$

وعلى هذا تكون المعادلة الاتجاهية والمادلتان في الاحداثيات المتعامدة المستقيم المموى هي :

$$R - r = k \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$$

$$(X-6)i + (Y-3)j + (Z-2)k = k(9i - 2j - 12k) \quad \text{أو}$$

$$\frac{X-6}{9} + \frac{Y-3}{-2} = \frac{Z-2}{-12} \quad \text{و}$$

وتكون معادلتا المستوى المماس الاتجاهية في الاحداثيات المتعامدة هما :

$$(R - r) \cdot \left( \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) = 0$$

$$[(X-6)i + (Y-3)j + (Z-2)k] \cdot [9i - 2j - 12k] = 0 \quad \text{أو}$$

$$9X - 2Y - 12Z - 24 = 0 \quad \text{و}$$

٤- (أ) أوجد المشتقة المتجهة لـ  $f(x, y) = x^2 - 6y^2$  عند النقطة  $(7, 2)$  في الاتجاه  $\theta = \frac{3}{4}\pi$

(ب) أوجد القيمة العظمى لهذه المشتقة عند  $(7, 2)$

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 - 6y^2) = i \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 6y^2) + j \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 6y^2) \quad \text{إن (أ)} \\ &= 2xi - 12yj \end{aligned}$$

$$u = i \cos \theta + j \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j \quad \text{و}$$

وعند (7, 2) يكون:  $\nabla f = 14i - 24j$

$$\nabla f \cdot \mathbf{a} = (14i - 24j) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j \right) = 7\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = -5\sqrt{2}$$

هو المشتقة في الاتجاه المقروض :

(ب) عند (7, 2) يكون  $\nabla f = 14i - 24j$  ويكون  $|\nabla f| = \sqrt{14^2 + 24^2} = 2\sqrt{193}$  هي القيمة العظمى للمشتقة المتجهة وبما أن :

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{7}{\sqrt{193}}i - \frac{12}{\sqrt{193}}j = i \cos \theta + j \sin \theta$$

فإن الاتجاه هو  $0 = 300^\circ 15'$  (أنظر المائلين ٢ و ٦ من الفصل ٦٠)

٥ - (أ) أوجد المشتقة المتجهة لـ  $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 4z^2$  عند  $P(1, 1, -1)$  وفي الاتجاه  $\mathbf{a} = 2i + j - k$ .

(ب) أوجد القيمة العظمى لهذه المشتقة عند  $P$ .

$$\nabla F = \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 - 2y^2 + 4z^2) = 2xi - 4yj + 8zk$$

وعند (1, 1, -1) يكون  $\nabla F = 2i - 4j - 8k$

$$\nabla F \cdot \mathbf{a} = (2i - 4j - 8k) \cdot (2i + j - k) = 8 \quad (1)$$

(ب) عند  $P$  يكون  $|\nabla F| = \sqrt{80} = 4\sqrt{20}$  والاتجاه هو  $\mathbf{a} = 2i - 4j - 8k$ .

٦ - لدينا السطح  $0 = F(x, y, z) = x^2 + 3xyz + 2y^2 - z^2 - 5$  والنقطة  $P_0(1, 1, 1)$  واقعة عليه. أوجد :

(أ) متجه الوحدة العمودي على السطح عند  $P_0$ .

(ب) معادلتا المستقيم العمودي عند  $P_0$ .

(ج) معادلة المستوى المماس عند  $P_0$ .

$$\nabla F = (3x^2 + 3yz)i + (3xz + 6y^2)j + (3xy - 2z^2)k$$

وعند  $P_0(1, 1, -1)$  يكون  $\nabla F = 6i + 9j$ .

(أ) إن  $\frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{2}{\sqrt{13}}i + \frac{3}{\sqrt{13}}j$  هو متجه الوحدة العمودي عند  $P_0$  ومتجه الوحدة الآخر هو  $-\frac{2}{\sqrt{13}}i - \frac{3}{\sqrt{13}}j$ .

(ب) إن معادلتا المستقيم العمودي هما  $\frac{X-1}{2} = \frac{Y-1}{3}, Z=1$ .

(ج) معادلة المستوى المماس هي :  $2(X-1) + 3(Y-1) = 2X + 3Y - 5 = 0$ .

٧ - أوجد زاوية تقاطع السطحين :

$$F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \quad \text{و} \quad F_2 = x^2 + 2y^2 - z - 9 = 0$$

عند النقطة (2, 1, -2)

$$\begin{aligned}\nabla F_1 &= \nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 9) = 2xi + 2yj + 2zk \quad \text{نجد أن} \\ \nabla F_2 &= \nabla(x^2 + 2y^2 - z - 8) = 2xi + 4y\mathbf{j} - \mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\nabla F_1 = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \nabla F_2 = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \quad \text{يكون } (2, 1, -2)$$

ولكن  $\nabla F_1 \cdot \nabla F_2 = |\nabla F_1| |\nabla F_2| \cos \theta$  حيث  $\theta$  هي الزاوية المطلوبة. وعلى هذا

$$(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) = |4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}| |4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}| \cos \theta$$

$$\text{ومن هنا ينتج أن } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{33}} \sqrt{33} = 0.81236, \quad \theta = 35^\circ 40' \text{ , أو } \theta = 35^\circ 40'$$

٨ - إذا كان  $\mathbf{B} = xy^2\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} - 3yz^2\mathbf{k}$ ، فأوجد (أ)  $\text{div } \mathbf{B}$  (ب)  $\text{curl } \mathbf{B}$

$$\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (xy^2\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} - 3yz^2\mathbf{k}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-3yz^2) \\ &= y^2 + 2x^2z - 6yz\end{aligned}$$

$$\text{curl } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 2x^2yz & -3yz^2 \end{vmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{aligned}&= \left[ \frac{\partial}{\partial y}(-3yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz) \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial}{\partial z}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial x}(-3yz^2) \right] \mathbf{j} + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) \right] \mathbf{k} \\ &= -(3z^2 + 2x^2y)\mathbf{i} + (4xyz - 2xy)\mathbf{k}\end{aligned}$$

٩ - إذا كان  $\mathbf{F}(u) = u\mathbf{i} + (u^2 - 2u)\mathbf{j} + (3u^2 + u^3)\mathbf{k}$ ، فأوجد (أ)  $\int_0^1 \mathbf{F}(u) du$  (ب)  $\int_0^1 \mathbf{F}(u) du$

$$\int_0^1 \mathbf{F}(u) du = \int_0^1 [u\mathbf{i} + (u^2 - 2u)\mathbf{j} + (3u^2 + u^3)\mathbf{k}] du \quad (1)$$

$$= \mathbf{i} \int_0^1 u du + \mathbf{j} \int_0^1 (u^2 - 2u) du + \mathbf{k} \int_0^1 (3u^2 + u^3) du$$

$$= \frac{u^2}{2} \mathbf{i} + \left( \frac{u^3}{3} - u^2 \right) \mathbf{j} + \left( u^3 + \frac{u^4}{4} \right) \mathbf{k} + c$$

حيث  $c = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$  ثوابت اختيارية.

$$\int_0^1 \mathbf{F}(u) du = \left[ \frac{u^2}{2} \mathbf{i} + \left( \frac{u^3}{3} - u^2 \right) \mathbf{j} + \left( u^3 + \frac{u^4}{4} \right) \mathbf{k} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \mathbf{i} - \frac{2}{3} \mathbf{j} + \frac{5}{4} \mathbf{k} \quad (ب)$$

١٠ - تطلق عجلة جسم عند لحظة  $t \geq 0$  بـ  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، فإذا كانت الإزاحة عند  $t = 0$  هي  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$

والسرعة هي  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، فأوجد  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{v}$  عند أية لحظة  $t$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \int \mathbf{a} dt = \mathbf{i} \int e^t dt + \mathbf{j} \int e^{2t} dt + \mathbf{k} \int dt \\ &= e^t \mathbf{i} + \frac{1}{2} e^{2t} \mathbf{j} + t \mathbf{k} + c_1\end{aligned}$$

وعند  $t = 0$  يكون  $v = i + \frac{1}{2}j + e_1 = i + \frac{1}{2}j$  و  $e_1 = \frac{1}{2}j$  إذن :

$$v = e^{t^2} i + \frac{1}{2}(e^{t^2} + 1)j + te^t k$$

$$r = \int v dt = e^{t^2} i + (\frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{1}{2}t)j + \frac{1}{2}t^2 k + e_1$$

وعند  $t = 0$  يكون  $r = i + \frac{1}{2}j + e_2 = 0$  و  $e_2 = -i - \frac{1}{2}j$ ، على هذا فإن

$$r = (e^{t^2} - 1)i + (\frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2})j + \frac{1}{2}t^2 k$$

١١ - أوجد الشغل الذى تبذله القوة  $F = (x + yz)i + (y + xz)j + (z + xy)k$  و تحريك جسم من نقطة الأصل إلى  $C(1, 1, 1)$ .

(أ) على الخط المستقيم  $OC$

(ب) على المنحنى  $x = t, y = t^2, z = t^3$

(ج) على الخطوط المستقيمة من  $O$  إلى  $A(1, 0, 0)$  ومن  $A$  إلى  $B(1, 1, 0)$  ومن  $B$  إلى  $C$ .

$$\begin{aligned} F \cdot dr &= [(x + yz)i + (y + xz)j + (z + xy)k] \cdot [i dx + j dy + k dz] \\ &= (x + yz) dx + (y + xz) dy + (z + xy) dz \end{aligned}$$

(أ) على المستقيم  $OC$  يكون  $x = y = z$  و  $dx = dy = dz$ .

ويأخذ التكامل المطلوب حسابه الشكل :

$$W = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} F \cdot dr = 3 \int_0^1 (x + x^2) dx = \left[ \left( \frac{3}{2}x^2 + x^3 \right) \right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

(ب) وعلى طول المنحنى المفروض  $x = t, dx = dt; y = t^2, dy = 2t dt; z = t^3, dz = 3t^2 dt$  وعند  $t = 0$  يكون  $O$  وعند  $t = 1$  يكون  $C$  إذن :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (t + t^2) dt + (t^2 + t^3) 2t dt + (t^3 - t^2) 3t^2 dt \\ &= \int_0^1 (t + 2t^3 + 3t^3) dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{2}t^4 \right]_0^1 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(ج) من  $O$  إلى  $A$  يكون  $y = z = 0, dy = dz = 0$  و تتغير  $x$  من  $0$  إلى  $1$ .

ومن  $A$  إلى  $B$  يكون  $x = 1, dx = 0, dz = 0$  و تتغير  $y$  من  $0$  إلى  $1$ .

ومن  $B$  إلى  $C$  يكون  $x = y = 1, dx = dy = 0$  و تتغير  $z$  من  $0$  إلى  $1$ .

وعلى هذا يكون المسار من  $0$  إلى  $A$   $W_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$  ويكون المسار من  $A$  إلى  $B$   $W_2 = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}$ .

وبكون المسار من  $B$  إلى  $C$   $W_3 = \int_0^1 (z + 1) dz = \frac{3}{2}$  وهكذا  $W = W_1 + W_2 + W_3 = 5/2$ .

وبوجه عام تعتمد قيمة التكامل الخطى على مسار التكامل. والتمثال المذكور هو تكامل لا يتعلق قيمته على المسار. ويمكن

البرهان على أن التكامل الخطى  $\int_C (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz)$  لا يعتمد على المسار طالما وجدت دالة  $\phi(x, y, z)$  بحيث يكون :

$$d\phi = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

لاحظ أن تكامل هذه المسألة هو :

$$(x + yz) dx + (y + xz) dy + (z + xy) dz = d\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + xyz\right)$$

### مسائل إضافية

١٢ - أوجد  $\frac{ds}{dt}$  و  $\frac{d^2s}{dt^2}$  إذا كان :

(أ)  $s = (t+1)i + (t^2+t+1)j + (t^3+t^2+t+1)k$

(ب)  $s = 1e^t \cos 2t + je^t \sin 2t + t^2k$

ج : (أ)  $i + (2t+1)j + (3t^2+2t+1)k; 2j + (6t+2)k$

(ب)  $e^t(\cos 2t - 2\sin 2t)i + e^t(\sin 2t + 2\cos 2t)j + 2tk$   
 $e^t(-4\sin 2t - 2\cos 2t)i + e^t(-3\sin 2t + 4\cos 2t)j + 2k$

١٣ - لدينا  $a = xi + yj + zk, b = i \cos u + j \sin u, c = 3u^4 - 4uk$ . احسب أولاً  $a \cdot b, a \times b, a \cdot (b \times c), a \times (b \times c)$  ثم أوجد مشتقة كل منها. أوجد أخيراً المشتقات باستخدام الصيغ.

١٤ - يتحرك جسيم على المنحنى  $x = 3t^2, y = t^3 - 2t, z = t^3$  حيث  $t$  هو الزمن. أوجد (أ) مقدار متجه السرعة ومقدار متجه العجلة عند  $t = 1$ . (ب) مركبتى السرعة والعجلة في الاتجاه  $a = 4i - 2j + 4k$  عند اللحظة  $t = 1$

ج : (أ)  $|v| = 3\sqrt{5}, |a| = 2\sqrt{19};$  (ب)  $6, 22/3$

١٥ - أوجد باستخدام طرق الاتجاهات معادلات المستوى المماس والمستوى العمودي لمنحنى المسألة ١١ من الفصل ٥٩.

١٦ - حل المسألة ١٢ من الفصل ٥٩ باستخدام طرق الاتجاهات.

١٧ - بين أن السطحين  $x = u, y = v, z = uv$  و  $x = u, y = 5u - 3v^2, z = v$  متعامدان عند  $P(1, 2, 1)$

١٨ - أوجد باستخدام طرق الاتجاهات معادلات المستوى المماس والمستقيم العمودي للسطح.

(أ)  $x = u, y = v, z = uv$  عند النقطة  $(3, -4)$   $(u, v)$ .

(ب)  $x = u, y = v, z = u^2 - v^2$  عند النقطة  $(2, 1)$   $(u, v)$ .

ج : (أ)  $4X - 3Y + Z - 12 = 0, \frac{X-3}{-4} = \frac{Y+4}{3} = \frac{Z+12}{-1}$

(ب)  $4X - 2Y - Z - 3 = 0, \frac{X-2}{-4} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-3}{1}$

١٩ - (أ) أوجد معادلة المستوى المماس والمستوى العمودي للمنحنى المسألة ٢ عند النقطة المذكورة.

(ب) أوجد معادلات المستويات المماسية والعمودية المقرونة لـ  $s = 2t - t^2, y = t^2, z = 2t + t^2$  عند  $t = 1$ .

ج : (١)  $2X - 3Y + Z - 1 = 0, 11X + 8Y - 9Z - 10 = 0$

(ب)  $X + 2Y - Z = 0, Y + 2Z - 7 = 0, 5X - 2Y + Z - 6 = 0$

٢٠ - برهن أنه يمكن أيضاً إعطاء معادلة المستوى المماس لمنحنى فراغى عند نقطة  $P$  منه بـ

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) = 0$$

٢١ - حل المسألتين ١٦ و ١٧ من الفصل ٦٠ باستخدام طرق المتجهات .

٢٢ - أوجد  $\int_a^b \mathbf{F}(u) du$  بفرض أن :

(١)  $\mathbf{F}(u) = u^2\mathbf{i} + (3u^3 - 2u)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}; a = 0, b = 2$

(ب)  $\mathbf{F}(u) = e^u\mathbf{i} + e^{-u}\mathbf{j} + u\mathbf{k}; a = 0, b = 1$

ج : (١)  $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ , (ب)  $(e - 1)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(1 - e^{-1})\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

٢٣ - تعطى عجلة جسم عند لحظة ما  $t$  بـ  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^3 - 2)\mathbf{k}$  فإذا كانت الإزاحة عند اللحظة

$t = 0$  هي  $\mathbf{r} = 0$  وكانت السرعة هي  $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$  أوجد  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{r}$  عند اللحظة  $t$

ج :  $\mathbf{v} = (\frac{1}{3}t^3 + t + 1)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + (\frac{1}{4}t^4 - 2t - 1)\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r} = (\frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + t)\mathbf{i} + \frac{1}{12}t^4\mathbf{j} + (\frac{1}{12}t^5 - t^2 - t)\mathbf{k}$

٢٤ - أوجد في كل ما يل الشغل الذي تبذله القوة المفروضة عندما تحرك جسيماً من  $O(0, 0, 0)$  إلى  $C(1, 1, 1)$

على طول (١) الخط المستقيم (ii)  $x = y = z$  المنحنى (iii)  $x = t, y = t^2, z = t^3$  الخط المستقيم من  $O$  إلى  $A(1, 0, 0)$  ومن  $A$  إلى  $B(1, 1, 0)$  ومن  $B$  إلى  $C$ .

(١)  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$

(ب)  $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

(ج)  $\mathbf{F} = (x + xyz)\mathbf{i} + (y + x^2z)\mathbf{j} + (z + x^2y)\mathbf{k}$

ج : (١) 3 (ب) 3 (ج)  $9/4, 33/14, 5/2$

٢٥ - إذا كان  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  فبين أن (١)  $\text{div } \mathbf{r} = 3$  (ب)  $\text{curl } \mathbf{r} = 0$

٢٦ - إذا كان لـ  $f = f(x, y, z)$  مشتقات جزئية من المرتبة الثانية على الأقل فبين أن :

(١)  $\nabla \times \nabla f = 0$ , (ب)  $\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0$ , (ج)  $\nabla \cdot \nabla f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$



# الفصل الثالث والستون

## التكاملات الثنائية والمكعبة

**التكامل ( البسيط )**  $\int_a^b f(x) dx$  لدالة  $y = f(x)$  متصلة في الفترة المحددة  $a \leq x \leq b$  من المحور  $x$  قد سبق تعريفه في الفصل ٢٢ . لتذكر

( أ ) نقسم الفترة  $a \leq x \leq b$  إلى  $n$  من الفترات الجزئية  $h_1, h_2, \dots, h_n$  أطوالها على الترتيب  $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \dots, \Delta_n x$  حيث  $\lambda_n$  طول أطول  $\Delta_n x$  .

( ب ) نختار النقطة  $x_1$  في  $h_1$  و  $x_2$  في  $h_2, \dots, x_n$  في  $h_n$  ونشكل المجموع :  $\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x$

( ج ) نتابع تقسيم الفترات بحيث  $\lambda_n \rightarrow 0$  عندما  $n \rightarrow \infty$

( د ) إن :  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k x$

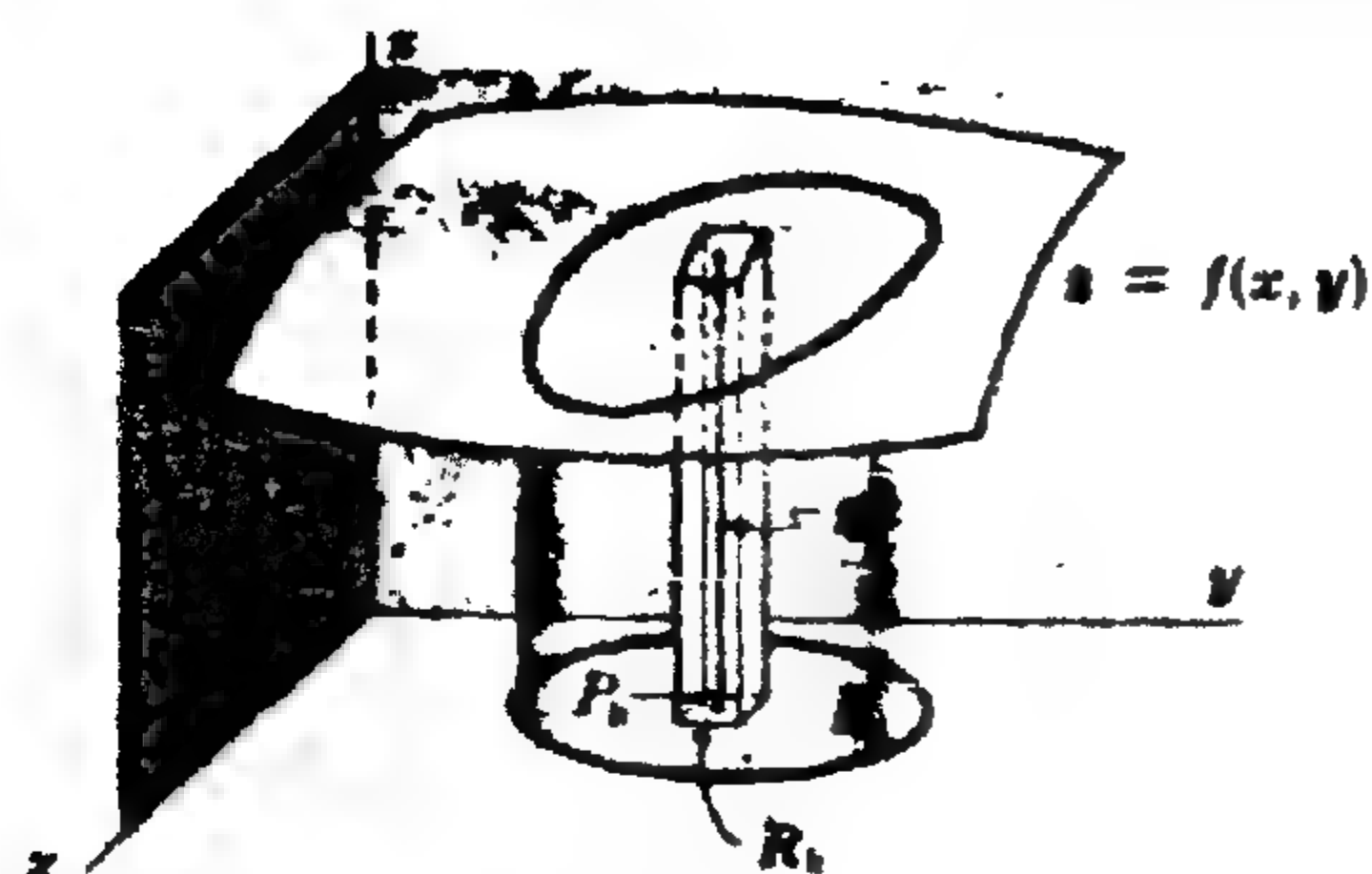
**التكامل الثنائي** • ليكن لدينا الدالة  $z = f(x, y)$  المتصلة في منطقة محددة  $R$  من المستوى  $xOy$  . لنقسم هذه المنطقة ( أنظر الشكل ٦٣ - ١ ) إلى  $n$  منطقة جزئية  $R_1, R_2, \dots, R_n$  مساحتها  $\Delta_1 A, \Delta_2 A, \dots, \Delta_n A$  على الترتيب لنفتر بعد ذلك في كل منطقة جزئية  $R_k$  نقطة  $P_k(x_k, y_k)$  ونشكل المجموع .

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta_k A = f(x_1, y_1) \Delta_1 A + f(x_2, y_2) \Delta_2 A + \dots + f(x_n, y_n) \Delta_n A \quad (1)$$

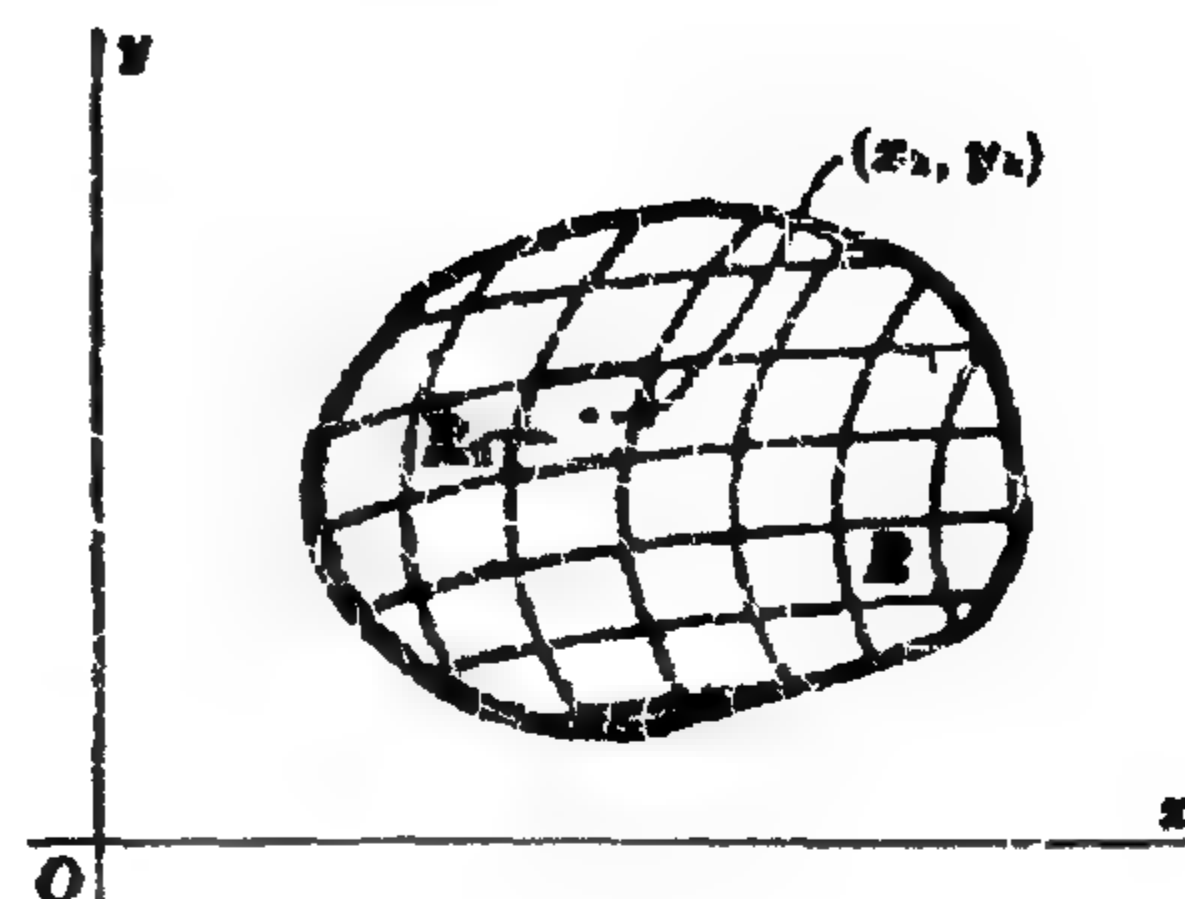
لنعرف الآن قطر منطقة جزئية على أنه أكبر بعد بين أية نقطتين واقعتين داخل المنطقة أو على حدودها ، ولنرمز بـ  $\lambda_n$  لأكبر أقطار المناطق الجزئية .

نفرض أن عدد المناطق الجزئية يزداد بحيث  $\lambda_n \rightarrow 0$  عندما  $n \rightarrow \infty$  عندئذ يمكن تعريف التكامل الثنائي لدالة  $f(x, y)$  على المنطقة  $R$  على أنه :

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta_k A \quad (2)$$



شكل ٦٣ - ٢



شكل ٦٣ - ١

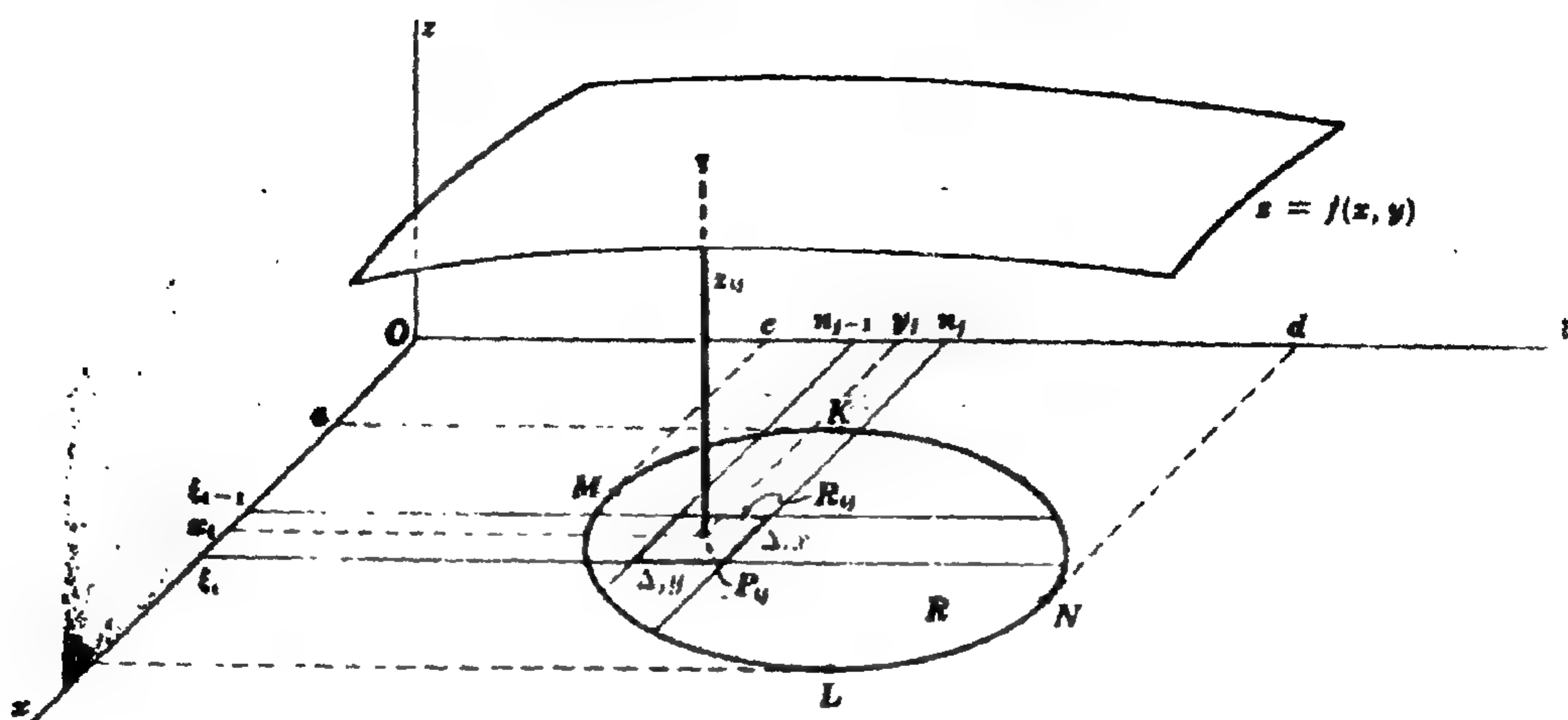
وإذا كانت الدالة  $z = f(x, y)$  ليست سالبة في المنطقة  $R$  فإنه يمكن ، كما يبدو من الشكل ٦٣ - ٢ تفسير التكامل الثنائي (٢) على أنه حجم ، فكل حد من الشكل  $f(x_k, y_k) \Delta_k A$  من (١) يعطينا حجم عمود رأسي مساحة كل من قاعدتيه المتوازيين  $\Delta_k A$  وارتفاعه هو المسافة  $z_k$  مقيسة على المستقيم الرأسى المقام من النقطة المختارة  $P_k$  على السطح  $z = f(x, y)$  . وهذا الحجم ، يمكن اعتباره بدوره تقريباً حجم العمود الرأسى الذى قاعدته السفلى هي المنطقة الجزئية  $R_k$  وقاعدته العليا مسط  $R_k$  على السطح . إذن المعادلة (١) هي تقريب الحجم الواقع تحت السطح ( أى الحجم الذى قاعدته السفلى في المستوى  $xOy$  وقاعدته العليا واقعة على السطح الناتج من حركة مستقيم مواز لمحور  $z$  على طول حدود  $R_k$  ) وأن المعادلة (٢) تعطى ، عن طريق الحدس على الأقل ، قياس هذا الحجم .

إن حساب التكامل الثنائي عن طريق الجمع المباشر صعب مهما كان التكامل بسيطاً ولذا فإننا سوف لا نحاوله هنا .

**التكامل المكرر .** لننظر في الحجم المعروف كما سبق ولنفرض أن حدود  $R$  هي بحيث لا تشترك مع أى مستقيم مواز لمحور  $x$  أو أى مستقيم مواز لمحور  $y$  في أكثر من نقطتين . لرسم ( أنظر الشكل ٦٣ - ٢ ) المماسين  $x = a$  و  $x = b$  لحدود ولنفرض أن نقطتي التماس هما  $k$  و  $L$  . لرسم كذلك المماسين  $y = c$  و  $y = d$  ولنفرض أن نقطتي التماس هما  $M$  و  $N$  . لتكن معادلة المنحنى المستوى  $LMK$  هي  $y = g_1(x)$  ومعادلة المنحنى المستوى  $LNK$  هي  $y = g_2(x)$  . لنقسم الفترة  $a \leq x \leq b$  إلى  $m$  من الفترات الجزئية  $h_1, h_2, \dots, h_m$  أطوالها  $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \dots, \Delta_m x$  على الترتيب ، ولتكن نقط التقسيم هي  $x = \xi_1, x = \xi_2, \dots, x = \xi_{m-1}$  ( كما في الفصل ٢٣ ) . ولنقسم الفترة  $c \leq y \leq d$  إلى  $n$  من الفترات الجزئية  $k_1, k_2, \dots, k_n$  أطوالها  $\Delta_1 y, \Delta_2 y, \dots, \Delta_n y$  على الترتيب ولتكن نقط التقسيم هي  $y = \eta_1, y = \eta_2, \dots, y = \eta_{n-1}$  . لرمز ب  $\lambda_m$  لأطول فترة من  $\Delta_1 x$  و  $\mu_n$  لأطول فترة من  $\Delta_1 y$  لرسم بمس ذلك المستقيمت المتوازية  $x = \xi_1, x = \xi_2, \dots, x = \xi_{m-1}$  والمستقيمت المتوازية  $y = \eta_1, y = \eta_2, \dots, y = \eta_{n-1}$  تقسم بذلك المنطقة  $R$  إلى مجموعة مستطيلات  $R_{ij}$  مساحتها  $\Delta_i x \Delta_j y$  وإلى مجموعة من المستطيلات الناقصة شملها فيما يلي . لنختار على كل فترة جزئية  $h_i$  نقطة  $x = x_i$  وعلى كل فترة جزئية  $k_j$  نقطة  $y = y_j$  فتحدد بذلك في كل منطقة جزئية  $R_{ij}$  نقطة  $P_{ij}(x_i, y_j)$  لنلحق بكل منطقة جزئية  $R_{ij}$  بواسطة معادلة السطح ، عدداً  $z_{ij} = f(x_i, y_j)$  ولنشكل المجموع :

$$\sum_{i=1,2,\dots,m} \sum_{j=1,2,\dots,n} f(x_i, y_j) \Delta_i x \Delta_j y \quad (٢)$$

ليست (٢) التى حصلنا عليها إلا مجرد حالة خاصة من (١) ، وبالتالى فإنه إذا ازداد عدد المستطيلات إلى ما لا نهاية بحيث يتحول كل من  $\lambda_m$  و  $\mu_n$  إلى الصفر فإنه ينبغي أن تسوى نهاية (٢) التكامل الثنائي (٢) .



شكل ٦٣ - ٢

لإجراء هذه النهاية ، نختار أولاً أحد الفترات الجزئية وليكن  $h_i$  ونشكل المجموع .

$$\left\{ \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta y \right\} \Delta x, \quad (i \text{ ثابتة})$$

الذي يمتد إلى جميع المستطيلات التي أحد أبعادها  $h_i$  ، أي يمتد إلى جميع المستطيلات في العمود  $i$  . فإذا جعلنا  $n \rightarrow +\infty$  فإن  $\mu_n \rightarrow 0$  وإن :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta y \right\} \Delta x &= \left\{ \int_{y_1(x_i)}^{y_2(x_i)} f(x_i, y) dy \right\} \Delta x \\ &= \phi(x_i) \Delta x \end{aligned}$$

لنجمع بعد ذلك على  $m$  عموداً ولنجعل  $m \rightarrow +\infty$  فنحصل على :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m \phi(x_i) \Delta x &= \int_a^b \phi(x) dx \\ &= \int_a^b \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx \end{aligned} \quad (٤)$$

ومع أننا سوف نستغنى عن الأقواس من الآن فإنه ينبغي أن نفهم (٤) باستمرار على أنها حساب قيمة تكاملين معمودين بسيطين وفق الترتيب المذكور . أي أننا نكامل  $f(x, y)$  أولاً بالنسبة لـ  $y$  (معتبرين  $x$  ثابتة) من  $y = g_1(x)$  الحد الأدنى لـ  $R$  إلى  $y = g_2(x)$  الحد الأعلى لـ  $R$  . ثم نكامل بعد ذلك النتيجة بالنسبة لـ  $x$  من  $x = a$  لأقصى نقطة من  $R$  يساراً إلى  $x = b$  لأقصى نقطة من  $R$  يميناً . يسمى التكامل (٤) التكامل المكرر .

يترك للقارئ ، على شكل تمرين ، أن يشكل أولاً المجموع الممتد على جميع المستطيلات في كل صف ثم يشكل المجموع الممتد على جميع الصفوف ليحصل على التكامل المكرر المكافئ .

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy \quad (٥)$$

حيث  $x = h_1(y)$  و  $x = h_2(y)$  مادلنا المنحنين المنويين  $MKN$  و  $MLN$  على الترتيب .

سنرى في المسألة ١ وبطريقة مختلفة كيف أن التكامل المكرر (٤) يقيس الحجم الذي نحن بصدده . ولتتعارف على حساب قيم التكاملات المكررة أنظر المسائل ٢ - ٦ .

إن الصعوبة الرئيسية التي تصادفنا عند تشكيل التكاملات المكررة في الفصول التالية تكمن في تحديد حدود التكامل اللازمة لتنطية المنطقة  $R$  والمنافسة التي قدمناها ارتكزت على مناطق بسيطة ، وإذا أردت أن تشمل المناقشة مناطق أكثر تعقيد فانظر . المسائل ٧ - ٩ .

### مسائل محلولة

١- لتكن  $z = f(x, y)$  دالة غير سالبة ومتصلة في المنطقة  $R$  من المستوى  $xOy$  ، ولنفرض أن حدود المنطقة تتكون من قوسى المنحنين  $y = g_1(x)$  و  $y = g_2(x)$  . المتلاقيين عند النقطتين  $K$  و  $L$  كما في الشكل ٦٣ - ٤ . لننظر في الحجم  $V$  الواقع تحت السطح .

لنفرض أن مقطع هذا الحجم مع المستوى  $x = x_i$  ، حيث  $a < x_i < b$  يلاقى محيط  $R$  في النقطتين  $S$  و  $T$  ،  $S = [x_i, g_1(x_i)]$  و  $T = [x_i, g_2(x_i)]$  ويلاقى السطح  $z = f(x, y)$  في القوس  $UV$  الذي يكون عليه  $z = f(x, y)$  . إن مساحة هذا المقطع  $STUV$  تعطى بـ

$$A(x_i) = \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y) dy$$

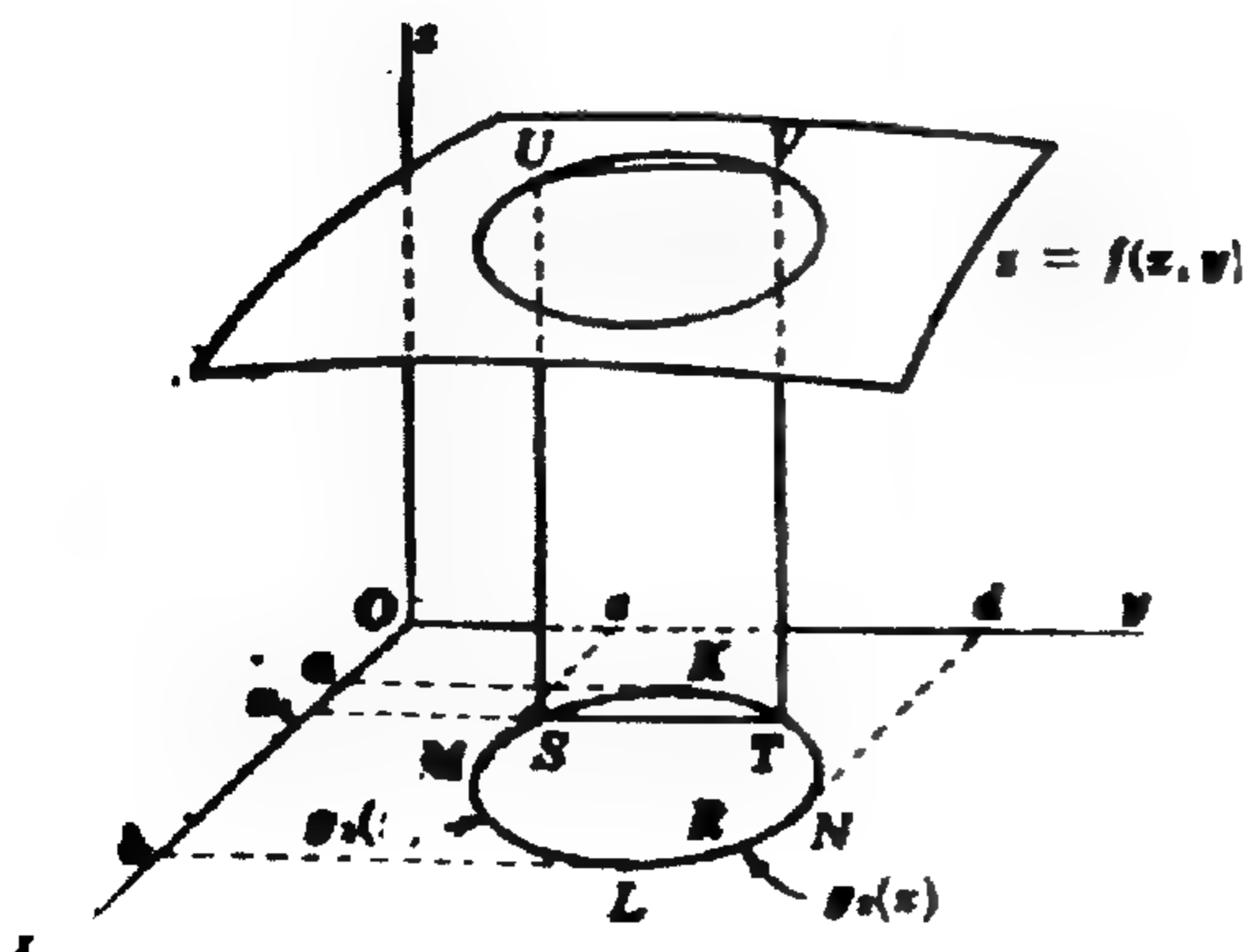
وهكذا يرى أن مساحات مقاطع الحجم بمستويات موازية للمستوى  $yOz$  هي دوال معلومة في  $x$  :

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

حيث  $x$  بعد المستوى القاطع من نقطة الأصل واستناداً إلى الفصل ٢٦ يكون الحجم المطلوب هو :

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

وهذا هو التكامل المكرر الوارد في المعادلة (٤)



شكل ٦٣ - ٤

$$\int_0^1 \int_0^x dy dx = \int_0^1 [y]_0^x dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - 7$$

$$\int_1^2 \int_0^x (x+y) dx dy = \int_1^2 \left( \frac{1}{2} x^2 + xy \right) \Big|_0^x dy = \int_1^2 6y^2 dy = 2y^3 \Big|_1^2 = 14 - 7$$

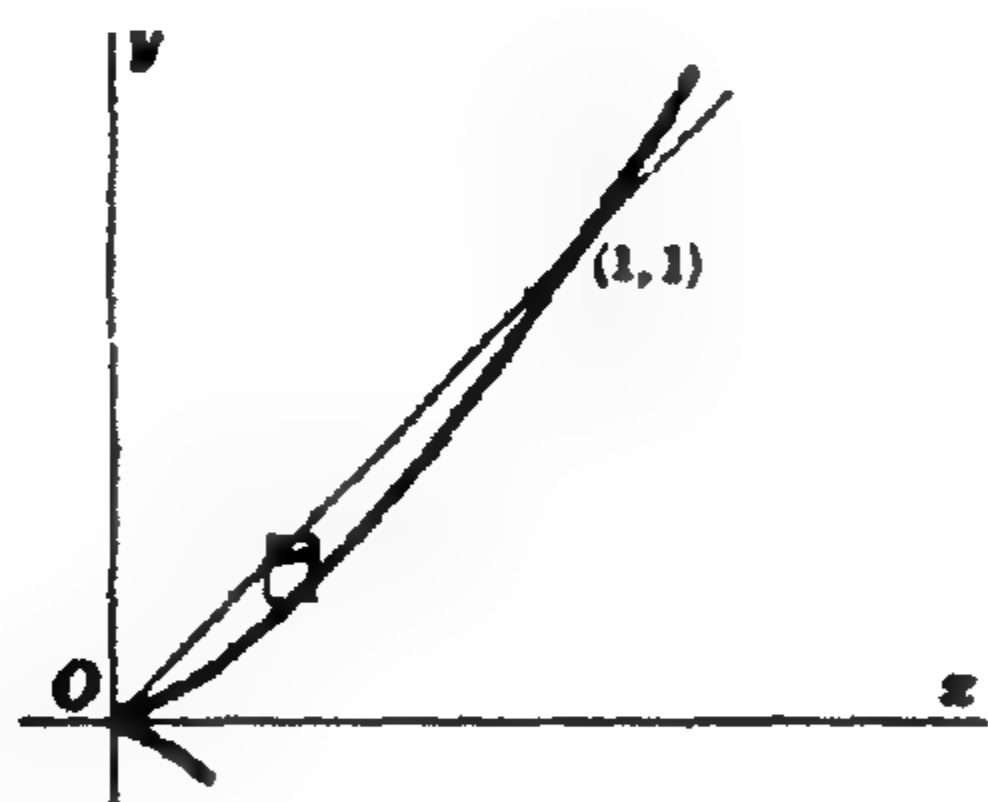
$$\int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{x^2+1} x dy dx = \int_{-1}^1 (xy) \Big|_{x^2-1}^{x^2+1} dx = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 - 2x^3 + 2x) dx = \frac{9}{4} - 8$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^{\cos \theta} \rho \sin \theta d\rho d\theta &= \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2} \rho^2 \sin \theta \right) \Big|_0^{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \left( -\frac{1}{6} \cos^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

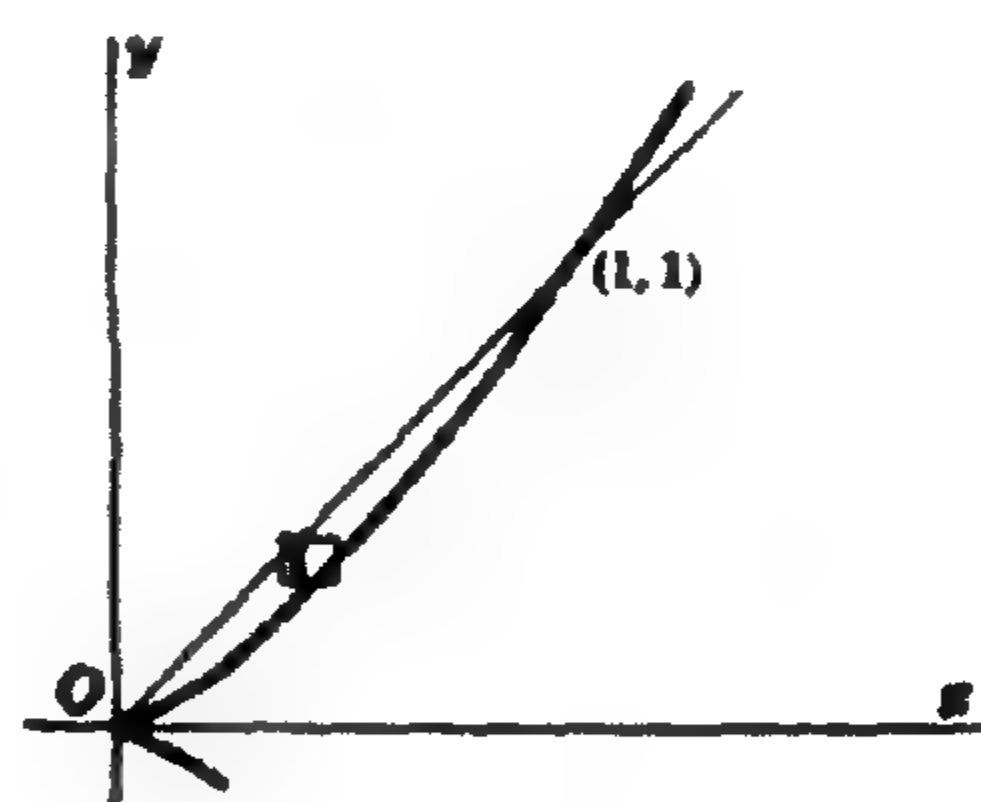
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos^2 \theta} \rho^3 d\rho d\theta &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{4} \rho^4 \right) \Big|_0^{4 \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} (64 \cos^4 \theta - 4) d\theta \\ &= \left[ 64 \left( \frac{3\theta}{8} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{32} \right) - 4\theta \right]_0^{\pi/2} = 10\pi \end{aligned}$$

٧ - احسب قيمة  $\iint_R dA$  حيث  $R$  هي المنطقة الواقعة في الربع الأول بين القطع المكافئ  $y^2 = x^3$  والمستقيم  $y = x$ .

يتقاطع القطع المكافئ مع المستقيم في النقطتين  $(0,0)$  و  $(1,1)$  اللتين تحددان القيم القصوى لـ  $x$  و  $y$  في المنطقة  $R$ .



شكل ٦٢ - ٦



شكل ٦٢ - ٥

حل أول : أنظر الشكل ٦٢ - ٥ لتكامل أولاً على شريط أفقي ، أي بالنسبة لـ  $x$  من  $x = y$  (المستقيم) إلى  $x = y^2/3$  (القطع المكافئ) ثم تكامل بالنسبة لـ  $y$  من  $y = 0$  إلى  $y = 1$ .

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_y^{y^2/3} dx dy = \int_0^1 (y^2/3 - y) dy = \left[ \frac{1}{9} y^3 - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{18}$$

حل ثان : أنظر الشكل ٦٢ - ٦ لتكامل أولاً على شريط رأسي ، أي بالنسبة لـ  $y$  من  $y = x^{1/2}$  (القطع المكافئ) إلى  $y = x$  (المستقيم) ثم تكامل بالنسبة لـ  $x$  من  $x = 0$  إلى  $x = 1$ .

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^{1/2}}^x dy dx = \int_0^1 (x - x^{3/2}) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

٨ - احسب قيمة  $\iint_R dA$  حيث  $R$  هي المنطقة الواقعة بين  $y = 2x$  و  $y = x^2$  إلى يسار  $x$ .

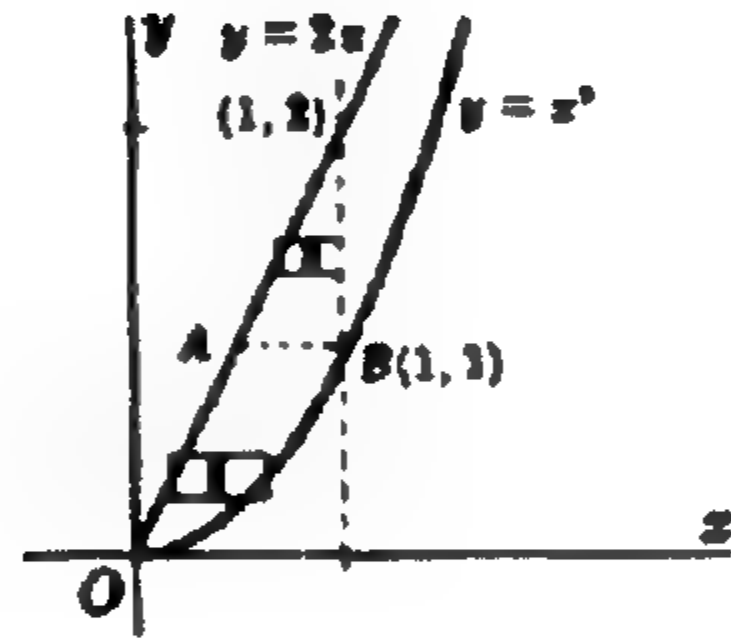
لتكامل أولاً على شريط رأسي (أنظر الشكل ٦٣ - ٧) فنجد :

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x} dy dx = \int_0^1 (2x - x^2) dx = \frac{2}{3}$$

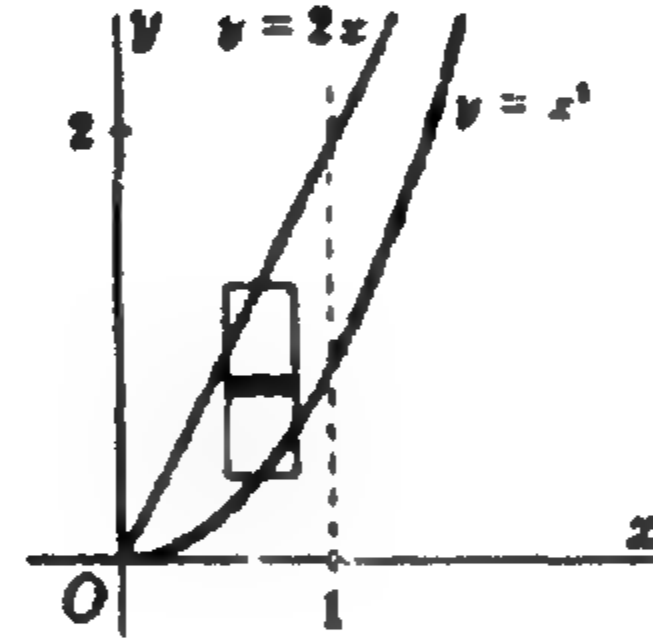
أما إذا استعملنا الأشرطة الأفقية (أنظر الشكل ٦٣ - ٨) فنحتاج إلى تكاملين متتاليين. لرمز  $R_1$  لذلك الجزء من  $R$  الواقع تحت  $AB$  وب  $R_2$ .

لذلك الجزء الواقع فوق  $AB$  عندئذ يكون :

$$\iint_R dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x} dx dy + \int_1^2 \int_0^1 dx dy = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$



شكل ٦٣ - ٨



شكل ٦٣ - ٧

٩ - احسب قيمة  $\iint_R x^2 dA$  حيث  $R$  هي المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين القطع الزائد  $xy = 16$  والمستقيمتين  $x = 8$ ،  $y = 0$ ،  $x = 8$ ،  $y = x$ . أنظر الشكل ٦٣ - ٩.

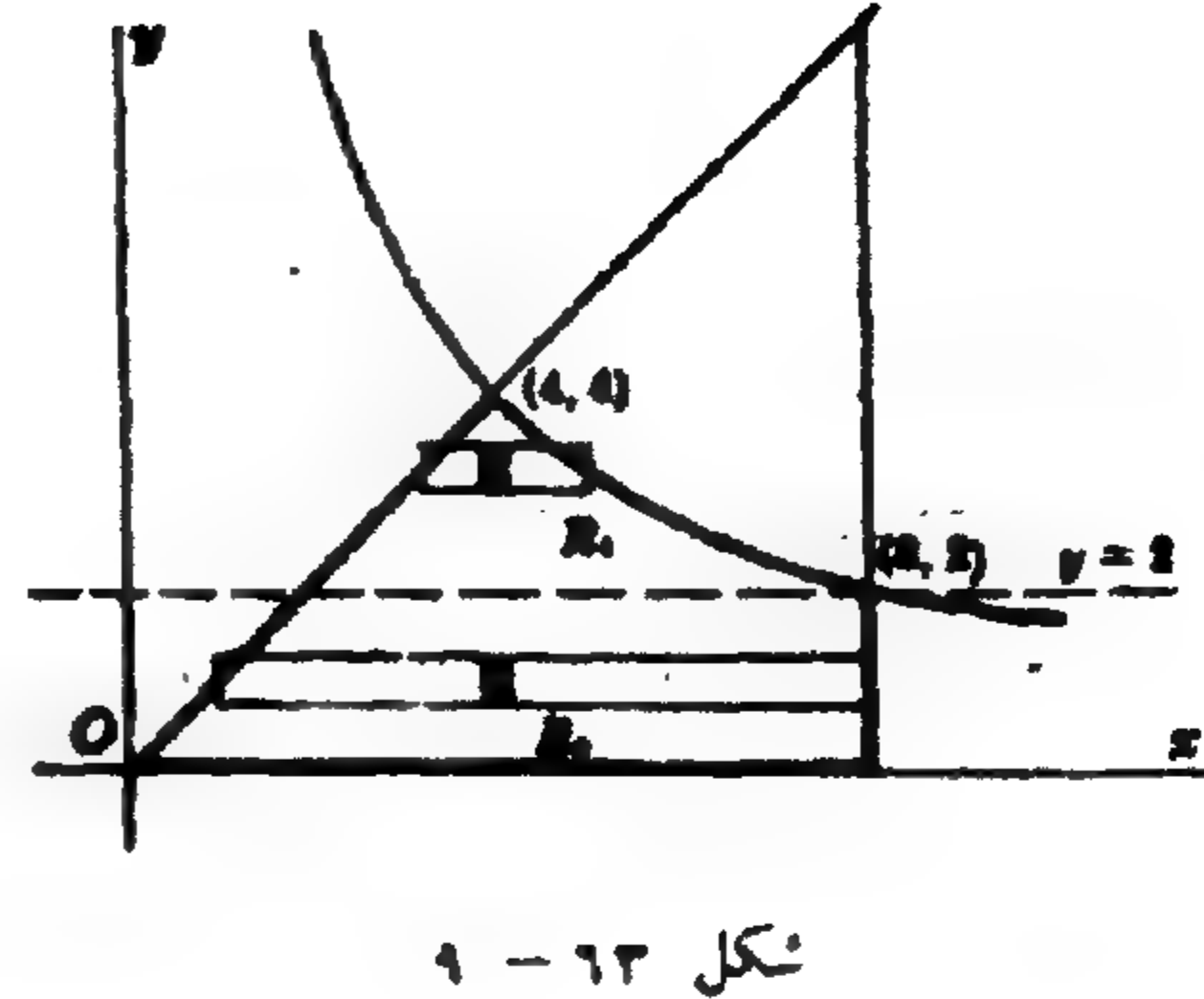
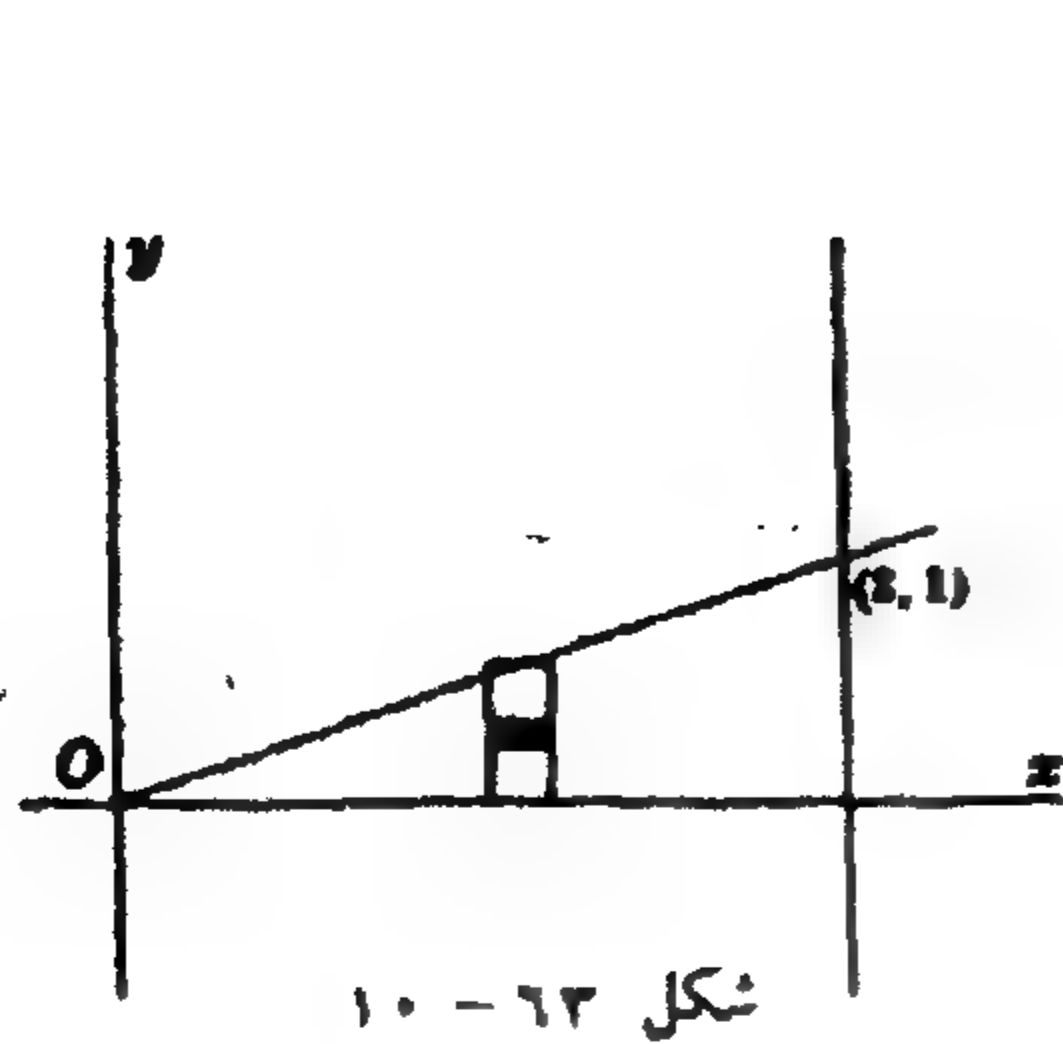
يتضح من الشكل ٦٣ - ٩ أنه ينبغي تجزئة المنطقة  $R$  إلى منطقتين وأن نحسب قيمة التكامل المكرر في كل منهما. لرمز  $R_1$  لتلك المنطقة من  $R$  الواقعة فوق المستقيم  $y = 2$  وب  $R_2$  للمنطقة الواقعة تحت ذلك المستقيم عندئذ :

$$\begin{aligned} \iint_R x^2 dA &= \iint_{R_1} x^2 dA + \iint_{R_2} x^2 dA = \int_1^4 \int_0^{16/y} x^2 dx dy + \int_0^2 \int_0^8 x^2 dx dy \\ &= \frac{1}{3} \int_1^4 \left( \frac{16^2}{y^3} - y^3 \right) dy + \frac{1}{3} \int_0^2 (8^3 - y^3) dy = 448 \end{aligned}$$

ويمكن أن نقسم المنطقة  $R$  بالمستقيم  $x = 4$ ، وهذا ما نتركه للقارئ كتمرين ، فنحصل على :

$$\iint_R x^2 dA = \int_0^4 \int_0^{16/x} x^2 dy dx + \int_4^8 \int_0^{16/x} x^2 dy dx$$





٩٠ - احسب قيمة  $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$  بأن تعكس أولا ترتيب التكامل

لا يمكن حساب التكامل المفروض مباشرة لأنه لا يمكن التعبير عن  $\int e^{x^2} dx$  بدوال ابتدائية. إن المنطقة  $R$  محصورة بين المستقيمتين  $x = 3y$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$  وإذا أردنا أن نعكس ترتيب التكامل فعلى أن نكامل أولا بالنسبة لـ  $y$  من  $y = 0$  إلى  $y = x/3$  ثم بالنسبة لـ  $x$  من  $x = 0$  إلى  $x = 3$  فنجد -

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy &= \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2} dy dx \\ &= \int_0^3 e^{x^2} y \Big|_0^{x/3} dx = \frac{1}{3} \int_0^3 e^{x^2} x dx = \frac{1}{6} e^{x^2} \Big|_0^3 = \frac{1}{6} (e^9 - 1) \end{aligned}$$

### مسائل إضافية

١١ - احسب قيمة التكاملات المكررة التالية :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^2 x e^y dy dx &= \frac{1}{2} e - 1 \quad (أ) \\ \int_0^1 \int_0^2 dx dy &= 1 \quad (ب) \\ \int_0^1 \int_0^{1-y} y dx dy &= \frac{32}{3} \quad (ج) \\ \int_0^1 \int_0^{1-y} (x+y) dx dy &= 9 \quad (د) \\ \int_0^{\arctan 3/2} \int_0^{2 \sec \theta} \rho d\rho d\theta &= \frac{70}{3} \quad (هـ) \\ \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta &= \frac{1}{40} \quad (و) \\ \int_0^{\pi/4} \int_0^{\tan \theta \sec \theta} \rho^2 \cos^2 \theta d\rho d\theta &= \frac{3}{4} \quad (ز) \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos \theta} \rho^2 \cos^2 \theta d\rho d\theta &= \frac{49}{32} \pi \quad (ح) \\ \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} (y+y^2) dy dx &= \frac{7}{60} \quad (ط) \end{aligned}$$

١٢ - احسب كلا من التكاملات الثنائية التالية باستخدام التكاملات المكررة .

احسب قيمة التكامل المكرر بكلا الترتيبين إذا كان الأمر سهلاً .

( أ ) الدالة  $x$  والمنطقة محصورة بين  $y = x^2$  و  $y = x^3$  . ج :  $1/20$

( ب ) الدالة  $y$  والمنطقة هي المذكورة في ( أ ) . ج :  $1/35$

( ج ) الدالة  $x^2$  والمنطقة محصورة بين المستقيمتين  $x = 2$  ،  $y = 2x$  ،  $y = x$  . ج :  $4$

( د ) الدالة  $1$  والمنطقة واقعة في الربع الأول بين  $2y = x^2$  ،  $y = 3x$  و  $x + y = 4$  . ج :  $8/3$  ؛  $46/4$

( هـ ) الدالة  $y$  والمنطقة واقعة فوق  $y = 0$  ومحصورة بين  $y^2 = 4x$  و  $y^2 = 5 - x$  . ج :  $5$

( و ) الدالة  $\frac{1}{\sqrt{2y - y^2}}$  والمنطقة في الربع الأول محدها بـ  $x^2 = 4 - 2y$  . ج :  $4$

١٣ - اعكس في المسائل ١١ ( أ ) - ( ح ) ترتيب التكامل و احسب التكاملات المكررة الناتجة .

# الفصل الرابع والستون

## المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية للسطوح المستوية

**حساب مساحة السطح بالتكامل الثنائي** • إذا جعلنا  $f(x, y) = 1$  في التكامل الثنائي الوارد في الفصل

٦٣ فإن هذا التكامل يأخذ الشكل  $\iint_R dA$ . ويقاس هذا التكامل بالوحدات المكعبة حجم اسطوانة طولها يساوي وحدة الأطوال ، ويقاس بالوحدات المربعة مساحة المنطقة  $R$ .

انظر المسائل ١ - ٢

يكون الاحداثيات القطبية  $A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho d\theta$  حيث نأخذ  $\rho_1(\theta), \rho_2(\theta)$   $\theta = \alpha, \theta = \beta$ .  
بحيث تغطي المنطقة  $R$  فلا .

انظر المسائل ٣ - ٥

**المراكز المتوسطة** • إن الاحداثيين  $(x, y)$  للمركز المتوسط للمنطقة المستوية  $R$  التي مساحتها  $A = \iint_R dA$  يحققان العلاقات :

$$A \cdot \bar{y} = M_x \quad \text{و} \quad A \cdot \bar{x} = M_y$$

$$\bar{y} \cdot \iint_R dA = \iint_R y dA \quad \text{و} \quad \bar{x} \cdot \iint_R dA = \iint_R x dA \quad \text{أو}$$

انظر المسائل ٦ - ٩

**عزما القصور الذاتي** . لمنطقة مستوية  $R$  بالنسبة لمحورين الاحداثيين يعطيان بـ :

$$I_y = \iint_R x^2 dA \quad \text{و} \quad I_x = \iint_R y^2 dA$$

أما عزم القصور الذاتي القطبي ( أى عزم القصور الذاتي بالنسبة لمستقيم مار بنقطة الأصل وعمودى على مستوى السطح ) للسطح المستوي  $R$  فيعطى بـ :

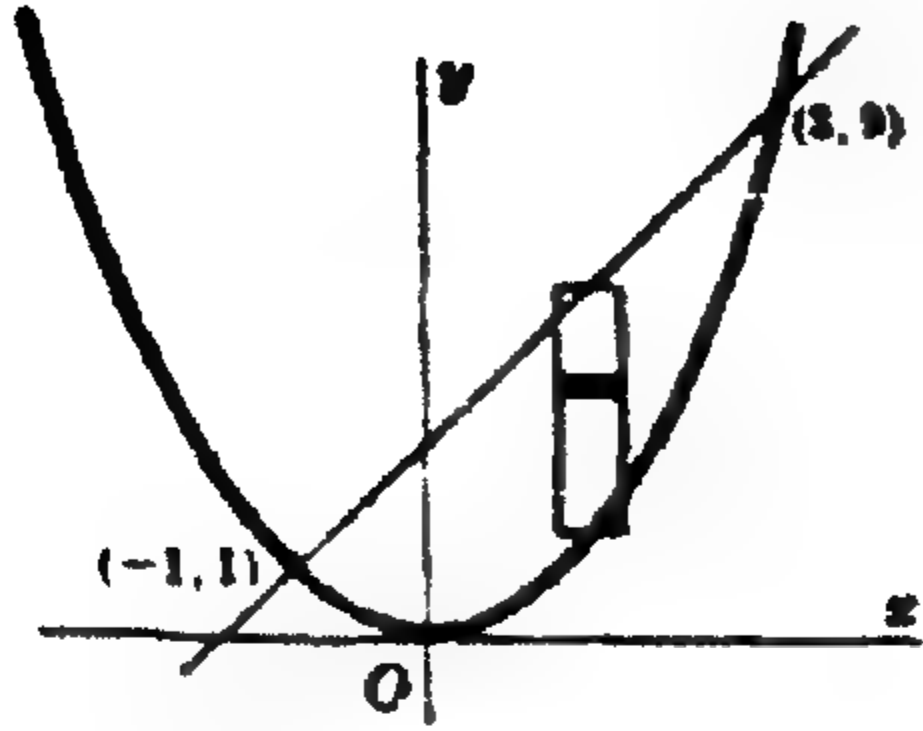
$$I_o = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) dA$$

انظر المسائل ١٠ - ١٢

## مسائل مطولة

١ - احسب مساحة السطح الواقع بين القطع المكافئ  $y = x^2$  والمستقيم  $y = 2x + 3$ .

باستخدام الشرائح الرأسية ( انظر الشكل ٦٤ - ١ ) نجد أن :

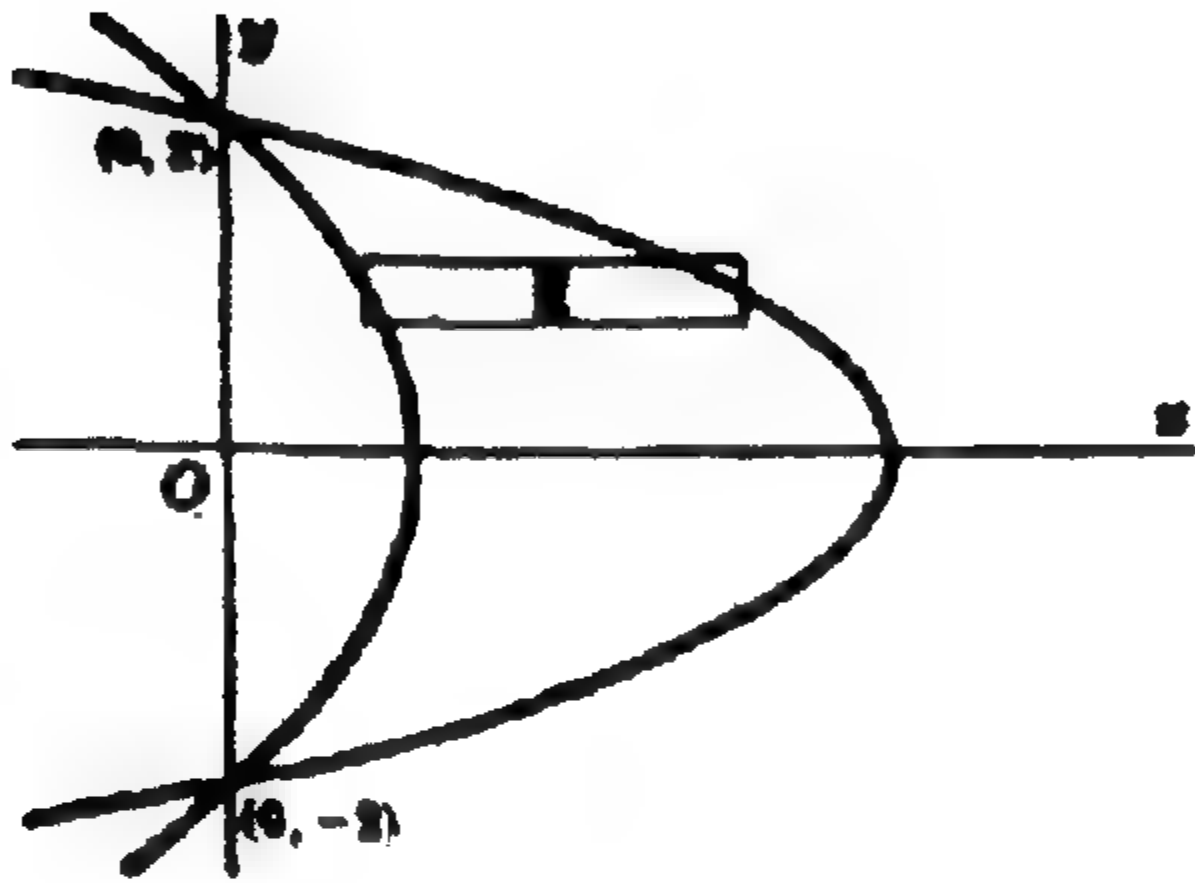


شكل ٦٤ - ١

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 \int_{x^2}^{2x+3} dy \, dx \\ &= \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) \, dx \\ &= 82/3 \text{ square units} \end{aligned}$$

٢ - احسب مساحة السطح المحصورة بين القطعين المكافئين  $y = 4 - x^2$  و  $y = 4 - 4x$ .

باستخدام الشرائح الأفقية ( انظر الشكل ٦٤ - ٢ ) والاستفادة من التناظر .

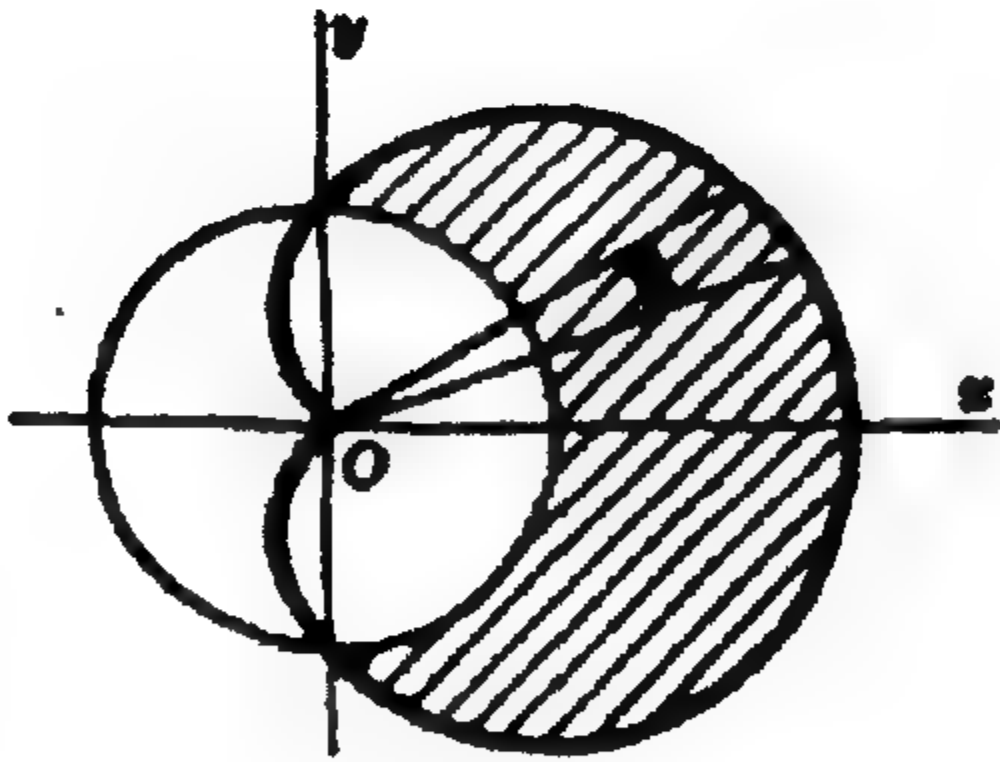


شكل ٦٤ - ٢

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^4 \int_{1-y/4}^{4-y^2} dx \, dy \\ &= 2 \int_0^4 [(4 - y^2) - (1 - \frac{1}{4}y^2)] \, dy \\ &= 6 \int_0^4 (1 - \frac{3}{4}y^2) \, dy \\ &= 8 \text{ square units} \end{aligned}$$

٣ - احسب مساحة السطح الواقعة خارج الدائرة  $p = 2$  وداخل منحنى القلب  $p = 2(1 + \cos \theta)$ .

إن المساحة المطلوبة ، بسبب التناظر ، تساوى ضعف المساحة التي يمسحها نصف القطر المتجه عندما تتغير  $\theta$  من  $\theta = 0$  إلى  $\theta = \frac{1}{2}\pi$  وهكذا فإن :



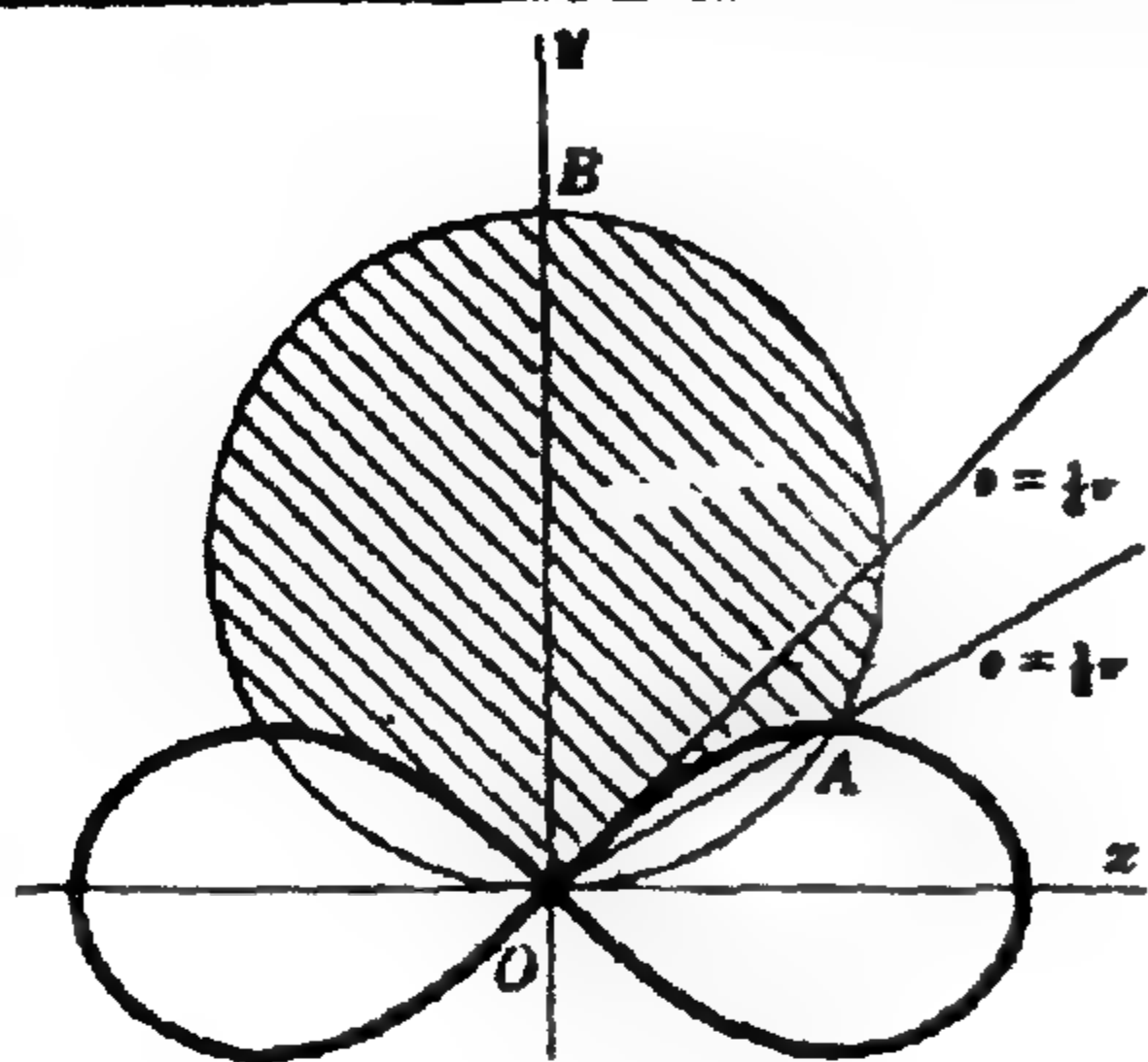
شكل ٦٤ - ٣

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos \theta)} p \, dp \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{1}{2} p^2 \right]_2^{2(1+\cos \theta)} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} (2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 4 \left[ 2 \sin \theta + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = (\pi + 8) \text{ square units} \end{aligned}$$

٤ - احسب مساحة السطح الواقع داخل الدائرة  $p = 4 \sin \theta$  وخارج المنحنى ذو المروتين ( اليمينسكات )  $p^2 = 8 \cos 2\theta$ .

( إن المساحة المطلوبة تساوى ضعف مساحة قطعة السطح في الربع الأول بين المنحنيين والمستقيم  $\theta = \frac{1}{2}\pi$  . لاحظ أن نصف القطر المتجه  $OA$  يرسم قوس الدائرة عندما تتغير  $\theta$  من  $\theta = \pi/6$  إلى  $\theta = \pi/2$  وعلى هذا فإنه ينبغي أن نعتبر المنطقة

مكونه من منطقتين إحداهما تحت المستقيم  $\theta = \pi/4$  والآخرى فوقه .  
إذن :



شكل ٦٤ - ٤

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{\pi/8}^{\pi/4} \int_{\sqrt{2} \cos 2\theta}^{4 \sin \theta} \rho \, d\rho \, d\theta + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/8} \int_0^{4 \sin \theta} \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_{\pi/8}^{\pi/4} (16 \sin^2 \theta - 8 \cos 2\theta) \, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/8} 16 \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= (8\pi + 4\sqrt{3} - 4) \end{aligned}$$

$$N = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx. \quad \text{بحسب قيمة}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \, dy, \quad \text{بما أن}$$

$$\begin{aligned} N^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \, dy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \iint_A e^{-(x^2+y^2)} \, dA \end{aligned} \quad \text{فإن}$$



شكل ٦٤ - ٥

وبالانتقال إلى الإحداثيات القطبية ( $x^2 + y^2 = \rho^2$ ,  $dA = \rho \, d\rho \, d\theta$ ).

$$\begin{aligned} N^2 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \cdot \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left\{ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right) \right\}_0^\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4} \\ \text{ومن } N &= \sqrt{\pi}/2 \end{aligned}$$

٦ - عين المركز المتوسط لسطح المستوى المحصور بين القطع المكافئ

$$y = 6x - x^2 \quad \text{والمستقيم } y = x.$$



شكل ٦٤ - ٦

$$A = \iint_A dA = \int_0^1 \int_0^{6x-x^2} dy \, dx = \int_0^1 (6x - x^2) \, dx = \frac{125}{6}$$

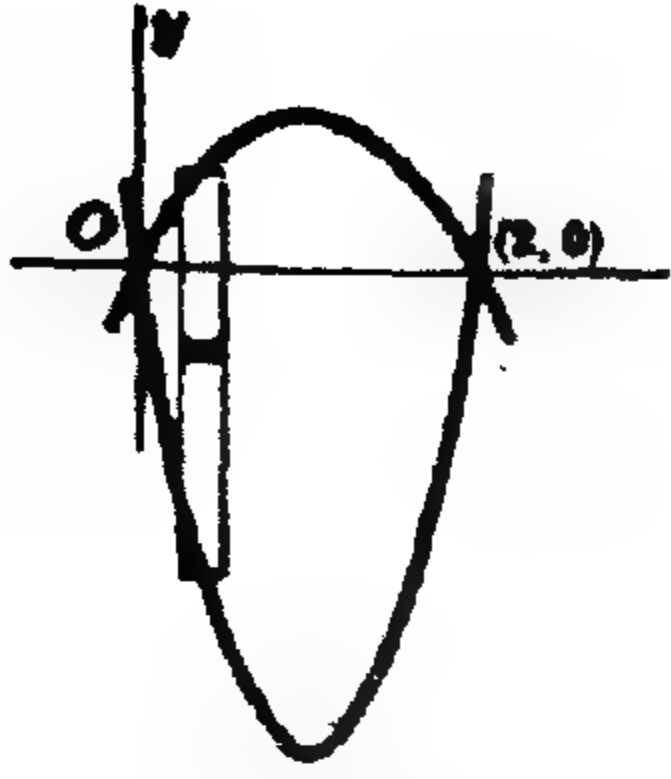
$$M_y = \iint_A x \, dA = \int_0^1 \int_0^{6x-x^2} x \, dy \, dx = \int_0^1 (6x^2 - x^3) \, dx = \frac{625}{12}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_A y \, dA = \int_0^1 \int_0^{6x-x^2} y \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \{(6x - x^2)^2 - 0\} \, dx = \frac{625}{6} \end{aligned}$$

$$\text{وعلى هذا فإن } \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{5}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = 5, \quad \text{والمركز}$$

المتوسط هو النقطة  $(5/2, 5)$ .

٧ - عين المركز المتوسط لسطح المستوى المحصور بين القطعين المكافئين  $y = 2x - x^2$  و  $y = 3x^2 - 6x$ .



شكل ٧١ - ٥

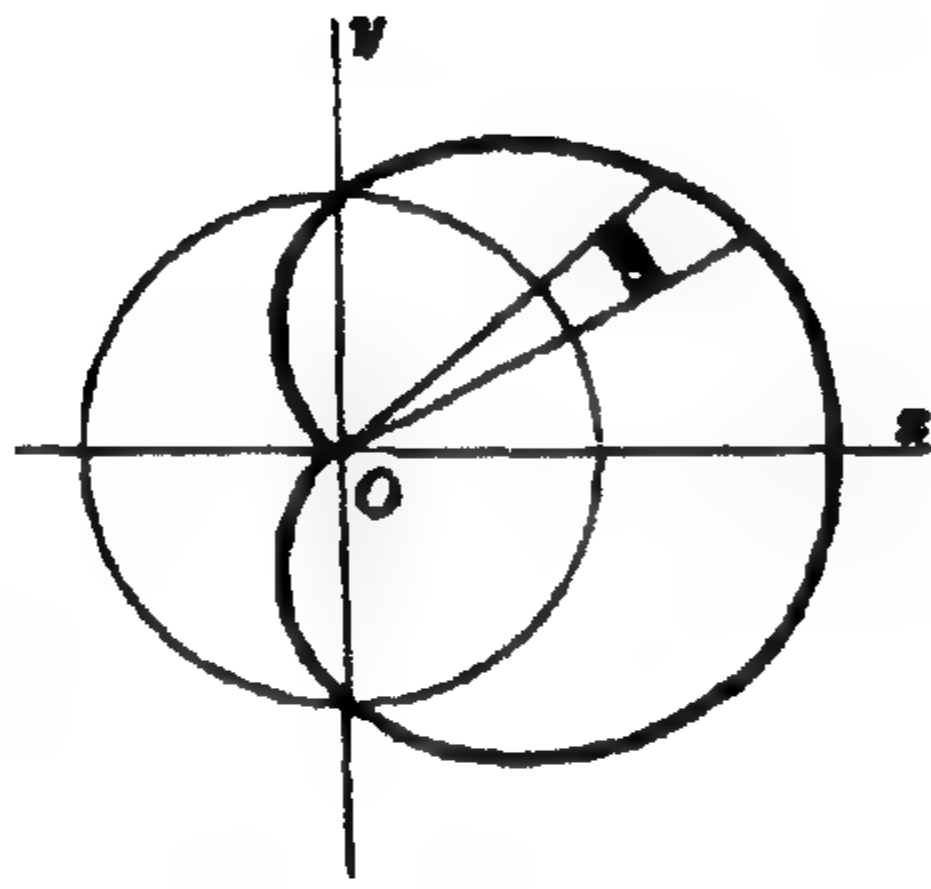
$$A = \iint_R dA = \int_0^2 \int_{x^2-2x}^{2x-x^2} dy dx = \int_0^2 (8x - 4x^2) dx = \frac{16}{3}$$

$$M_x = \iint_R x dA = \int_0^2 \int_{x^2-2x}^{2x-x^2} x dy dx = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3) dx = \frac{16}{3}$$

$$M_y = \iint_R y dA = \int_0^2 \int_{x^2-2x}^{2x-x^2} y dy dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \{(2x-x^2)^2 - (x^2-2x)^2\} dx = -\frac{64}{15}$$

وبالتالي فإن  $\bar{x} = \frac{M_y}{A} = 1$ ,  $\bar{y} = \frac{M_x}{A} = -\frac{4}{5}$ . والمركز المتوسط

هو النقطة  $(1, -4/5)$



شكل ٧١ - ٨

٨ - عين المركز المتوسط للمطح المستوي الواقع خارج الدائرة  $\rho = 1$  وداخل منحنى القلب  $\rho = 1 + \cos \theta$  (انظر الشكل ٧١ - ٨).

يتضح من الشكل ٧١ - ٨ أن  $\bar{y} = 0$  وأن  $\bar{x}$  هي نفسها سواء حسبناها السطح المفروض أو لنصفه الواقع فوق المحور القطبي.

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos \theta} \rho d\rho d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \{(1 + \cos \theta)^2 - 1^2\} d\theta = \frac{\pi + 8}{8}$$

$$M_x = \iint_R x dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos \theta} (\rho \cos \theta) \rho d\rho d\theta$$

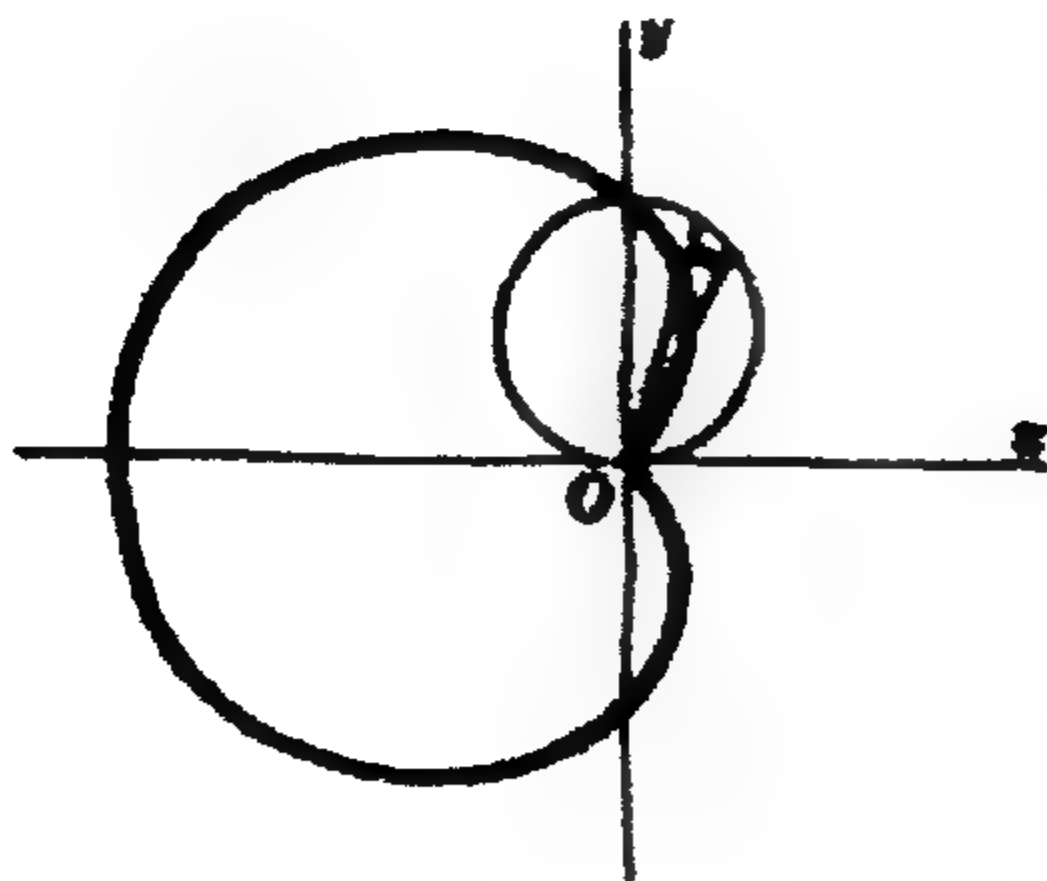
$$= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (3 \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \left[ \frac{3}{2} \theta + \frac{3}{4} \sin 2\theta + 3 \sin \theta - \sin^3 \theta + \frac{3}{8} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{15\pi + 32}{48}$$

والمساحة الأخيرة يكون المركز المتوسط هو النقطة  $\left(\frac{15\pi + 32}{6(\pi + 8)}, 0\right)$

٩ - عين المركز المتوسط للمطح الواقع داخل  $\rho = \sin \theta$  وخارج  $\rho = 1 - \cos \theta$  انظر الشكل ٧١ - ٩

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos \theta}^{\sin \theta} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (2 \cos \theta - 1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{4-\pi}{4}$$



شكل ٧١ - ٩

$$M_x = \iint_R x dA = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos \theta}^{\sin \theta} (\rho \cos \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \theta - 1 + 3 \cos \theta - 3 \cos^2 \theta + \cos^3 \theta) \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{15\pi - 44}{48}$$

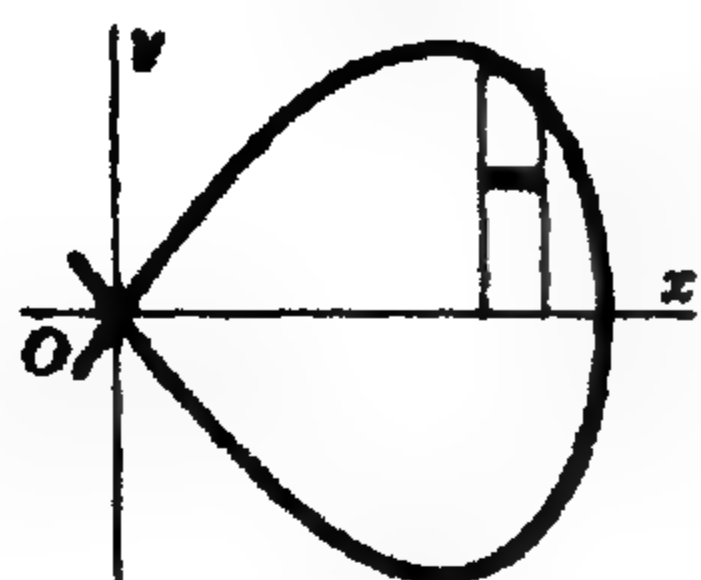
$$M_y = \iint_R y dA = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos \theta}^{\sin \theta} (\rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (\sin^3 \theta - 1 + 3 \cos \theta - 3 \cos^2 \theta + \cos^3 \theta) \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{3\pi - 4}{48}$$

فالمرکز المتوسط هو النقطة  $\left(\frac{15\pi - 44}{12(4 - \pi)}, \frac{3\pi - 4}{12(4 - \pi)}\right)$ .





شكل ١٠ - ٦١

١٠ - احسب  $I_x, I_y, I_0$  لسطح الذي يحدد بقناة المنحنى  $y^2 = x^2(2-x)$ .

$$A = \iint_R dA = 2 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-x}} dy dx = 2 \int_0^2 x\sqrt{2-x} dx$$

$$= -4 \int_{\sqrt{2}}^0 (2x^2 - x^3) dx = -4 \left[ \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

ونك باستخدام التحويل  $2-x = z^2$ .

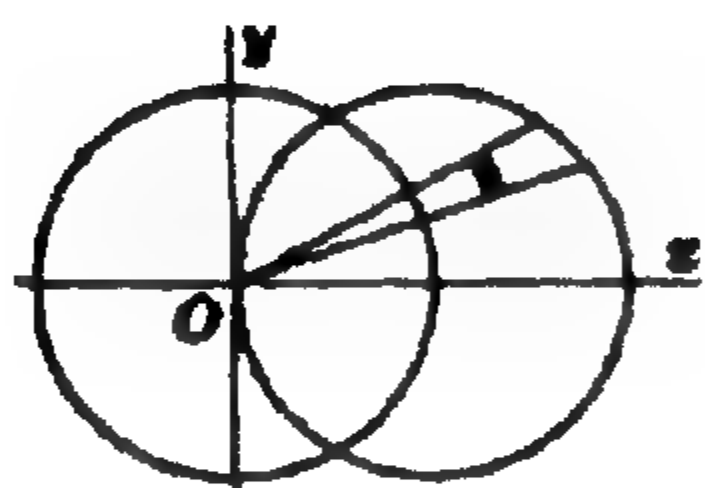
$$I_x = \iint_R y^2 dA = 2 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-x}} y^2 dy dx = \frac{2}{3} \int_0^2 x^3(2-x)^{3/2} dx$$

$$= -\frac{4}{3} \int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^3 dz = -\frac{4}{3} \left[ \frac{8}{5}z^5 - \frac{12}{7}z^7 + \frac{2}{3}z^9 - \frac{1}{11}z^{11} \right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{2048\sqrt{2}}{3465} = \frac{64}{231} A$$

$$I_y = \iint_R x^2 dA = 2 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-x}} x^2 dy dx = 2 \int_0^2 x^2 \sqrt{2-x} dx$$

$$= -4 \int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^2 z^2 dz = -4 \left[ \frac{8}{3}z^3 - \frac{12}{5}z^5 + \frac{6}{7}z^7 - \frac{1}{9}z^9 \right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{1024\sqrt{2}}{315} = \frac{32}{21} A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{13312\sqrt{2}}{3465} = \frac{416}{231} A.$$



شكل ١١ - ٦١

١١ - احسب  $I_x, I_y, I_0$  لسطح في الربع الأول خارج الدائرة  $\rho = 2a$ .

وداخل الدائرة  $\rho = 4a \cos \theta$ .

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/3} \int_{2a}^{4a \cos \theta} \rho d\rho d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \{ (4a \cos \theta)^2 - (2a)^2 \} d\theta = \frac{2a^2 + 3\sqrt{3}}{3} a^2$$

$$I_x = \iint_R y^2 dA = \int_0^{\pi/3} \int_{2a}^{4a \cos \theta} (\rho \sin \theta)^2 \rho d\rho d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/3} \{ (4a \cos \theta)^4 - (2a)^4 \} \sin^2 \theta d\theta$$

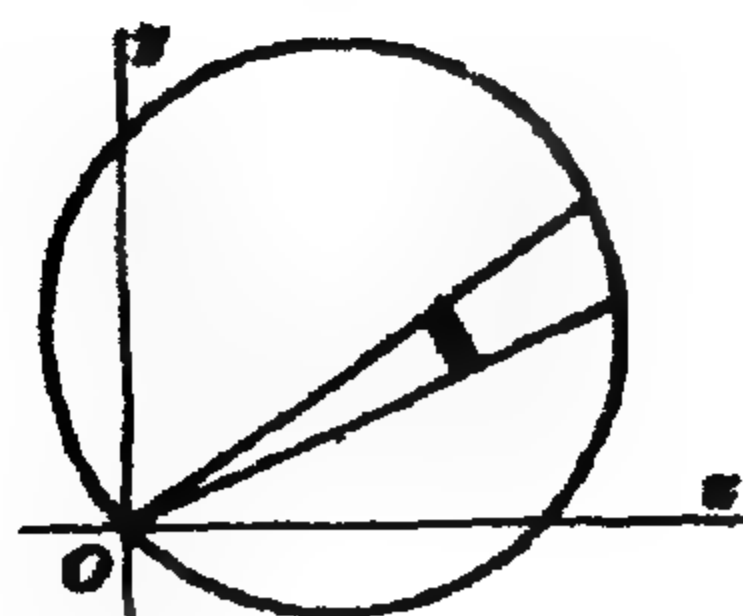
$$= 4a^4 \int_0^{\pi/3} (16 \cos^4 \theta - 1) \sin^2 \theta d\theta = \frac{4a^4}{6} = \frac{4a^4 + 9\sqrt{3}}{2(2a^2 + 3\sqrt{3})} a^2 A$$

$$I_y = \iint_R x^2 dA = \int_0^{\pi/3} \int_{2a}^{4a \cos \theta} (\rho \cos \theta)^2 \rho d\rho d\theta = \frac{12a^4 + 11\sqrt{3}}{2} a^4 = \frac{3(12a^4 + 11\sqrt{3})}{2(2a^2 + 3\sqrt{3})} a^2 A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{20a^4 + 21\sqrt{3}}{3} a^4 = \frac{20a^4 + 21\sqrt{3}}{2a^2 + 3\sqrt{3}} a^2 A$$

١٢ - احسب  $I_x, I_y, I_0$  لسطح الواقع داخل الدائرة  $\rho = 2(\sin \theta + \cos \theta)$ .

بما أن  $x^2 + y^2 = \rho^2$  فإن



شكل ١٢ - ٦١

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= 4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin \theta + \cos \theta)^4 d\theta$$

$$= 4 \left[ \frac{8}{2}\theta - \cos 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 6\pi = 3A$$

ويوضح من الشكل ١٢-٦١ أن  $I_x = I_y$  وبالتالي فإن  $I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{2} A$ .

## مسائل إضافية

١٢ - باستخدام التكاملات الثنائية حسب مساحات السطوح التالية :

ج : 24 sq. un.	(أ) المحصورة بين $3x + 4y = 24, x = 0, y = 0$ .
ج : 6 sq. un.	(ب) المحصورة بين $x + y = 2, 2y = x + 4, y = 0$ .
ج : 32/3 sq. un.	(ج) المحصورة بين $x^2 = 4y, 8y = x^2 + 16$ .
ج : 6 π sq. un.	(د) داخل $r = 2(1 - \cos \theta)$ .
ج : $\frac{1}{2} \sqrt{3}$ sq. un.	(هـ) المحددة بـ $p = \tan \theta \sec \theta$ و $\theta = \pi/3$ .
ج : $8^{2/3} \pi + \sqrt{3}$ sq. un.	(و) خارج $p = 4$ وخارج $r = 8 \cos \theta$ .

١٤ - عين المركز المتوسط لكل من السطوح التالية :

ج : (8/3, 2)	(أ) سطح المسألة ١٣ (أ).
ج : (3/2, 8/5)	(ب) سطح المسألة ١٣ (ج) الواقع في الربع الأول.
ج : (18/5, 9/4)	(ج) السطح الواقع في الربع الأول والمحدد بـ $y^2 = 6x, y = 0, x = 6$ .
ج : (13/40, 26/15)	(د) السطح المحدد بـ $y^2 = 4x, x^2 = 5 - 2y, x = 0$ .
ج : (8/4, 2/5)	(هـ) السطح الواقع في الربع الأول المحدد بـ $x^2 - 8y + 4 = 0, x^2 = 4y, x = 0$ .
ج : $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 6/5)$	(و) سطح المسألة ١٣ (هـ).
ج : $(\frac{16x + 6\sqrt{3}}{2x + 3\sqrt{3}}, \frac{22}{2x + 3\sqrt{3}})$	(ز) السطح الواقع في الربع الأول من سطح المسألة ١٣ (و).

$$١٥ - \text{تحقق من أن : } \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |g_1'(\theta) - g_2'(\theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \rho d\rho d\theta = \iint_R dA$$

$$\text{ثم استنتج } \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

١٦ - احسب  $I_x, I_y$  لكل من السطوح التالية :

ج : $I_x = 8A, I_y = \frac{7}{4}A$	(أ) المسألة ١٣ (أ).
ج : $I_x = \frac{7}{4}A, I_y = \frac{1}{4}A$	(ب) السطح المقطوع من $8x = x^2$ بالوتر البؤري العمودي.
ج : $I_x = \frac{1}{3}A, I_y = \frac{2}{15}A$	(ج) السطح المحدد بـ $y = x$ و $y = x^2$ .
ج : $I_x = \frac{49}{36}A, I_y = \frac{7}{18}A$	(د) السطح المحدد بـ $y = 4x - x^2$ و $y = x$ .

$$١٧ - \text{احسب } I_x, I_y \text{ لقطعة واحدة من المنحنى } \rho^2 = \cos 2\theta \text{ : ج } I_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\right)A, I_y = \left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\right)A$$

١٨ - احسب  $I_0$  للطين التاليين :

ج : 3/8A	(أ) عقد المنحنى $\rho = \sin 2\theta$ .
ج : $25/24A$	(ب) داخل المنحنى $\rho = 1 + \cos \theta$ .

# الفصل الخامس والستون

## الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي

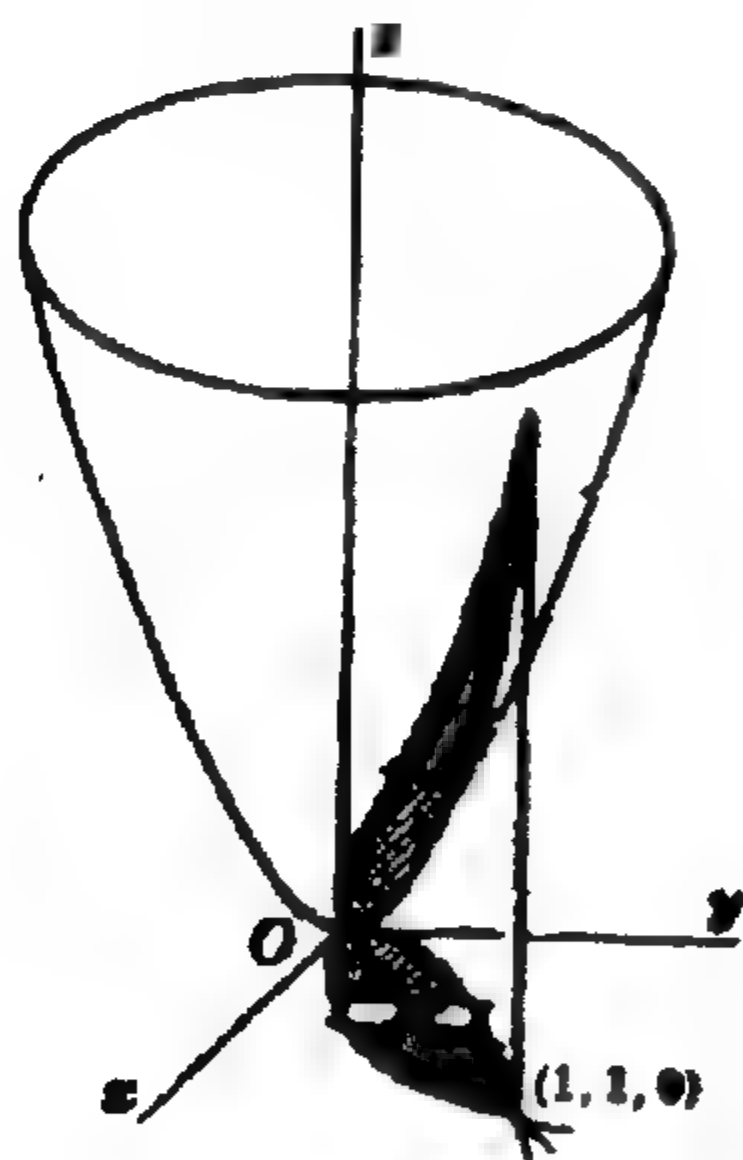
يُعرف الحجم الواقع تحت السطح  $z = f(x, y)$  أو  $z = f(\rho, \theta)$  أى حجم العمود الرأسى الذى قاعدته العليا على السطح وقاعدته السفلى على المستوى  $xOy$  بالتكامل  $V = \iint_R z dA$  حيث المنطقة  $R$  القاعدة السفلى للعمود.

### مسائل محلولة

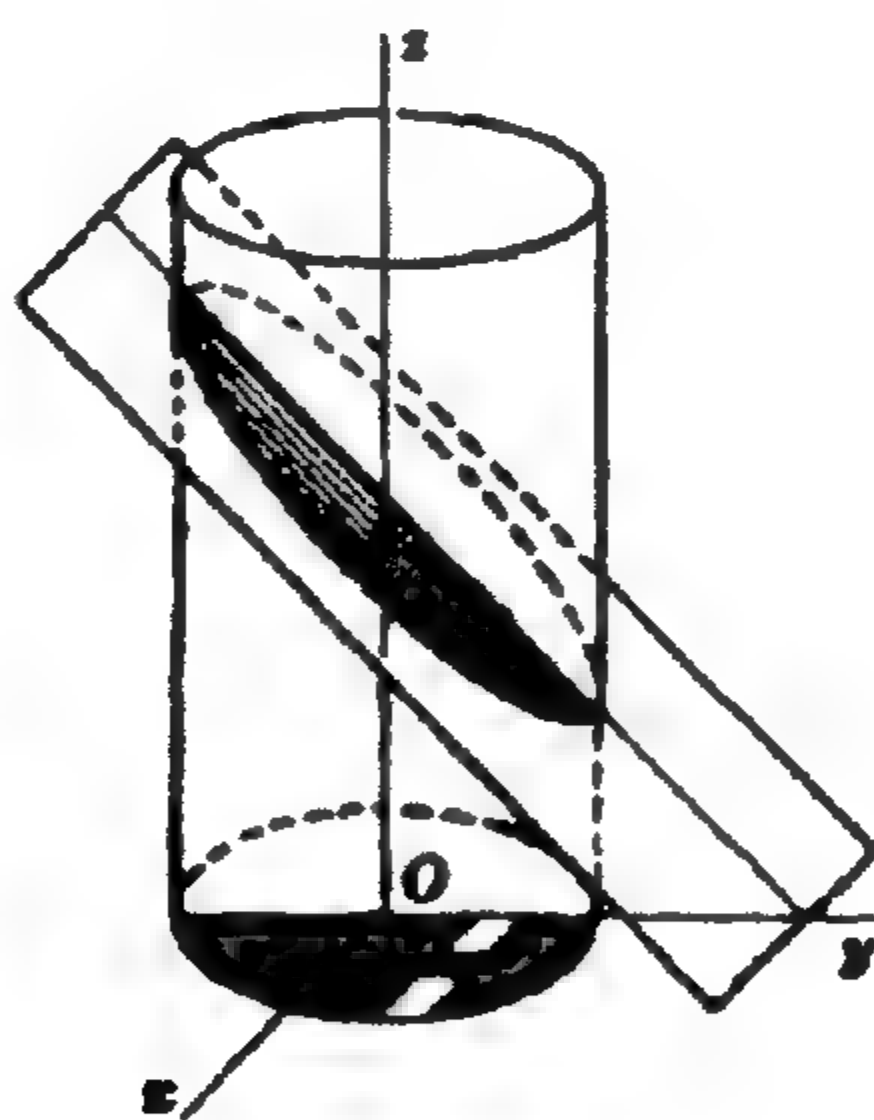
١ - احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول داخل الاسطوانة  $x^2 + y^2 = 16$  وبين المستويين  $z = 0$  و  $z = x + y + 2$ .

يتضح من الشكل ١ - ٦٥ أنه ينبئ تكامل  $z = x + y + 2$  على ربع الدائرة  $x^2 + y^2 = 16$  فى المستوى  $xOy$  لذلك فإن :

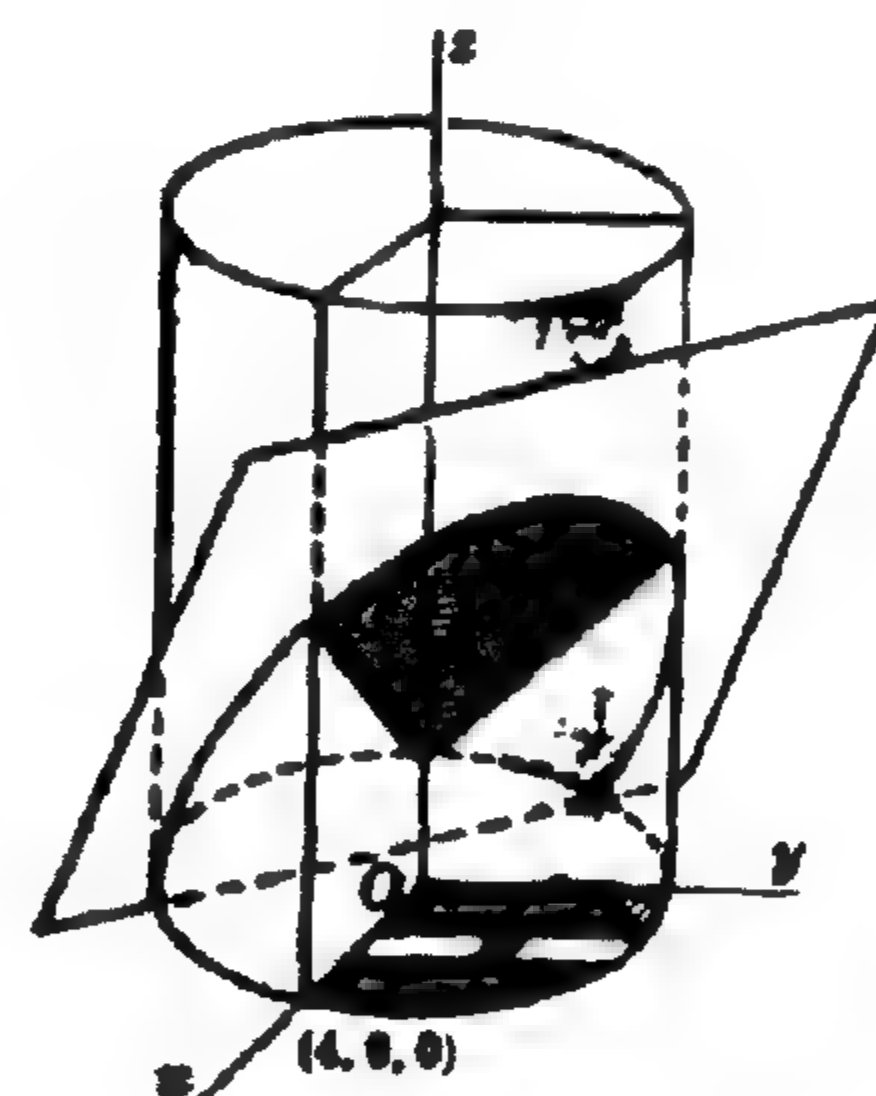
$$\begin{aligned} V &= \iint_R z dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x+y+2) dy dx = \int_0^4 (x\sqrt{16-x^2} + 8 - \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{16-x^2}) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{8}(16-x^2)^{3/2} + 8x - \frac{x^3}{6} + x\sqrt{16-x^2} + 16 \arcsin \frac{1}{4}x \right]_0^4 = \left( \frac{128}{3} + 8\pi \right) \text{ cubic units} \end{aligned}$$



شكل ١ - ٦٥



شكل ٢ - ٦٥



شكل ٣ - ٦٥

٢ - أوجد الحجم المحدود بالاسطوانة  $x^2 + y^2 = 4$  والمستويين  $z = 0$  و  $z = 4 - y$ . يتضح من الشكل ٢ - ٦٥ أنه ينبئ تكامل  $z = 4 - y$  على الدائرة  $x^2 + y^2 = 4$  فى المستوى  $xOy$  وبالتالى فإن :

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4-y) dx dy = 2 \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-y) dx dy = 16\pi \text{ cubic units}$$

٣ - أوجد الحجم المحدود من أعلاه بمجسم القطع المكافئ  $z = x^2 + 4y^2$  ومن أسفل بالمستوى  $z = 0$  ومن الجوانب بالاسطوانتين  $x = y$ ,  $y = x$  انظر الشكل ٦٥ - ٣ .

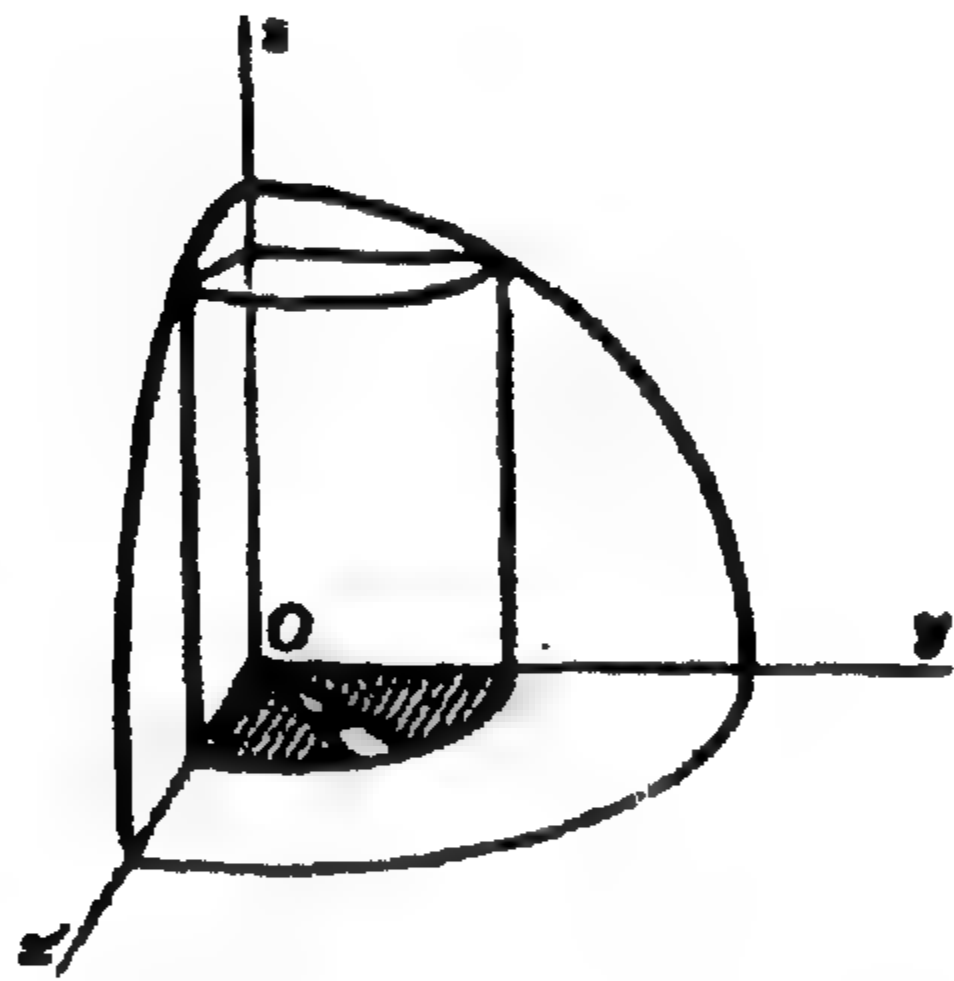
نحصل على الحجم المطلوب بتكامل  $z = x^2 + 4y^2$  على المنطقة  $R$  الواقعة بين القطعين المكافئين  $x^2 = y$ ,  $y^2 = x$  في المستوى  $xOy$  وبالتالي فإن :

$$V = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (x^2 + 4y^2) dy dx = \int_0^1 \left( x^2 y + \frac{4}{3} y^3 \right) \Big|_y^{\sqrt{y}} dx = \frac{3}{7} \text{ cubic units}$$

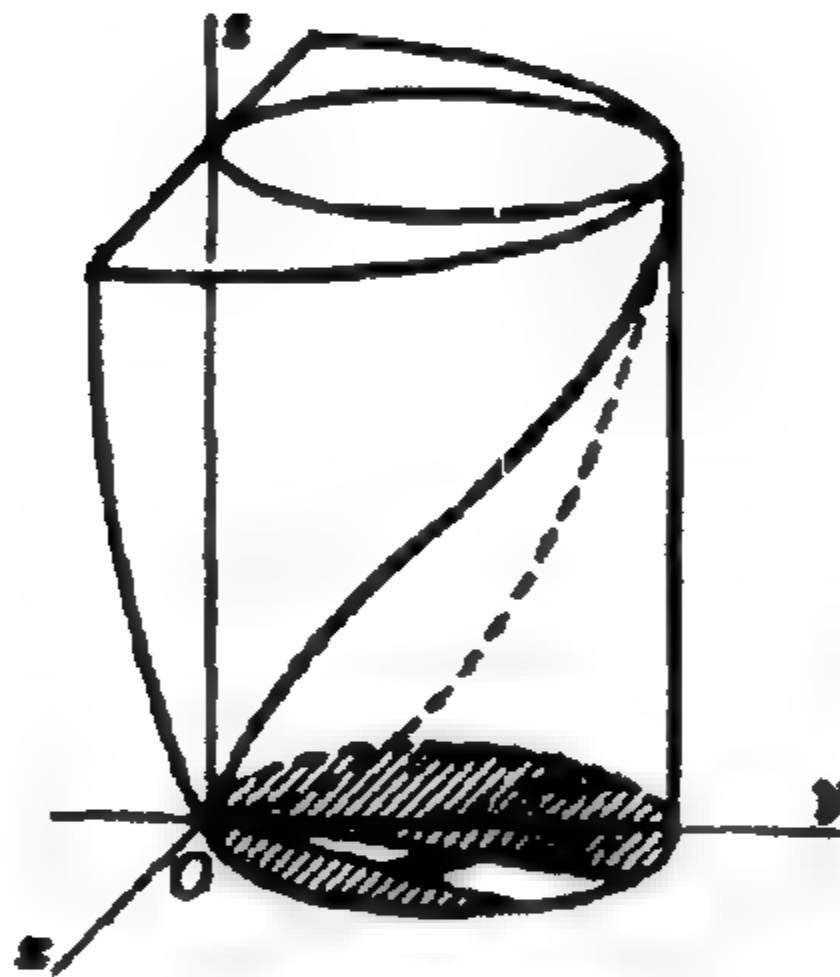
٤ - احسب حجم أحد القسمين المقطعين من الاسطوانة  $4x^2 + y^2 = a^2$  بالمستويين  $z = my$  ،  $z = 0$  ( انظر الشكل ٦٥ - ٤ ) .

نحصل على الحجم المطلوب بتكامل  $z = my$  على نصف القطع الناقص  $4x^2 + y^2 = a^2$  وذلك فإن

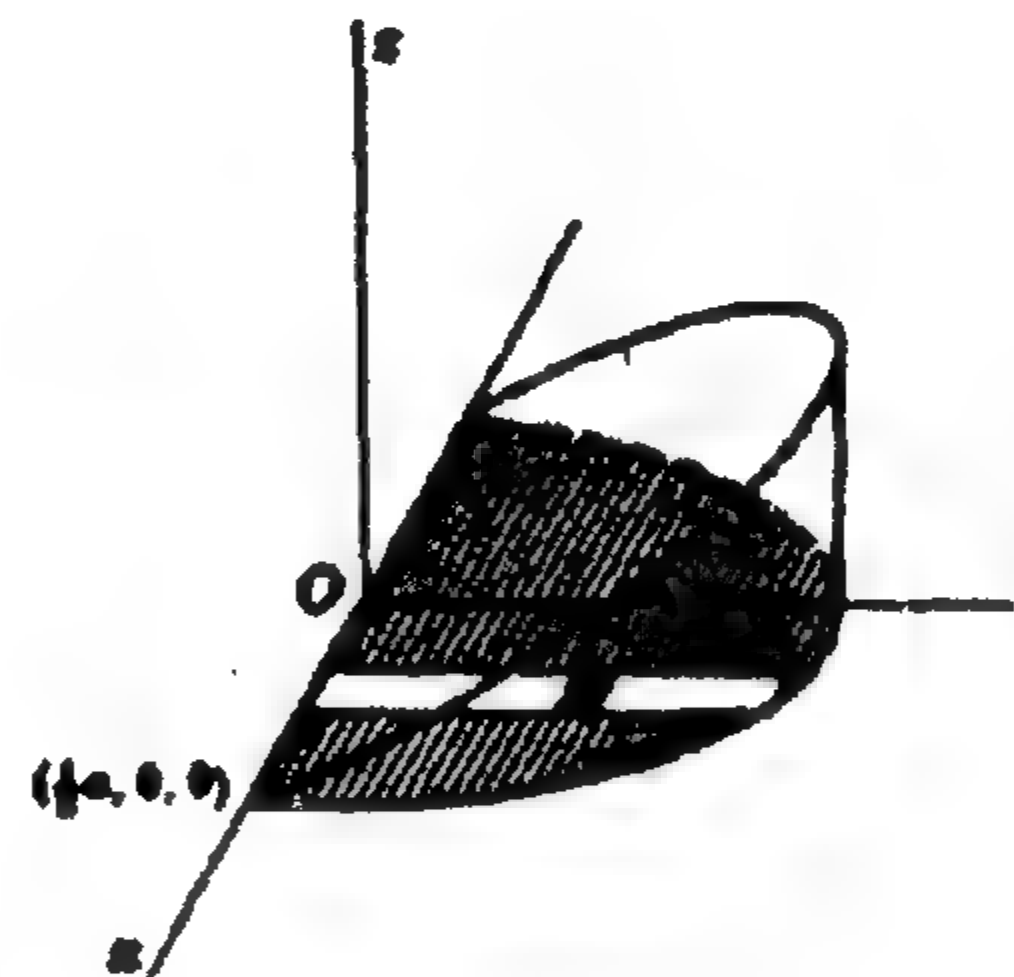
$$V = 2 \int_0^{a/2} \int_0^{\sqrt{a^2 - 4x^2}} my dy dx = m \int_0^{a/2} y^2 \Big|_0^{\sqrt{a^2 - 4x^2}} dx = \frac{ma^3}{3} \text{ cubic units}$$



شكل ٦٥ - ١



شكل ٦٥ - ٢



شكل ٦٥ - ٣

٥ - احسب الحجم بين مجسم القطع المكافئ  $z = x^2 + y^2 = 4x$  والاسطوانة  $z = 8y$  ومن المستوى  $z = 0$  انظر الشكل ٦٥ - ٥ .

نحصل على الحجم المطلوب بتكامل  $(x^2 + y^2)$  على القائرة  $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$  وإذا استخدمنا الإحداثيات القطبية فإننا نحصل على الحجم المطلوب بتكامل  $z = \frac{1}{4} \rho^2$  على القائرة  $\rho = 8 \sin \theta$  إذ أن :

$$\begin{aligned} V &= \iint_R z dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{8 \sin \theta} \frac{1}{4} \rho^2 \rho d\rho d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \int_0^{8 \sin \theta} \rho^3 d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{\pi/2} \rho^4 \Big|_0^{8 \sin \theta} d\theta = 256 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = 96\pi \text{ cubic units} \end{aligned}$$

٦ - احسب الحجم الذي تزيده من 'كرة نصف قطرها 2a إذا خرقنا بها ثقباً يحاذي الكرة نصف قطره a وينطبق على أحد أقطار الكرة ( انظر الشكل ٦٥ - ٦ )

يبدو من الشكل أن الحجم المطلوب هو ثمانى مرات قدر الحجم الواقع في الثمن الأول والمحصور بين الاسطوانة  $p^2 = a^2$  والكرة  $p^2 + z^2 = 4a^2$  والمستوى  $z = 0$  ونحصل على الحجم الاخير بتكامل  $z = \sqrt{4a^2 - p^2}$  على ربع الدائرة  $p = a$  وبالتالي فإن :

$$V = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^a \sqrt{4a^2 - p^2} p dp d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} (8a^3 - 3\sqrt{3}a^3) d\theta = \frac{4}{3}(8 - 3\sqrt{3})a^3 \pi \text{ cubic units}$$

### مسائل اضافية

٧- احسب الحجم الذى يقطعه المستوى  $z = 0$  من  $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$  ج :  $3\pi$  cubic units .

٨- احسب الحجم الواقع تحت المستوى  $z = 3x$  وفوق السطح الواقع في الربع الأول والمحدد بـ  $x = 0$  ،  $y = 0$  ،  $x^2 + y^2 = 25$  ،  $x = 4$  ج :  $98$  cubic units .

٩- احسب الحجم الواقع في الثمن الاول والمحدد بـ  $z = 0$  ،  $x^2 + z = 9$  ،  $3x + 4y = 24$  ،  $x = 0$  ،  $y = 0$  ج :  $1485/16$  cubic units .

١٠- احسب الحجم الواقع في الثمن الأول والمحدد  $x = 4$  ،  $y = x$  ،  $xy = 4z$  ج :  $8$  cubic units .

١١- احسب الحجم الواقع في الثمن الأول والمحدد  $x^2 + y^2 = 25$  و  $z = y$  ج :  $125/3$  cubic units .

١٢- احسب الحجم المشترك بين اسطوانتين  $x^2 + z^2 = 16$  و  $x^2 + y^2 = 16$  ج :  $1024/3$  cubic units .

١٣- احسب الحجم الواقع في الثمن الأول داخل  $9 = y^2 + z^2$  وخارج  $y^2 = 3x$  ج :  $27\pi/16$  cubic units .

١٤- احسب الحجم الواقع في الثمن الأول والمحدد  $x^2 + z^2 = 16$  و  $x - y = 0$  ج :  $64/3$  cubic units .

١٥- احسب الحجم المشترك بين  $y^2 + z^2 = 4$  و  $y^2 + z^2 + 2x = 16$  والواقع أمام المستوى  $x = 0$  ج :  $28\pi$  cubic units .

١٦- احسب الحجم الواقع داخل  $p = 2$  وخارج المخروط  $z^2 = p^2$  ج :  $32\pi/3$  cubic units .

١٧- احسب الحجم الواقع داخل  $z^2 + y^2 = 2$  وخارج  $x^2 - y^2 - z^2 = 2$  ج :  $8\pi(4 - \sqrt{2})/3$  cubic units .

١٨- احسب الحجم المشترك بين  $p^2 + z^2 = a^2$  و  $p = a \sin \theta$  ج :  $2(3\pi - 4)a^3/9$  cubic units .

١٩- احسب الحجم الواقع داخل  $x^2 + y^2 = 9$  والمحدد من أسفل بـ  $x^2 + y^2 + 4z = 16$  ج :  $81\pi/8$  cubic units .

٢٠- احسب الحجم الذى يقطعه المستوى  $z - y = 2$  من جسم القطع المكافئ  $4x^2 + y^2 = 4x$  ج :  $9\pi$  cubic units .

٢١ - احسب الحجم الناتج من دوران منحنى القلب  $\rho = 2(1 - \cos \theta)$  حول المحور القطبي

ج :  $V = 2\pi \iint r \rho \, d\rho \, d\theta = 54\pi/3 \text{ cu. un.}$

٢٢ - احسب الحجم الناتج من دوران إحدى أوراق الزمرة  $\rho = \sin 2\theta$  حول أحد المحاور

ج :  $32\pi/105 \text{ cubic units}$ .

٢٣ - خذ قلب مربع طول ضلعه  $2 \text{ units}$  بشكل متناظر بجزء كرة نصف قطرها  $2 \text{ units}$  ، بين أن الحجم

المقطع هو :

ج :  $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} + 19\pi - 54 \text{ Arc tan } \sqrt{2}) \text{ cubic units}$



# الفصل السادس والستون

## مساحة سطح منحنى

### التكامل الثنائي

عند حساب طول قوس (١) أسقطنا القوس على محور إحداثي مناسب محددين بذلك فترة على المحور ، (٢) كلما

الدالة  $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$  على هذه الفترة إذا كان الإسقاط على المحور  $x$  أو الدالة  $\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$  إذا كان الإسقاط على المحور  $y$  .

ويمكن بطريقة مماثلة حساب المساحة  $S$  لقطعة  $R'$  من سطح  $z = f(x, y)$   
(١) نسط  $R'$  على مستو إحداثي مناسب محددين بذلك منطقة  $R$  على هذا المستوى .

(٢) تكامل دالة تكامل على  $R$

$$S = \iint_{R'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA.$$

فإذا أسقطنا  $R'$  على  $xOy$  فإن

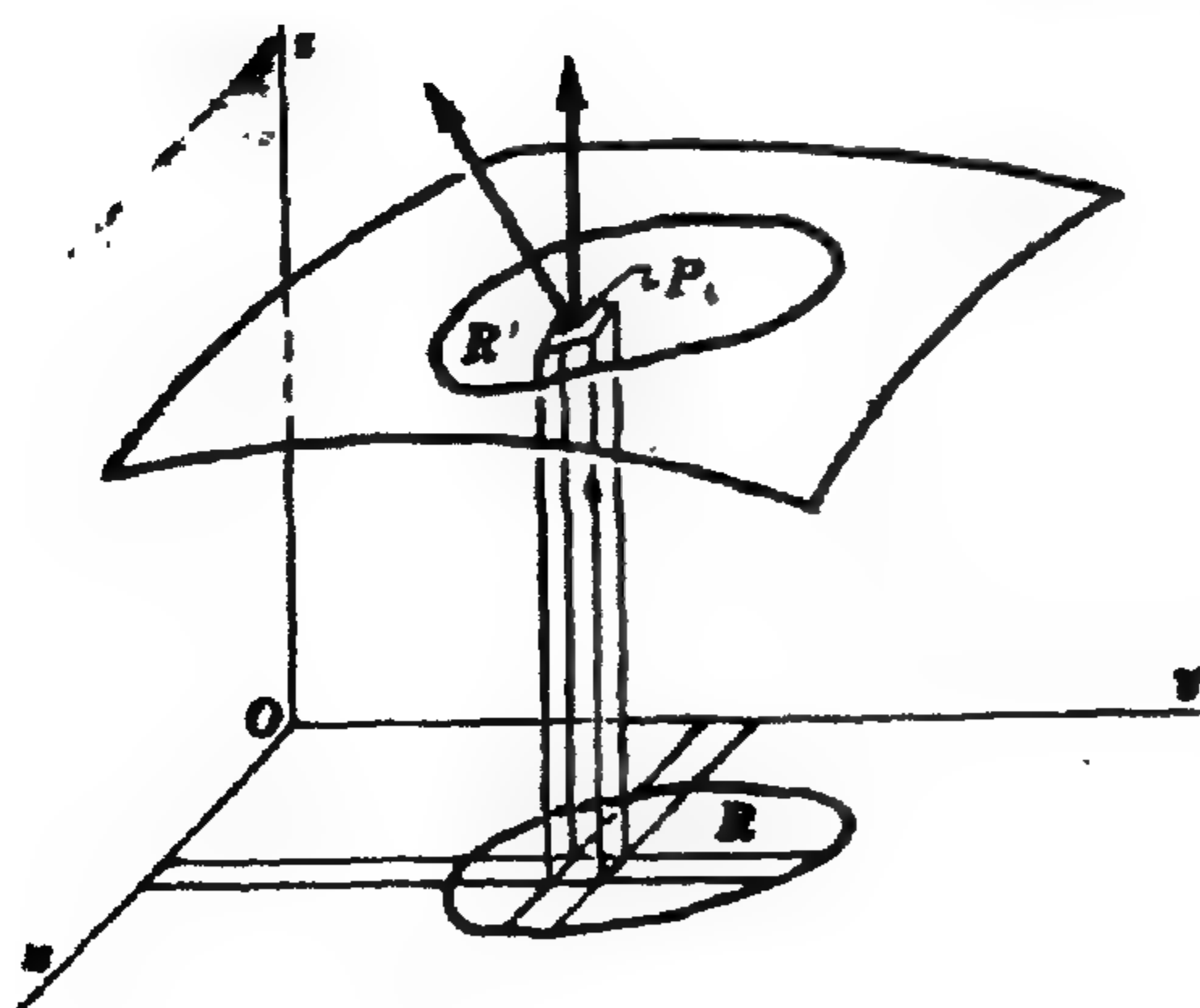
$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA.$$

وإذا أسقطنا  $R'$  على  $yOz$  فإن

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dA.$$

أما إذا أسقطنا  $R'$  على  $zOx$  فإن

### مسائل محلولة



شكل ٦٦ - ١

١ - لننظر في منطقة  $R'$  مساحتها  $S$  من السطح  $z = f(x, y)$  . نمرر بحدود  $R'$  اسطوانة رأسية ( انظر الشكل ٦٦ - ١ ) فتقطع المستوى  $xOy$  بمعدة المنطقة  $R$  . لنقسم الآن  $R$  إلى  $n$  منطقة جزئية  $\Delta A_i$  (مساحتها  $\Delta A_i$ ) ولنرمز بـ  $\Delta S_i$  لمساحة مسقط  $\Delta A_i$  على  $R'$  . لننظر في كل منطقة جزئية  $\Delta S_i$  نقطة  $P_i$  ولنرسم هناك المستوى المماس للسطح ونرمز لمساحة مسقط  $\Delta A_i$  على المستوى المماس بـ  $\Delta T_i$  . نستخدم  $\Delta T_i$  كتقريب لمساحة السطح المقابلة لـ  $\Delta S_i$  .

لننظر بعد ذلك في الزاوية بين المستوى  $xOy$

المستوى المماس عند  $P_i$  إن هذه الزاوية تساوى الزاوية  $\gamma_i$  بين المحور  $z$  [0,0,1] والمحور :

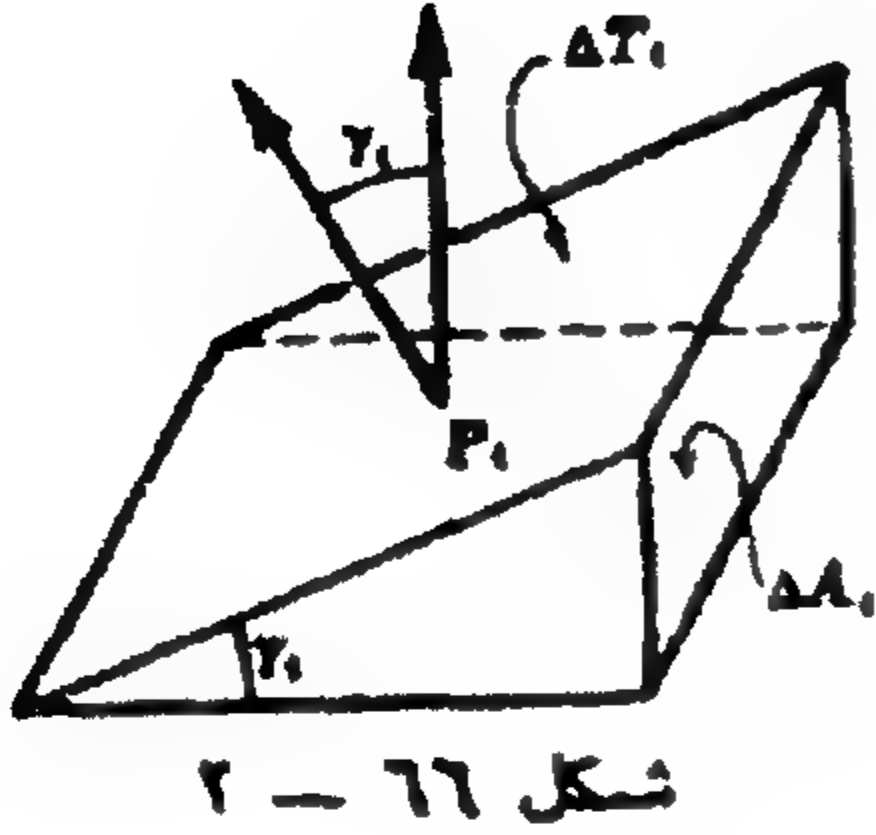
$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \text{على السطح عند } P_i \text{ ومنه} \quad \left[ -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right] = \left[ -\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right]$$

إذن ( انظر الشكل ٦٦ - ٢ )

$$\Delta T_i = \sec \gamma_i \cdot \Delta A_i \quad \text{و} \quad \Delta T_i \cdot \cos \gamma_i = \Delta A_i$$

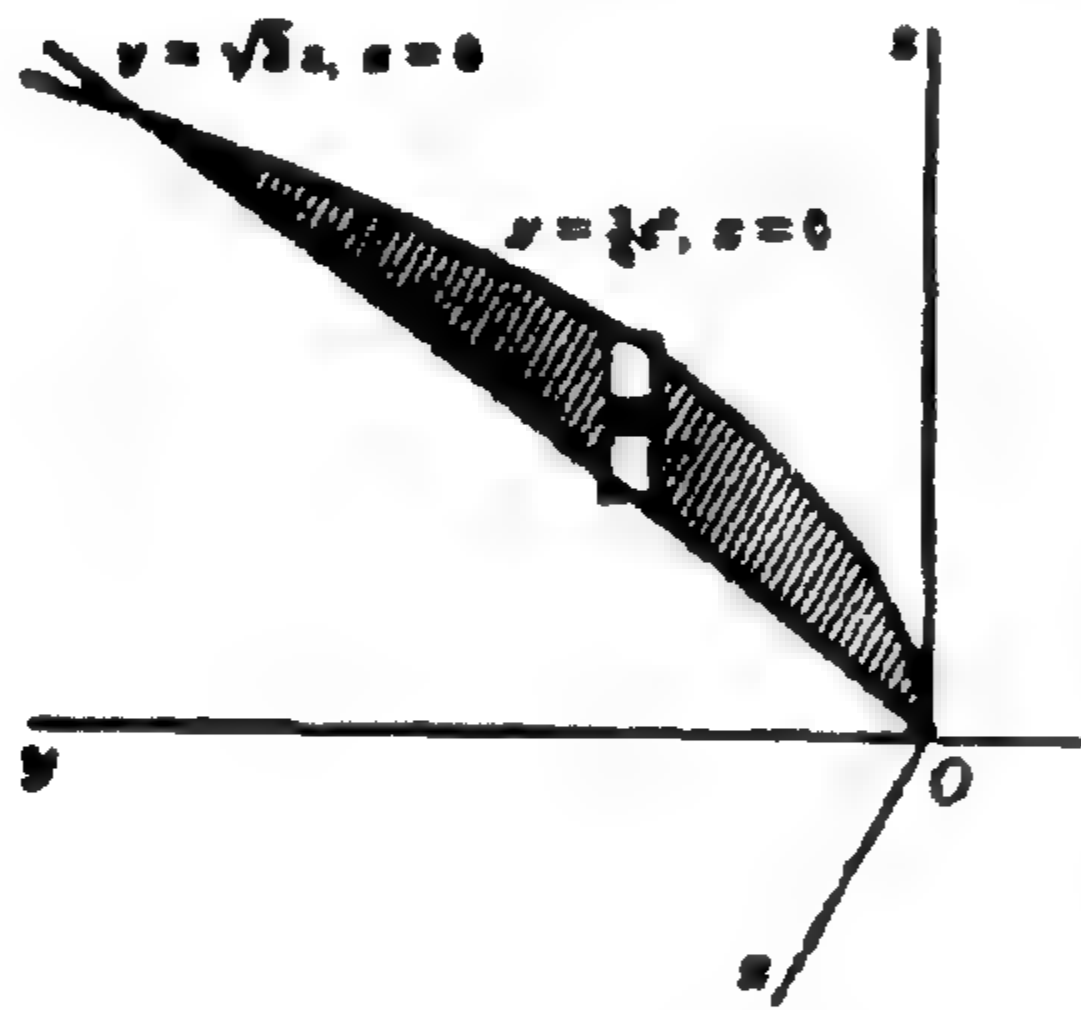
وبالتالى فإن  $\sum_{i=1}^n \Delta T_i = \sum_{i=1}^n \sec \gamma_i \cdot \Delta A_i$  تعطينا تقريبا لـ  $S$  ومنه :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sec \gamma_i \cdot \Delta A_i = \iint_R \sec \gamma \cdot dA \\ = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

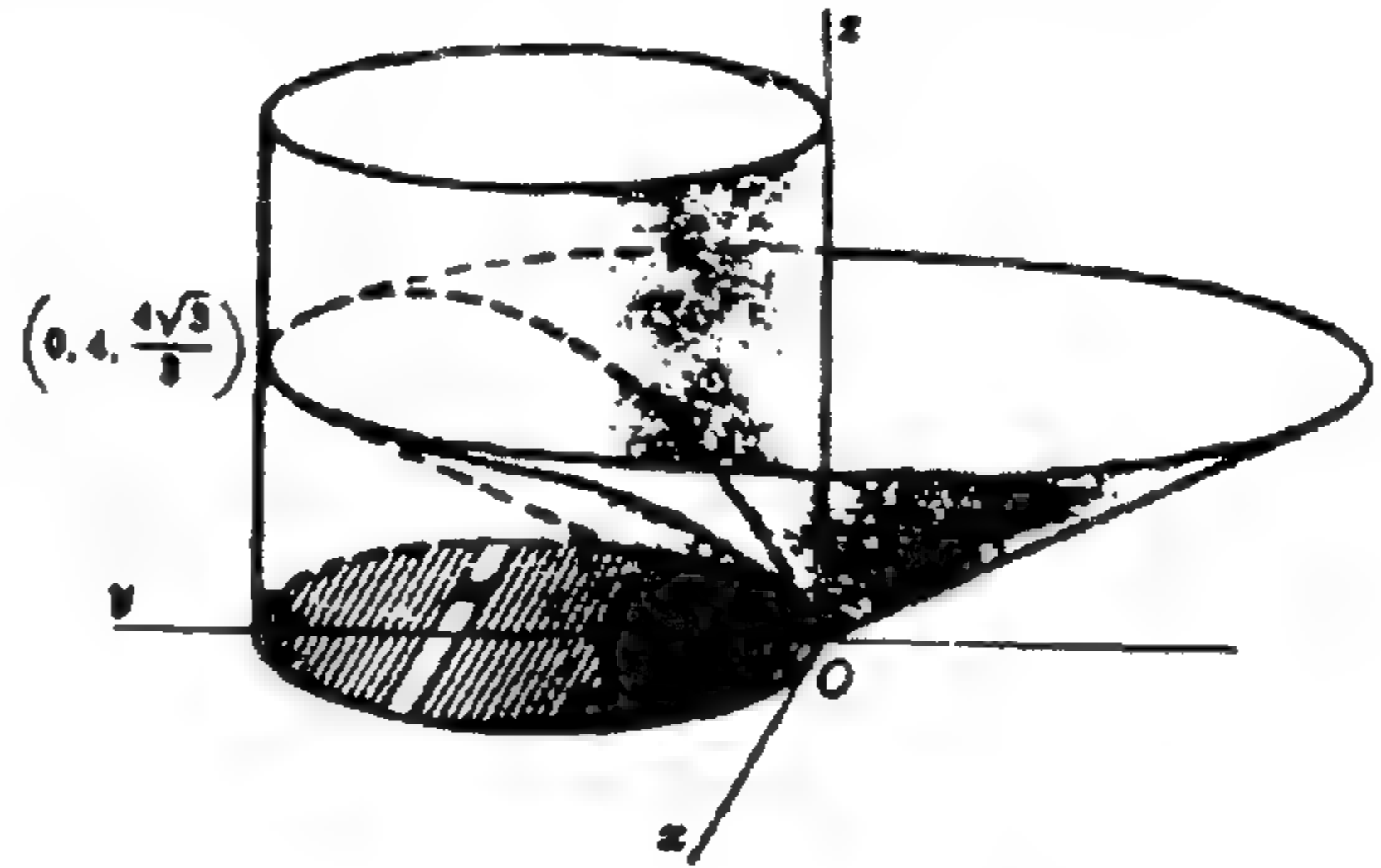


شكل ٦٦ - ٢

٢ - احسب مساحة قطعة المخروط  $x^2 + y^2 = 3z^2$  الواقعة فوق المستوى  $xOy$  وداخل الاسطوانة  $x^2 + y^2 = 4y$



شكل ٦٦ - ٤



شكل ٦٦ - ٢

حل أول : انظر إلى الشكل ٦٦ - ٢ إن إسقاط قطعة السطح المفروضة على المستوى  $xOy$  هو المنطقة  $R$  المحيطة بالدائرة  $x^2 + y^2 = 4y$  المخروط يكون .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{z}, \quad \text{and} \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{9x^2 + x^2 + y^2}{9x^2} = \frac{12x^2}{9x^2} = \frac{4}{3} \\ S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \frac{2}{\sqrt{3}} dx dy = 2 \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dx dy \\ = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^4 \sqrt{4y-y^2} dy = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ square units}$$

حل ثان : انظر إلى الشكل ٦٦ - ٤ إن إسقاط نصف قطعة السطح المفروضة على المستوى  $yOz$  هو المنطقة  $R$  المحيطة بالمستقيم  $y = \sqrt{3}z$  واقطع المكافئ  $y = 3/4x^2$  حيث حللنا على المنحنى الأخير بحذف  $x$  من معادلتى السطحين . المخروط يكون :

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + 9x^2}{x^2} = \frac{12x^2}{x^2} = \frac{12x^2}{3x^2 - y^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3z}{x}$$

وبالتالى :

$$S = 2 \int_0^4 \int_{y/\sqrt{3}}^{\sqrt{4-y^2}/\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}z}{\sqrt{3z^2-y^2}} dz dy = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_0^4 \sqrt{3z^2-y^2} \Big|_{y/\sqrt{3}}^{\sqrt{4-y^2}/\sqrt{3}} dy = \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_0^4 \sqrt{4y-y^2} dy$$

حل ثالث : باستخدام الاحداثيات الاسطوانية في الحل الأول نجد أنه ينبغي تكامل  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

على المنطقة  $R$  المحاطة بالدائرة  $p = 4 \sin \theta$  ومنه :

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \frac{2}{\sqrt{3}} dA = \int_0^\pi \int_0^{4 \sin \theta} \frac{2}{\sqrt{3}} p dp d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^\pi p^2 \Big|_0^{4 \sin \theta} d\theta \\ &= \frac{16}{\sqrt{3}} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi \text{ square units} \end{aligned}$$

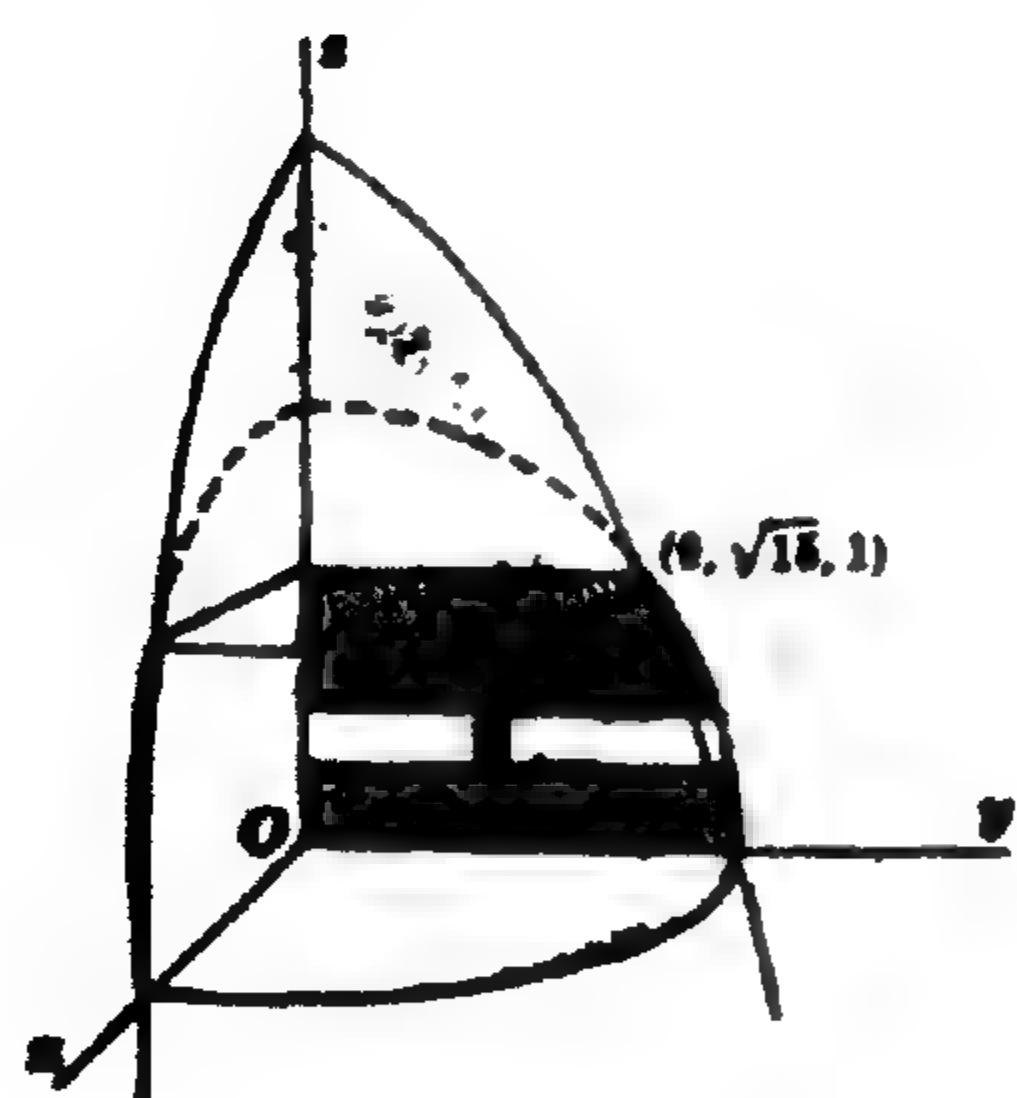
٣ - احسب مساحة قطعة الاسطوانة  $x^2 + z^2 = 16$  الواقعة داخل الاسطوانة  $x^2 + y^2 = 16$ .

يوضح الشكل ٦٦ - ٥ من القطعة المطلوب حساب مساحتها . إن مسقط هذه القطعة على المستوى  $xOz$  هو ربع الدائرة  $x^2 + z^2 = 16$  للأسطوانة  $x^2 + y^2 = 16$  يكون :

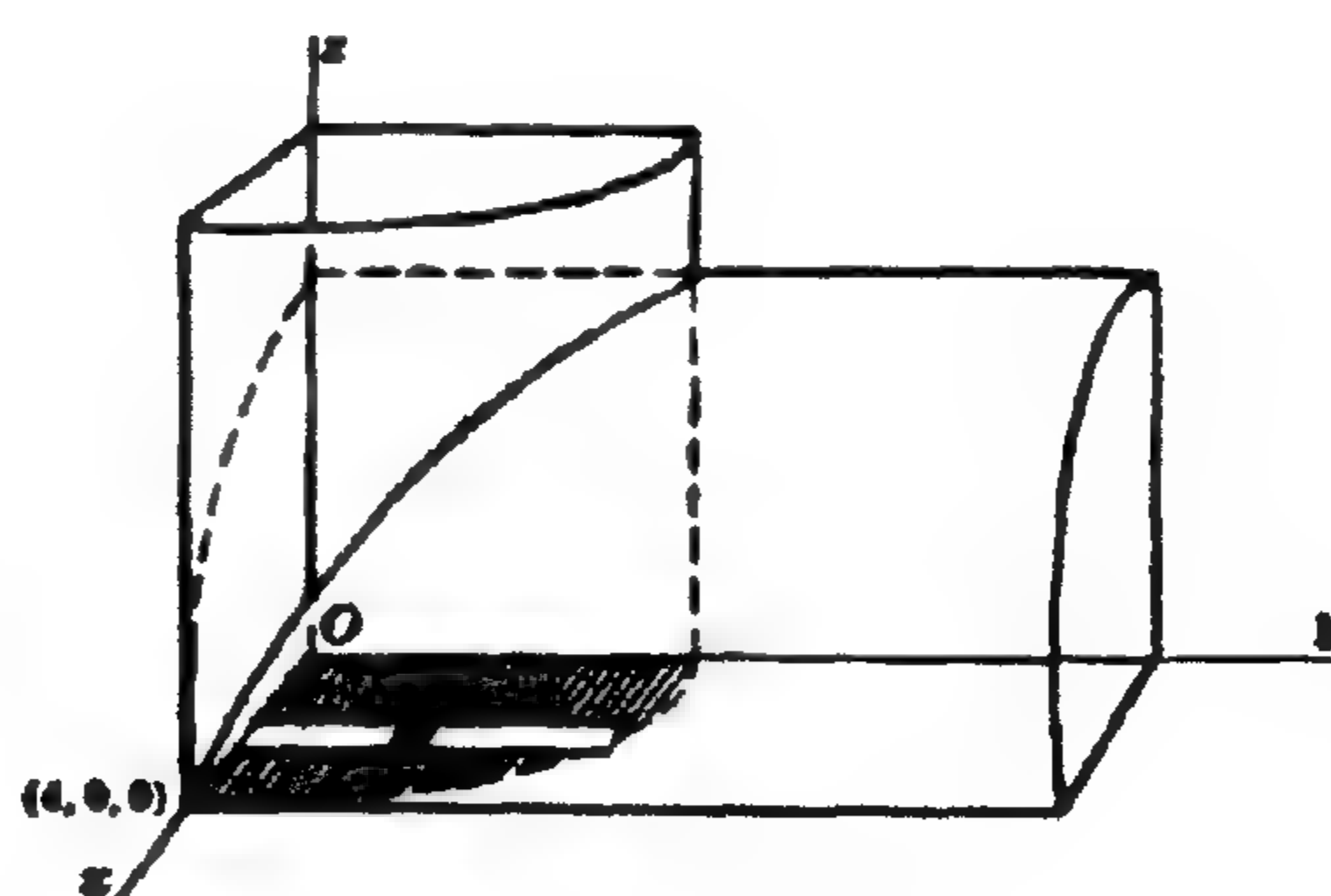
$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{z^2 + z^2}{z^2} = \frac{16}{16 - x^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

ومنه :

$$S = 8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16-x^2}} dy dx = 82 \int_0^4 dx = 128 \text{ square units}$$



شكل ٦٦ - ٦



شكل ٦٦ - ٥

٤ - احسب مساحة قطعة الكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  الواقعة خارج مجسم القطع المكافئ  $x^2 + y^2 + z = 16$ .

يوضح الشكل ٦٦ - ٦ ربع قطعة السطح المطلوب حساب مساحتها إن مسقط هذه القطعة على المستوى  $yOz$  هو المنطقة  $R$  المحددة بالدائرة  $y^2 + z^2 = 16$  والمحورين  $y$  و  $z$  والمستقيم  $z = 1$ . الكرة يكون :

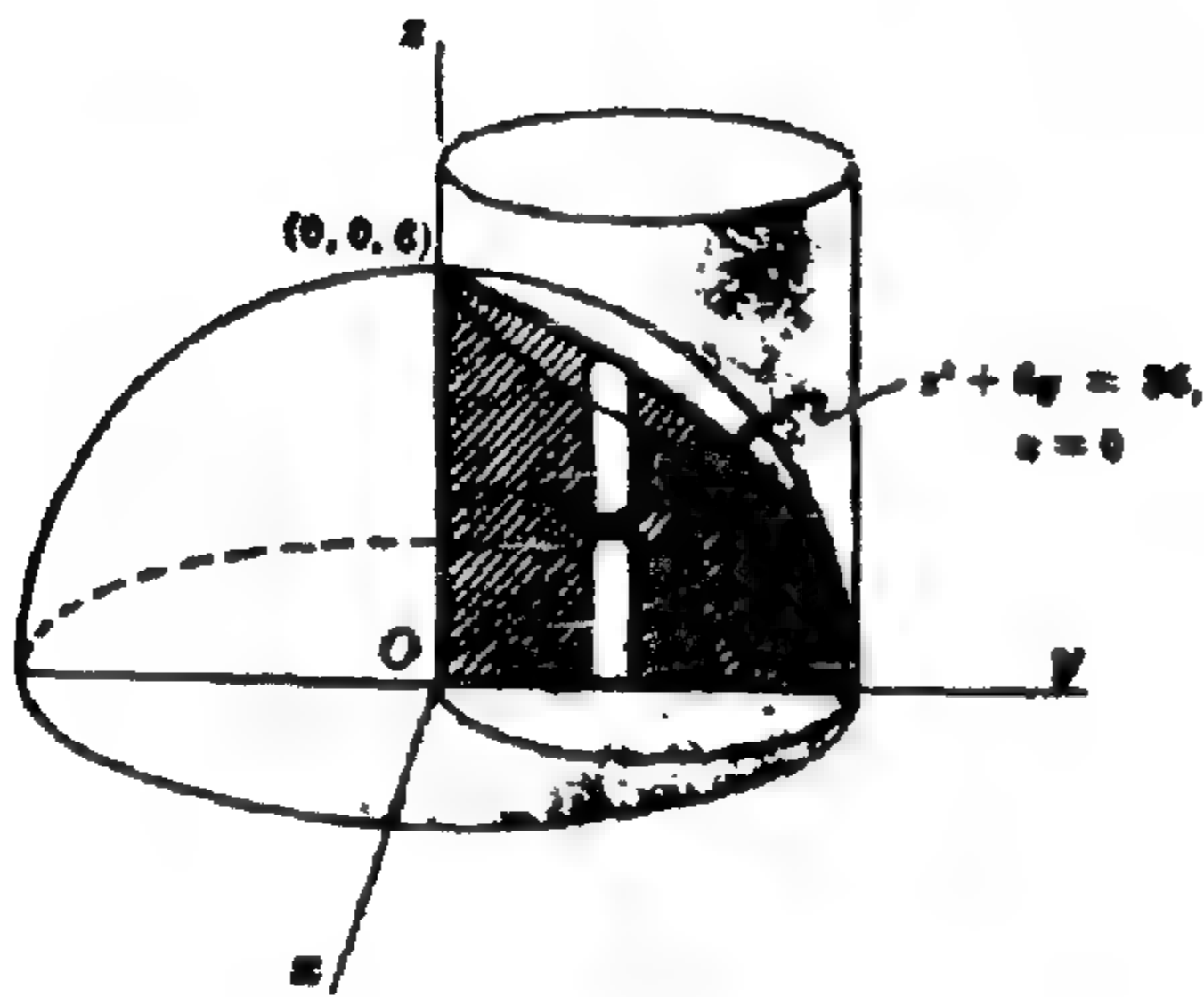
$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{y^2 + y^2 + z^2}{z^2} = \frac{16}{16 - y^2 - z^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = -\frac{z}{z}.$$

ومنه :

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dA = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16-y^2-x^2}} dy dz \\
 &= 16 \int_0^1 \left[ \arcsin \frac{y}{\sqrt{16-x^2}} \right]_0^{\sqrt{16-x^2}} dz = 16 \int_0^1 \frac{1}{2} \pi dz = 8\pi \text{ square units}
 \end{aligned}$$

٥ - احسب مساحة قطعة الاسطوانة  $x^2 + y^2 = 6y$  الواقعة داخل الكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ .

يوضح الشكل ٦٦ - ٧ ربع قطعة السطح المطلوب حساب مساحتها . إن مسقط هذه القطعة على المستوى  $yOz$  هو المنطقة  $R$  المحددة بالعمودين  $x$  و  $x$  والقطع المكافئ  $x^2 + 6y = 36$  . ولقد حصلنا على هذا المسمى الأخير بمخلف  $x$  من معادلتى السطحين . للاسطوانة يكون :



شكل ٦٦ - ٧

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{3-y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2 + 9 - 6y + y^2}{x^2} = \frac{9}{6y - y^2}$$

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_0^6 \int_0^{\sqrt{6y-y^2}} \frac{3}{\sqrt{6y-y^2}} dz dy \\
 &= 12 \int_0^6 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{y}} dy = 144 \text{ square units}
 \end{aligned}$$

### مسائل إضافية

٦ - احسب مساحة قطعة المخروط  $x^2 + y^2 = z^2$  الواقعة داخل المنشور الرأسى الذى قاعدته المثلث المحد بالمستقيمات

$$y = x, x = 0, y = 1 \text{ فى المستوى } xOy.$$

$$\text{ج : } \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ sq. un.}$$

٧ - احسب مساحة قطعة المستوى  $x + y + z = 6$  الواقعة داخل الاسطوانة  $x^2 + y^2 = 4$ .

$$\text{ج : } 4\sqrt{3} \pi \text{ sq. un.}$$

٨ - احسب مساحة قطعة الكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  الواقعة داخل الاسطوانة  $x^2 + y^2 = 6y$ .

$$\text{ج : } 72(\pi - 2) \text{ sq. un.}$$

٩ - احسب مساحة قطعة الكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$  الواقعة داخل مجسم القطع المكافئ  $x^2 + y^2 = z$ .

$$\text{ج : } 4\pi \text{ sq. un.}$$

١٠ - احسب مساحة قطعة الكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  الواقعة بين المستويين  $z = 2$  و  $z = 4$ .

$$\text{ج : } 20\pi \text{ sq. un.}$$

١١ - احسب مساحة قطعة السطح  $z = xy$  الواقعة داخل الاسطوانة  $x^2 + y^2 = 1$  .

ج :  $2\pi (2\sqrt{2} - 1)/3$  sq. un. .

١٢ - احسب مساحة قطعة المخروط  $x^2 + y^2 - 9z^2 = 0$  الواقعة فوق المستوى  $z = 0$  وداخل الاسطوانة

$$x^2 + y^2 = 6y$$

ج :  $3\sqrt{10}\pi$  sq. un. .

١٣ - احسب مساحة ذلك الجزء من الكرة  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  الواقع داخل اسطوانة ناقصة المقطع  $2x^2 + y^2 = 25$ .

ج :  $50\pi$  sq. un. .

١٤ - احسب مساحة قطعة السطح  $x^2 + y^2 - az = 0$  الواقعة مباشرة فوق المنحنى ذو المروتين  $4p^2 = a^2 \cos 2\theta$

$$S = \frac{4}{a} \iint \sqrt{4\rho^2 + a^2} \rho d\rho d\theta = \frac{a^2}{3} \left\{ \frac{5}{3} - \frac{\pi}{4} \right\} \text{ sq. un.} \quad \text{ج :}$$

١٥ - احسب مساحة قطعة السطح  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  الواقعة مباشرة فوق منحنى القلب  $\rho = 1 - \cos \theta$  .

ج :  $8(\pi - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1))$  sq. un. .

# الفصل السابع والستون

## التكاملات الثلاثية

ان التكامل الثلاثي  $\iiint_R f(x, y, z) dV$  للدالة في ثلاثة متغيرات مستقلة على منطقة  $R$  مكونة من النقط  $(x, y, z)$  ، لحجم  $V$  ، يكون عليه الدالة المفروضة وحيدة القيمة ، ومتصلة ، هو امتداد لمفهوم التكاملات البسيطة والثنائية .  
 فإذا كان  $f(x, y, z) = 1$  فنحن إذ يمكن تفسير التكامل  $\iiint_R f(x, y, z) dV$  على أنه قياس حجم المنطقة  $R$  .

حساب قيمة التكامل الثلاثي  $\iiint_R f(x, y, z) dV$  في الاحداثيات الاكارتية .

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dV &= \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy, \end{aligned}$$

على أن نختار حدود التكامل بحيث تغطي المنطقة  $R$  .

حساب قيمة التكامل الثلاثي  $\iiint_R f(\rho, \theta, z) dV$  في الاحداثيات الاسطوانية

$$\iiint_R f(\rho, \theta, z) dV = \int_a^b \int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} \int_{z_1(\rho, \theta)}^{z_2(\rho, \theta)} f(\rho, \theta, z) \rho dz d\rho d\theta$$

على أن نختار حدود التكامل بحيث تغطي المنطقة  $R$  .

حساب قيمة التكامل الثلاثي  $\iiint_R f(\rho, \phi, \theta) dV$  في الاحداثيات الكروية :

$$\iiint_R f(\rho, \phi, \theta) dV = \int_a^b \int_{\phi_1(\rho)}^{\phi_2(\rho)} \int_{\theta_1(\rho, \phi)}^{\theta_2(\rho, \phi)} f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

على أن نختار حدود التكامل بحيث تغطي المنطقة  $R$  .

المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية : يحق المركز المتوسط  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  لحجم ما العلاقات



$$\begin{aligned} \iiint_R dV &= \iiint_R x dV, \quad \iiint_R y dV = \iiint_R y dV, \\ \iiint_R z dV &= \iiint_R z dV \end{aligned}$$

وأما عزوم القصور الذاتية لجميع بالنسبة لمحاور الإحداثية فهي :

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_R (y^2 + z^2) dV, \quad I_y = \iiint_R (z^2 + x^2) dV, \\ I_z &= \iiint_R (x^2 + y^2) dV \end{aligned}$$

### مسائل محلولة

١ - لنفكر في الدالة  $f(x, y, z)$  المتصلة في منطقة  $R$  من الفراغ المادي . لنشطر  $R$  بالمستويات  $x = x_i$  و  $y = y_j$  و  $z = z_k$  . تجزئ هذه الطريقة المنطقة  $R$  إلى عدد من متوازيات المستطيلات حجمها  $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$  وإلى عدد من متوازيات المستطيلات الناقصة التي سهلها . لنفكر في كل متوازي مستطيلات كامل نقطة  $P_{ijk}(x_i, y_j, z_k)$  ونحسب عندها  $f(x_i, y_j, z_k)$  ثم نشكل المجموع :

$$\sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, p}} f(x_i, y_j, z_k) \cdot \Delta V_{ijk} = \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, p}} f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \quad (i)$$

يعرف التكامل الثلاثي لـ  $f(x, y, z)$  على المنطقة  $R$  على أنه نهاية (i) عندما يزداد عدد متوازيات المستطيلات إلى ما لا نهاية بحيث تتحول أبعاد كل منها إلى الصفر ويمكن عند حساب هذه النهاية أن نجتمع أولاً على كل مجموعة متوازيات المستطيلات التي تشترك في  $\Delta x_i$  و  $\Delta y_j$  لقيم ثابتة لـ  $i$  و  $j$  ثم نبحث عن النهاية  $\Delta z_k \rightarrow 0$  فينتج

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p f(x_i, y_j, z_k) \Delta z_k \Delta x_i \Delta y_j = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y_j, z) dz \Delta x_i \Delta y_j$$

وهذه ليست إلا أعمدة ، المناطق الجزئية الأساسية ، التي رأيناها في الفصل ٦٣ وبالكال :

$$\lim_{\substack{m \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow +\infty \\ p \rightarrow +\infty}} \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, p}} f(x_i, y_j, z_k) \cdot \Delta V_{ijk} = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_R f(x, y, z) dz dy dx$$

٢ - احسب قيمة :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz \, dz \, dy \, dx \quad (1) \\ &= \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} \left\{ \int_0^{1-x-y} xyz \, dz \right\} dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} \left\{ \frac{xy z^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} \right\} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} \frac{xy(2-x)^2}{2} dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{xy^2(2-x)^2}{4} \Big|_0^{1-x} \right] dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (4x - 12x^2 + 13x^3 - 6x^4 + x^5) dx = \frac{13}{240} \end{aligned}$$

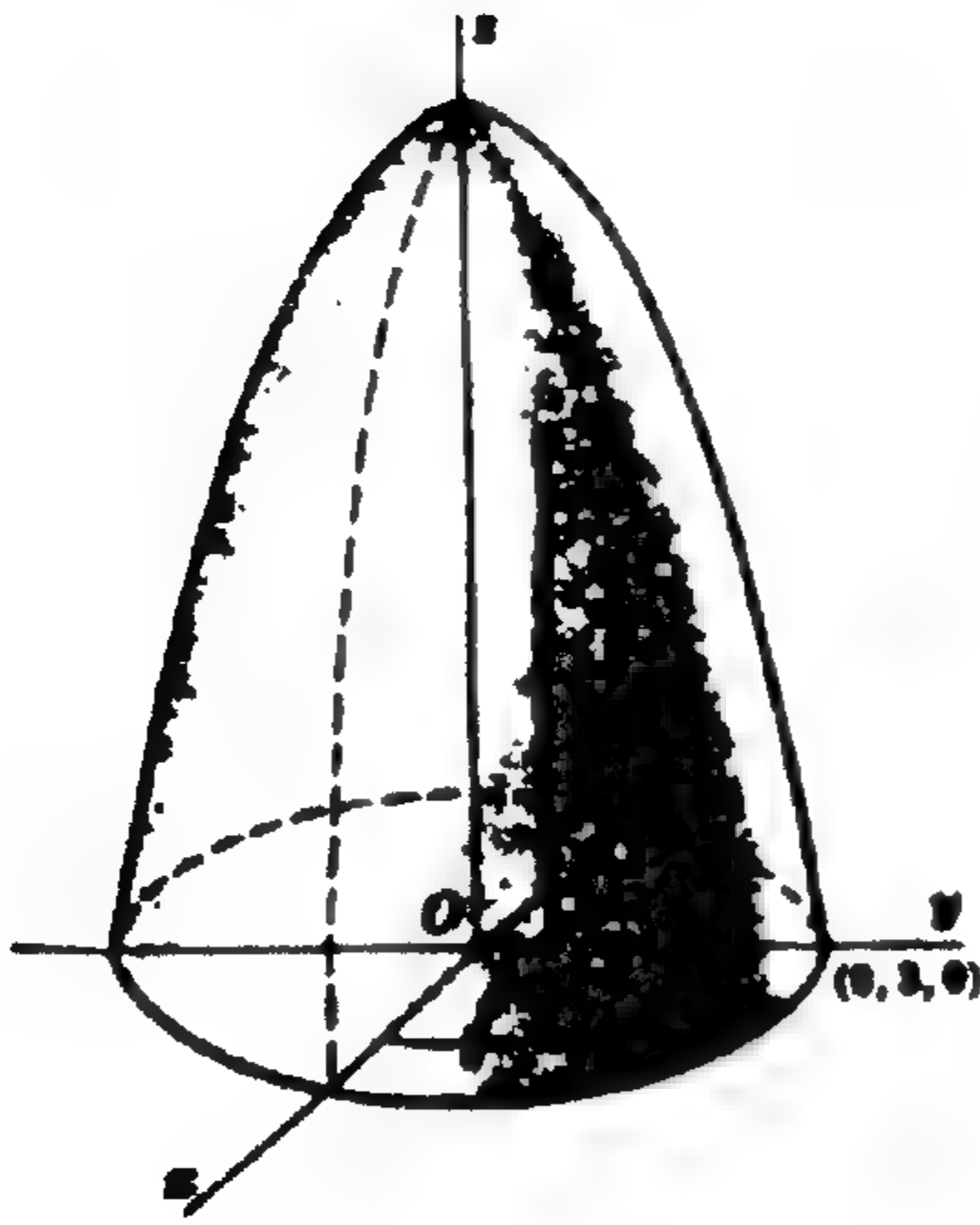
$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^2 z \rho^2 \sin \theta \, dz \, d\rho \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left. \frac{z^3}{3} \right|_0^2 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \rho^3 \Big|_0^1 \sin \theta \, d\theta = -\frac{2}{3} \cos \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}
 \quad (ب)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) \, d\theta = (2 - \sqrt{2})\pi \quad (ج)$$

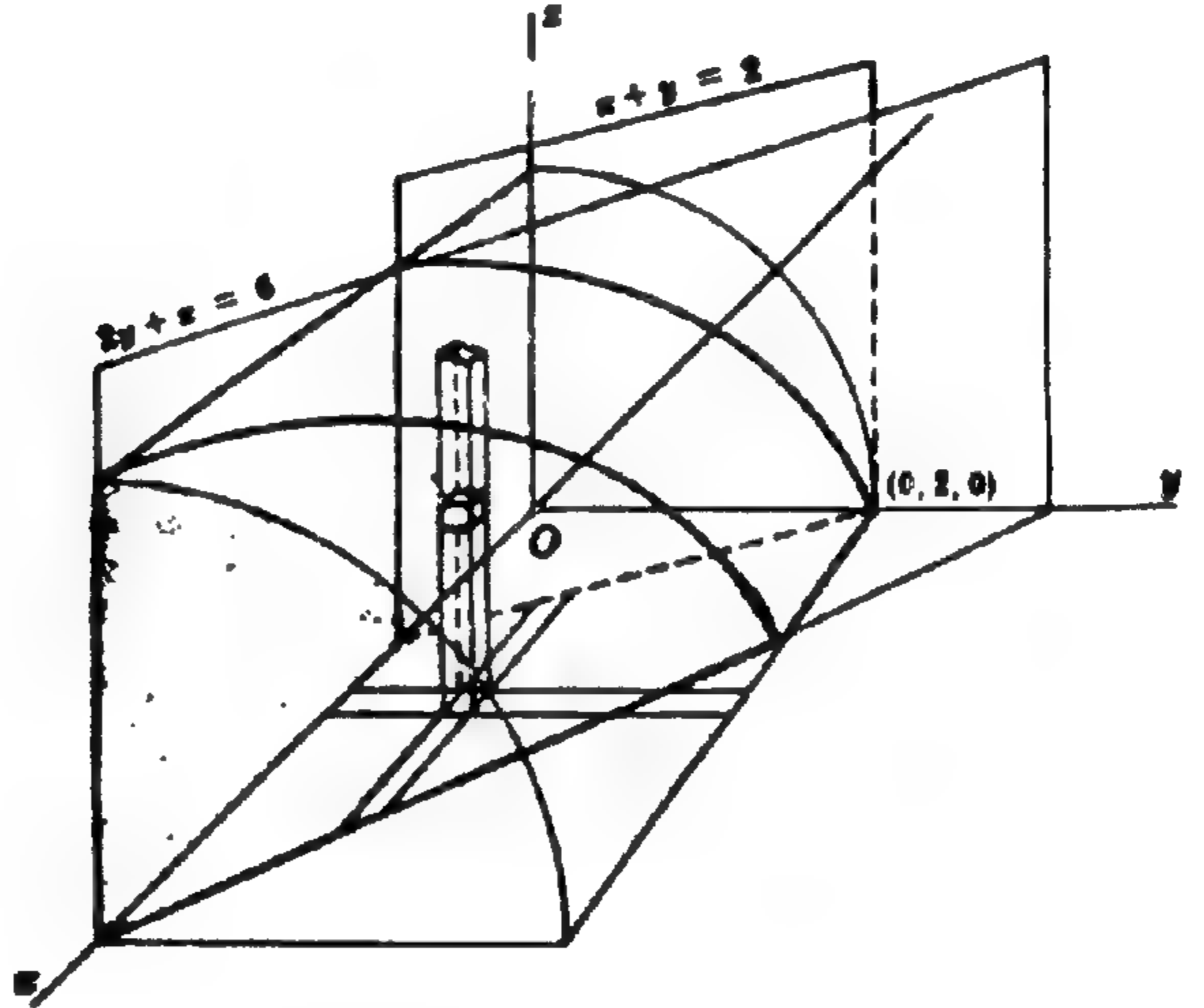
٥ - احسب قيمة التكامل الثلاثي  $F(x, y, z) = z$  على منطقة  $R$  الواقعة في الثمن الأول ومحددة بالمستويات  $y=0$  و  $z=0$  و  $x+y=2$  و  $2y+x=6$  والاسطوانة  $y^2+z^2=4$ . انظر الشكل ٦٧ - ١.

لتكامل أولاً بالنسبة لـ  $z$  من  $z=0$  (المستوى  $xOy$ ) إلى  $z=\sqrt{4-y^2}$  (الاسطوانة)، ثم تكامل بالنسبة لـ  $x$  من  $x=2-y$  إلى  $x=6-2y$  وأخيراً تكامل بالنسبة لـ  $y$  من  $y=0$  إلى  $y=2$  إذن

$$\begin{aligned}
 \iiint_R z \, dV &= \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z \, dz \, dx \, dy = \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \left( \frac{1}{2} z^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \, dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} (4-y^2) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (4-y^2)x \Big|_{2-y}^{6-2y} dy = \frac{26}{3}
 \end{aligned}$$



شكل ٦٧ - ٢



شكل ٦٧ - ١

٤ - احسب التكامل الثلاثي لـ  $f(\rho, \theta, z) = \rho^2$  على المنطقة الواقعة  $R$  بين جسم القطع المكافئ  $z=9-\rho^2$  والمستوى  $z=0$ . انظر الشكل ٦٧ - ٢.

لتكامل أولاً بالنسبة لـ  $z$  من  $z=0$  إلى  $z=9-\rho^2$  ثم بالنسبة لـ  $\rho$  من  $\rho=0$  إلى  $\rho=3$  وأخيراً بالنسبة لـ  $\theta$  من  $\theta=0$  إلى  $\theta=2\pi$  فيكون :

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho^2 dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{4\cos\theta} \rho^2 d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho^3 (9 - \rho^2) d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{9}{2}\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^3 \right) \Big|_0^{4\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{243}{4} d\theta = \frac{243}{2}\pi \end{aligned}$$

٥ - بين أن التكاملات الثلاثية التالية تعطى نفس الحجم

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4z-x^2}} \int_{(x^2+y^2)/4}^{\sqrt{4z-x^2}} dz dy dx, \\ (2) \quad & \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4z-y^2}} \int_{(x^2+y^2)/4}^{\sqrt{4z-y^2}} dx dz dy, \\ (3) \quad & \int_0^4 \int_{x^2/4}^{\sqrt{4z-x^2}} \int_{(x^2+y^2)/4}^{\sqrt{4z-x^2}} dz dy dx \end{aligned}$$

(١) بالنسبة لهذا التكامل تتغير  $z$  من  $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$  إلى  $z = 4$ ؛ والحجم محدود بمجسم القطع المكافئ  $4z = x^2 + y^2$  من أسفل والمستوى  $z = 4$  من أعلى. أما مدى تغير  $x$  و  $y$  فهو بحيث يغطي ربع الدائرة  $x^2 + y^2 = 16$   $z = 0$  و التي هي مسقط منحنى تقاطع مجسم القطع المكافئ مع المستوى  $z = 4$  على المستوى  $xy$ . وعلى هذا فإن التكامل المفروض يعطى الحجم المقطوع من مجسم القطع المكافئ بالمستوى  $z = 4$ .

(ب) أما في التكامل الثاني فإن  $y$  تتغير من  $y = 0$  إلى  $y = \sqrt{4z - x^2}$ ؛ والحجم محدود من اليسار بالمستوى  $zOx$  ومن اليمين بمجسم القطع المكافئ  $4z = x^2 + y^2$ . وأما مدى تغير  $x$  و  $z$  فهو بحيث تغطي النقطة  $(x, z)$  نصف قطعة "السطح المقطوعة من القطع المكافئ"  $4z = x^2$  و  $y = 0$  الذي هو منحنى تقاطع مجسم القطع المكافئ والمستوى  $zOx$  مع المستوى  $z = 4$ .

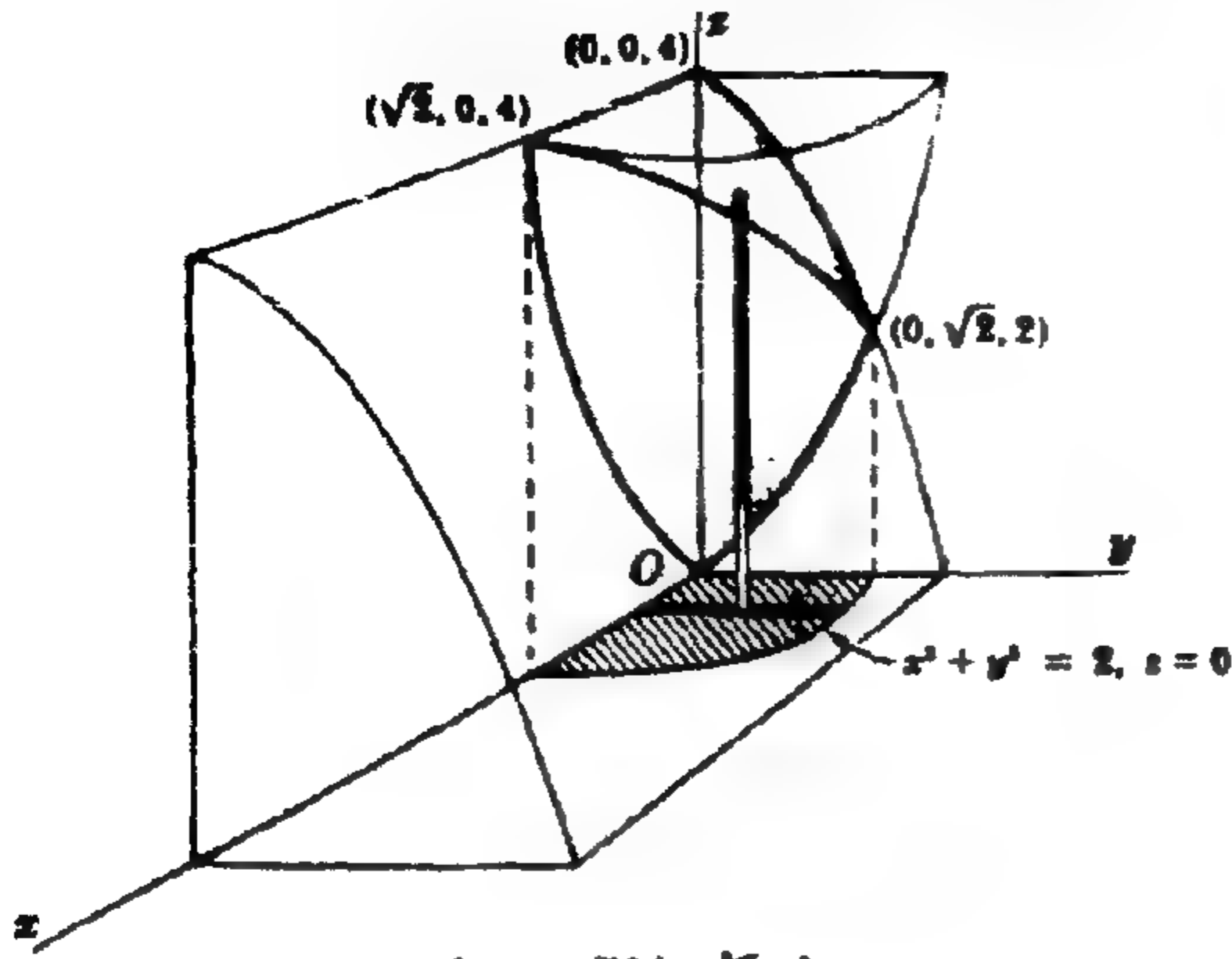
وعلى هذا فالمجموعة  $R$  هي نفس المنطقة في (١)

(ج) يحدها الحجم في التكامل الثالث من الخلف المستوى  $yOz$  ومن الأمام بمجسم القطع المكافئ  $4z = x^2 + y^2$ . أما مدى تغير  $z$  و  $y$  فهو بحيث تغطي النقطة  $(z, y)$  نصف قطعة السطح المقطوعة من القطع المكافئ  $4z = x^2$  و  $x = 0$  الذي هو منحنى تقاطع مجسم القطع المكافئ والمستوى  $yOz$  مع المستوى  $z = 4$ . وعلى هذا فإن المنطقة  $R$  هي نفس المنطقة في (١).

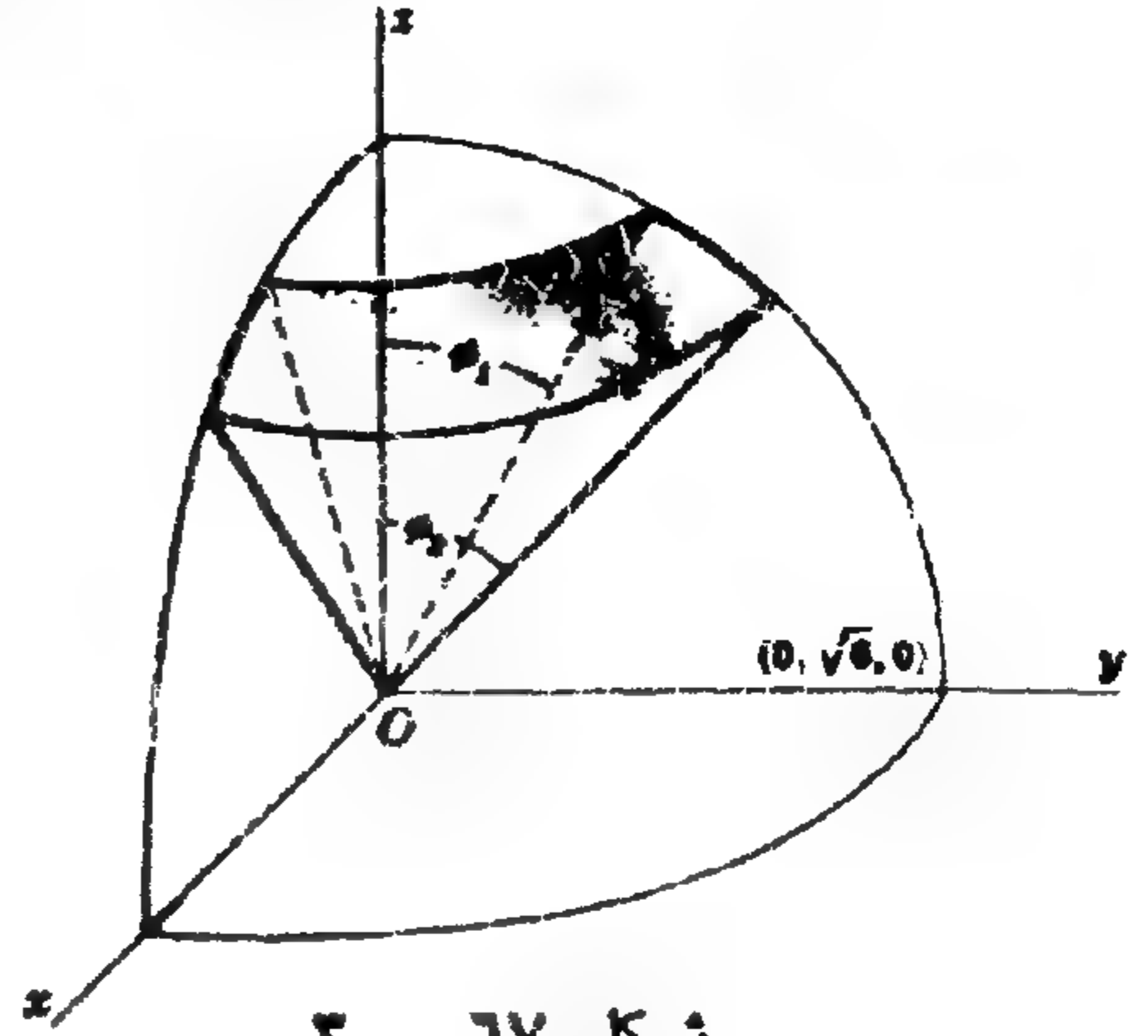
٦ - احسب التكامل الثلاثي  $F(\rho, \phi, \theta) = \frac{1}{\rho}$  الممتد على المنطقة  $R$  الواقعة في الثمن الأول بين المحاور  $x, y, z$ .  
 $\phi = \frac{1}{4}\pi$  و  $\phi = \arctan 2$  و  $\rho = \sqrt{6}$ . انظر الشكل ٦٧ - ٢.

لتكامل أولاً بالنسبة لـ  $\rho$  من  $\rho = 0$  إلى  $\rho = \sqrt{6}$  ثم بالنسبة لـ  $\phi$  من  $\phi = \frac{1}{4}\pi$  إلى  $\phi = \arctan 2$  وأخيراً بالنسبة لـ  $\theta$  من  $\theta = 0$  إلى  $\theta = \frac{1}{2}\pi$  نجد:

$$\begin{aligned} \iiint_R \frac{1}{\rho} dV &= \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\arctan 2} \int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{\rho} \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/4}^{\arctan 2} \sin \phi d\phi d\theta = -3 \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) d\theta = \frac{3\pi}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$



شكل ٦٧ - ١



شكل ٦٧ - ٢

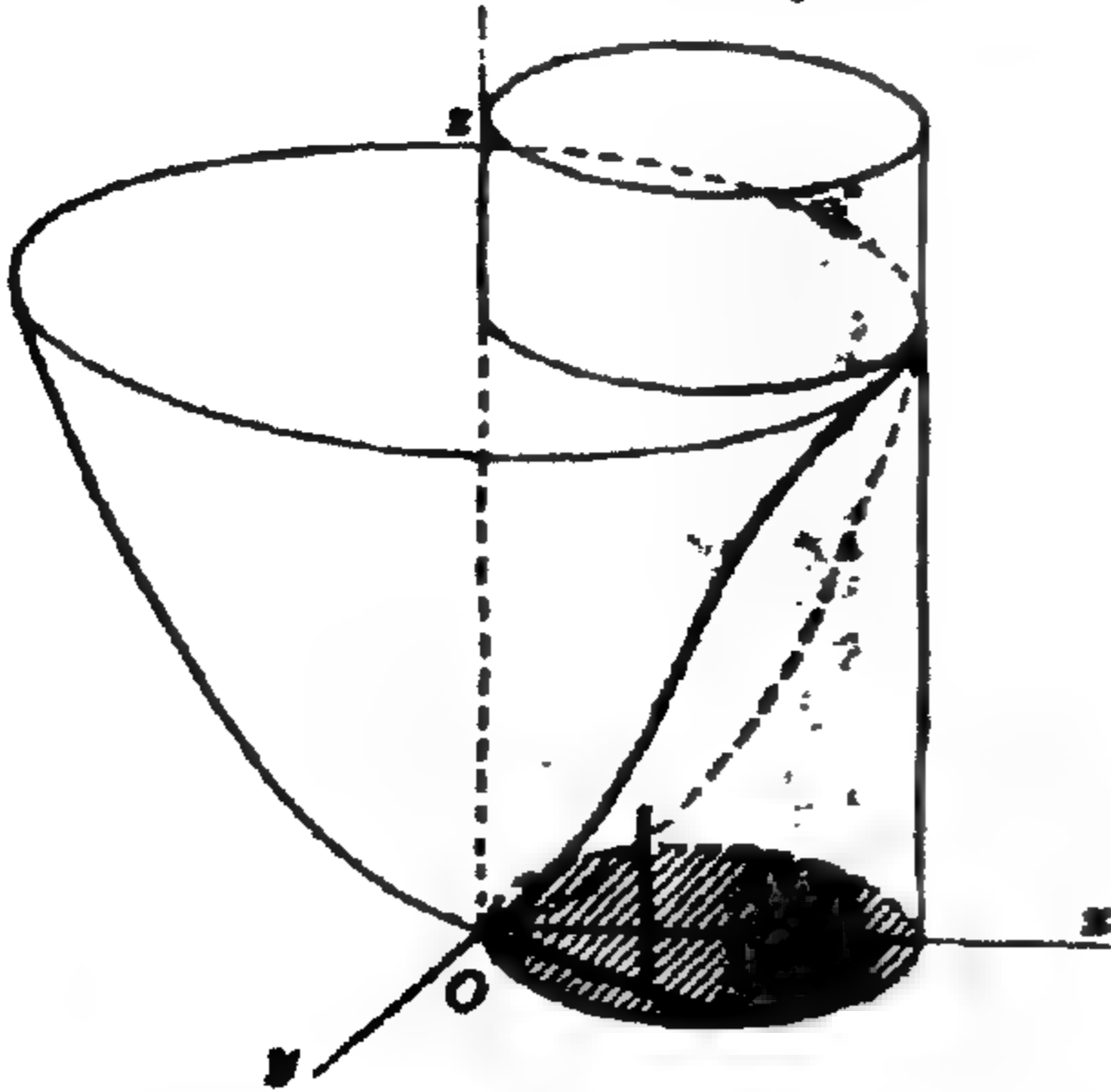
٧ - احسب الحجم الواقع بين مجسم القطع المكافئ  $z = 2x^2 + y^2$  والاسطوانة  $z = 4 - y^2$  انظر الشكل ٦٧ - ١  
 لتكامل أولا بالنسبة لـ  $z$  من  $z = 2x^2 + y^2$  إلى  $z = 4 - y^2$  ثم بالنسبة لـ  $y$  من  $y = 0$  إلى  $y = \sqrt{2 - x^2}$   
 ( ونحصل على  $x^2 + y^2 = 2$  بحذف  $z$  من معادلتى السطحين ) وأخيرا بالنسبة لـ  $x$  من  $x = 0$  إلى  $x = \sqrt{2}$   
 ( نحصل على هذين الحدين بوضع  $y = 0$  في  $x^2 + y^2 = 2$  ) فنحصل بذلك على ربع الحجم المطلوب . وهكذا فإن :

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz dy dx = 4 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} ((4-y^2) - (2x^2+y^2)) dy dx \\ &= 4 \int_0^{\sqrt{2}} \left( 4y - 2x^2y - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} dx = \frac{16}{3} \int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2)^{3/2} dx = 4 \text{ cubic units} \end{aligned}$$

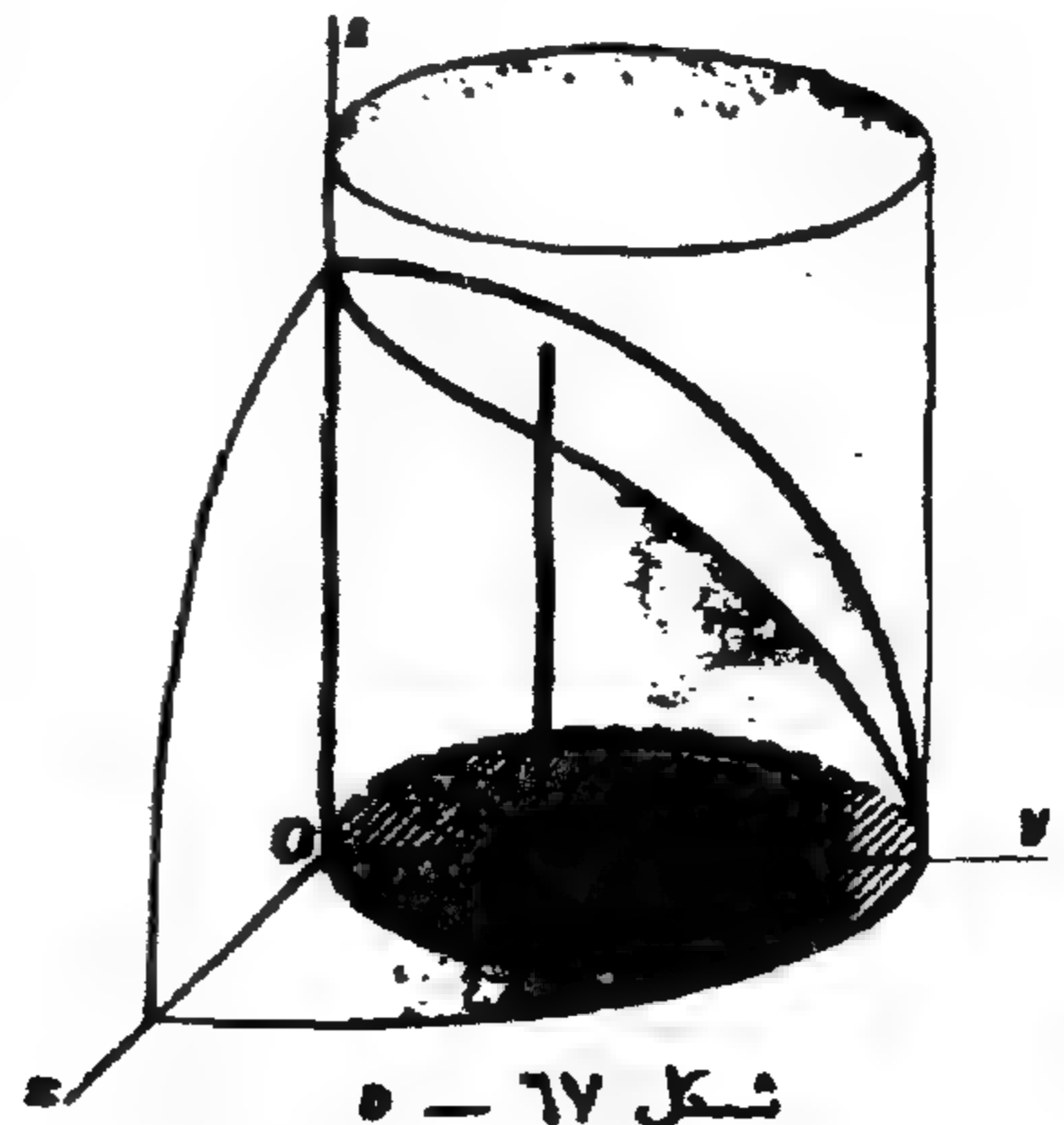
٨ - احسب الحجم داخل الاسطوانة  $\rho = 4 \cos \theta$  والمحدد من أعلى بالكرة  $\rho^2 + z^2 = 16$  ومن أسفل بالمستوى  $z = 0$  انظر الشكل ٦٧ - ٢

لتكامل أولا بالنسبة لـ  $z$  من  $z = 0$  إلى  $z = \sqrt{16 - \rho^2}$  ثم بالنسبة لـ  $\rho$  من  $\rho = 0$  إلى  $\rho = 4 \cos \theta$  وأخيرا بالنسبة لـ  $\theta$  من  $\theta = 0$  إلى  $\theta = \pi$  فنحصل على الحجم المطلوب . وهو :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi} \int_0^{4 \cos \theta} \int_0^{\sqrt{16-\rho^2}} \rho dz d\rho d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{4 \cos \theta} \rho \sqrt{16-\rho^2} d\rho d\theta \\ &= -\frac{64}{3} \int_0^{\pi} (\sin^3 \theta + 1) d\theta = \frac{64}{9} (3\pi - 4) \text{ cubic units} \end{aligned}$$



شكل ٦٧ - ٦



شكل ٦٧ - ٥

٩ - عين المركز المتوسط للجسم الواقع داخل الاسطوانة  $p = 2 \cos \theta$  والمحدد من أعلى بمجسم القطع المكافئ  $z = p^2$  ومن أسفل بالمستوى  $z = 0$ . انظر الشكل ٦٧ - ١.

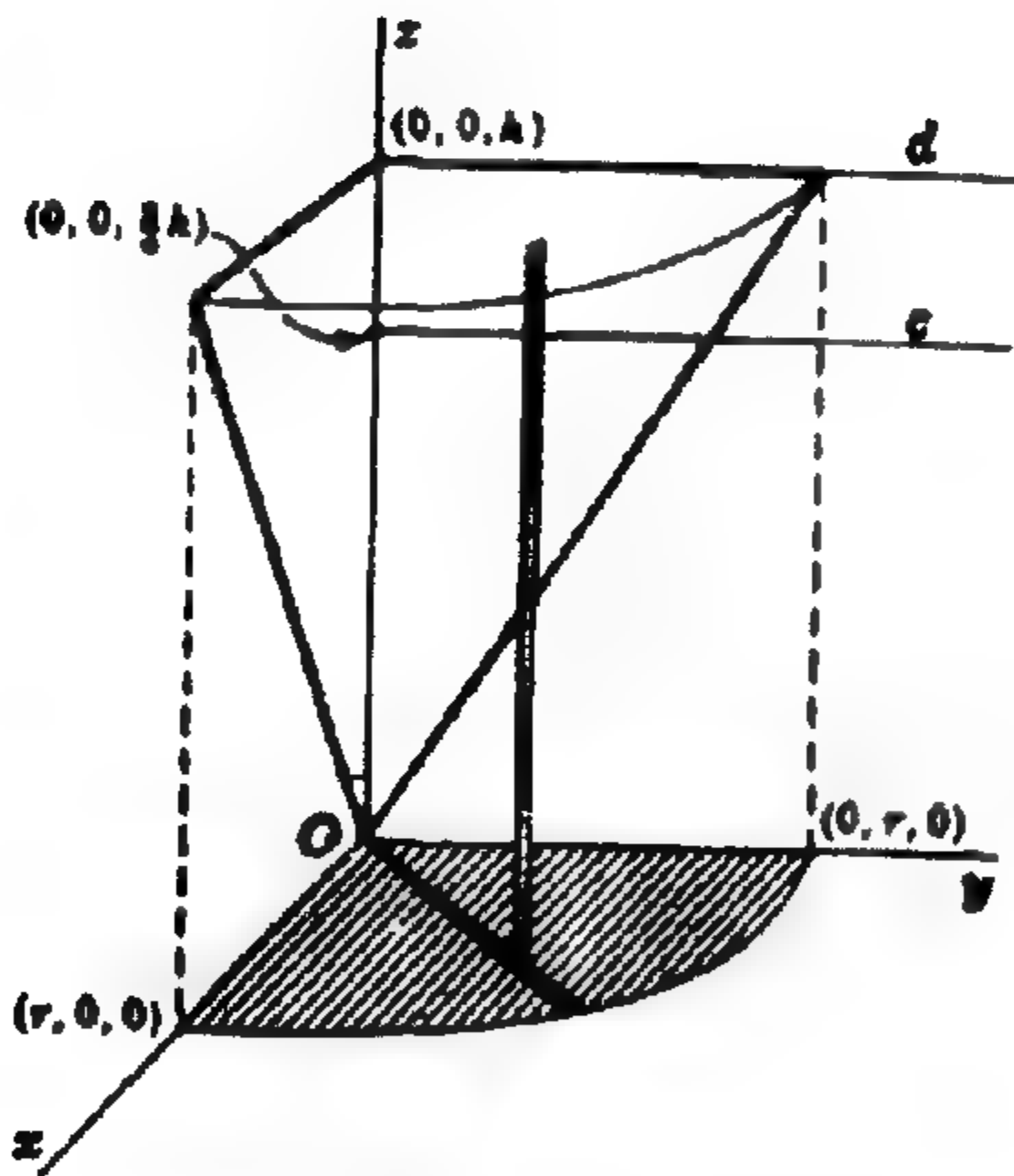
$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^{p^2} p \, dz \, dp \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} p^2 \, dp \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} p^3 \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{3}{2} \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_R x \, dV = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^{p^2} p \cos \theta \cdot p \, dz \, dp \, d\theta \quad \text{ومنه} \\ \bar{x} = \frac{M_{xy}}{V} &= \frac{4}{3} \quad \text{ومنه} \quad = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} p^2 \cos \theta \, dp \, d\theta = \frac{64}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

واستنادا إلى التناظر يكون  $\bar{y} = 0$  ثم إن .

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \iiint_R z \, dV = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \int_0^{p^2} z \cdot p \, dz \, dp \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} p^3 \, dp \, d\theta \\ &= \frac{32}{8} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{5}{8} \pi, \quad \text{ومنه} \quad \bar{z} = \frac{M_{xz}}{V} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

والمركز المتوسط له الإحداثيات  $(4/3, 0, 10/9)$ .



شكل ٦٧ - ١

١٠ - لدينا مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته  $r$  وارتفاعه  $h$ ، أوجد  
(١) مركزه المتوسط (ب) عزم قصوره الذاتي بالنسبة لمحوره (ج) عزم قصوره الذاتي بالنسبة لأي مستقيم مار برأسه وعمودي على محوره . (د) عزم قصوره الذاتي بالنسبة لأي قطر لقاعدته .

لنأخذ المخروط كما في الشكل ٦٧ - ٢ فتكون معادلته  $p = \frac{r}{h} z$ .

وبالتالي :

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \int_0^h p \, dz \, dp \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \left( h p - \frac{h}{r} p^2 \right) dp \, d\theta \\ &= \frac{2}{3} h r^3 \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3} \pi h r^3 \end{aligned}$$

(١) يقع المركز المتوسط على المحور  $z$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_R z \, dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \int_0^h z \cdot p \, dz \, dp \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \left( h^2 p - \frac{h^2}{r^2} p^3 \right) dp \, d\theta = \frac{1}{2} h^2 r^3 \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{4} \pi h^2 r^3 \end{aligned}$$

ومن  $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{3}{4} h$ . وعلى هذا يكون المركز المتوسط هو النقطة  $(0, 0, 3/4 h)$ .



$$I_x = \iiint_V (x^2 + y^2) dV = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{\frac{2}{3}\rho}^{\rho} \rho^2 \cdot \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{10} \pi h r^4 = \frac{3}{10} r^2 V \quad (\text{ب})$$

(ج) لنأخذ المستقيم كمحور  $y$  فيكون :

$$\begin{aligned} I_y &= \iiint_V (x^2 + z^2) dV = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{\frac{2}{3}\rho}^{\rho} (\rho^2 \cos^2 \theta + z^2) \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ \left( h\rho^2 - \frac{h}{4}\rho^4 \right) \cos^2 \theta + \frac{1}{3} \left( h^3\rho - \frac{h^3}{4}\rho^4 \right) \right\} d\rho \, d\theta \\ &= \frac{1}{6} \pi h r^2 \left( h^2 + \frac{1}{4} r^2 \right) = \frac{3}{6} \left( h^2 + \frac{1}{4} r^2 \right) V \end{aligned}$$

(د) ليكن المستقيم  $c$  المار بالمركز المتوسط موازيا لمحور  $y$  فيكون - استنادا إلى نظرية المستقيمت المتوازية

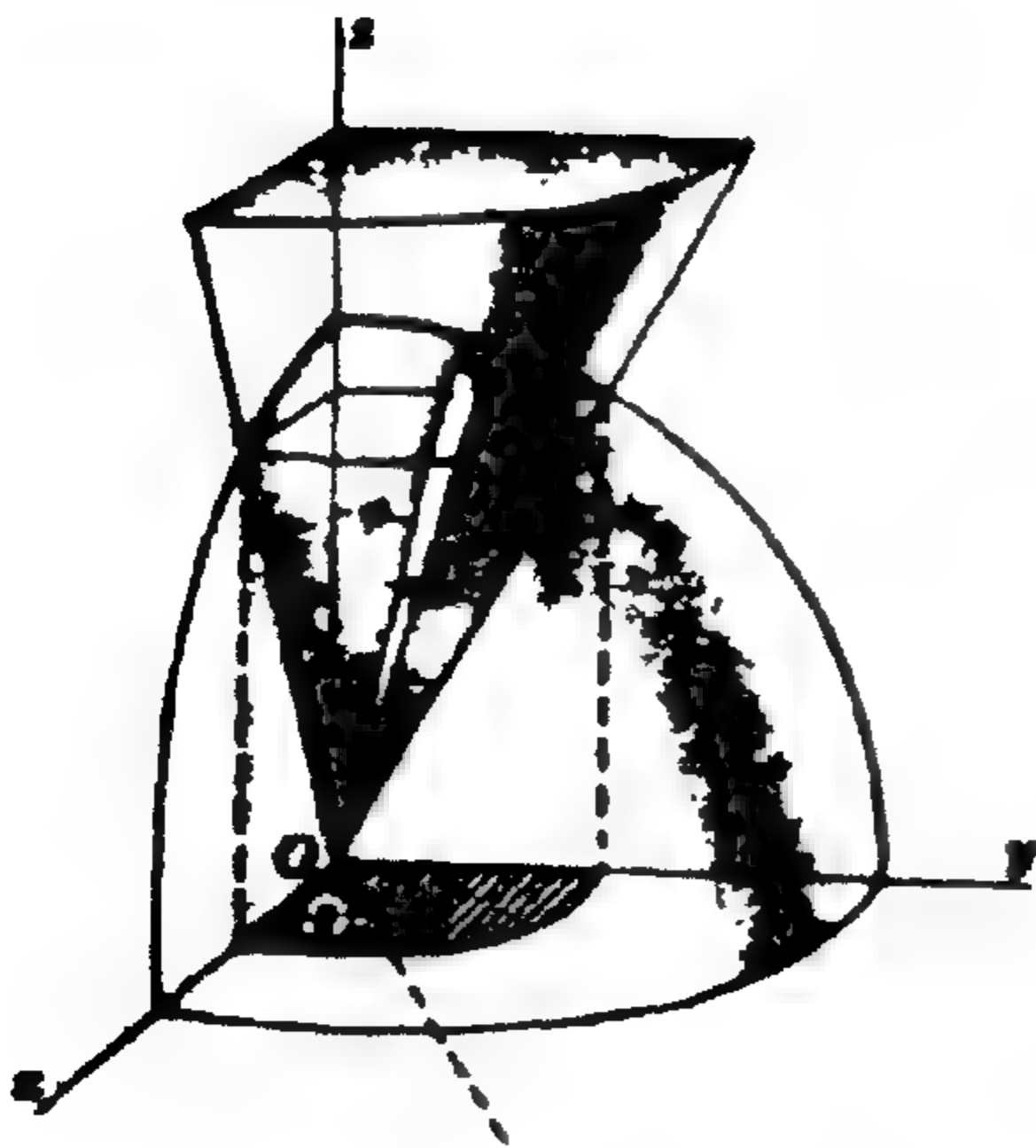
$$I_c = \frac{3}{6} \left( h^2 + \frac{1}{4} r^2 \right) V - \frac{1}{12} h^2 V = \frac{1}{12} (h^2 + 4r^2) V \quad \text{و} \quad I_y = I_c + V \left( \frac{1}{12} h \right)^2$$

(هـ) لترمز بـ  $d$  لقطر قاعدة المخروط الموازي لمحور  $y$  فيكون :

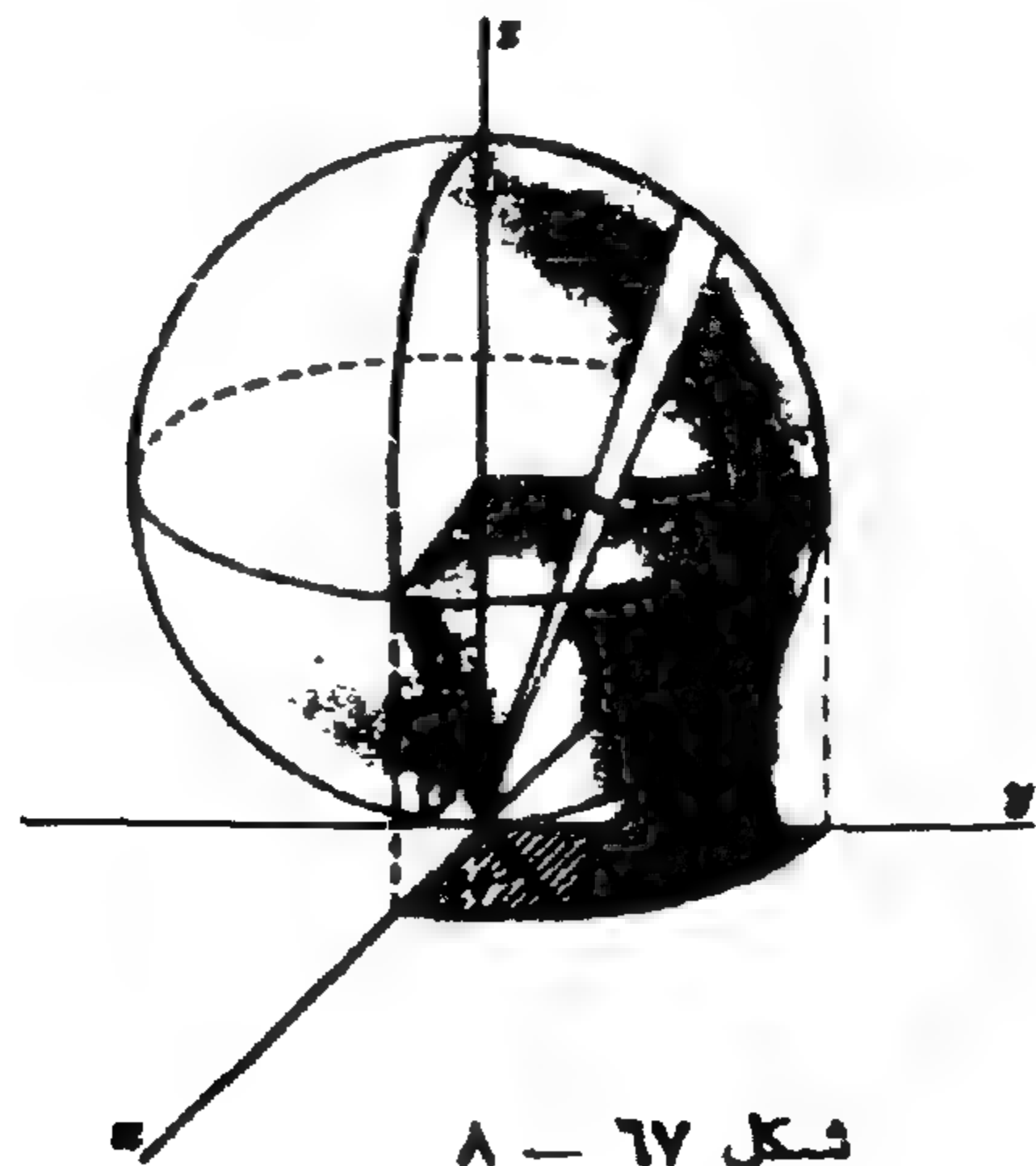
$$I_c = I_y + V \left( \frac{1}{12} h \right)^2 = \frac{1}{12} (h^2 + 4r^2) V + \frac{1}{12} h^2 V = \frac{1}{12} (2h^2 + 3r^2) V$$

١١ - احسب الحجم المقتطع من المخروط  $\phi = \frac{1}{4}\pi$  بالكرة  $\rho = 2a \cos \phi$ . انظر الشكل ٦٧ - ٨ .

$$\begin{aligned} V &= 4 \iiint_V dV = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2a \cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{32a^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \cos^3 \phi \sin \phi \, d\phi \, d\theta = 2a^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \pi a^3 \text{ cubic units} \end{aligned}$$



شكل ٦٧ - ٩



شكل ٦٧ - ٨

١٢ - عين المركز المتوسط للحجم المقتطع من أحد فرعي المخروط الذي زاوية رأسه  $60^\circ$  بالكرة التي نصف قطرها 2 والتي يقع مركزها على رأس المخروط . انظر الشكل ٦٧ - ٩ .



لنأخذ السطحين كما في الشكل ١٧ - ١٨ فيكون  $\bar{x} = \bar{y} = 0$  . وإذا استخدمنا الاحداثيات الكروية نجد معادلة المخروط  $\phi = \pi/6$  ومعادلة الكرة  $\rho = 2$  .

$$V = \iiint_R dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \sin \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= -\frac{32}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{3} (2 - \sqrt{3})$$

$$M_{xy} = \iiint_R z \, dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \rho \cos \phi \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{8} \quad \text{و} \quad = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \sin 2\phi \, d\phi \, d\theta = \pi,$$

١٢ - احسب عزم القصور الذاتي للجسم المحدد بالمسألة ١٢ بالنسبة لمحور  $z$  .

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2) \, dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \rho^3 \sin^2 \phi \cdot \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{128}{5} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \sin^3 \phi \, d\phi \, d\theta = \frac{128}{5} \left( \frac{2}{3} - \frac{3}{8} \sqrt{3} \right) \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{15} (16 - 9\sqrt{3}) = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{5} V$$

### مسائل اضافية

١٤ - احسب قيم التكاملات الثلاثية التالية :

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dz \, dx \, dy = 1 \quad (أ)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dz \, dy \, dx = 1/24 \quad (ب)$$

$$\int_0^1 \int_0^{12-4x} \int_0^{4-3y/2-x/2} z \, dz \, dx \, dy = 144 = \int_0^{12} \int_0^{x/2} \int_0^{4-3y/2-x/2} z \, dz \, dy \, dx \quad (ج)$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{16-\rho^2}} (16-\rho^2)^{1/2} \rho \, z \, d\rho \, dz \, d\theta = \frac{256}{5} \pi \quad (د)$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2500\pi \quad (هـ)$$

١٥ - (أ) احسب قيمة تكامل المسألة ١٤ (ب) بعد تغيير الترتيب بحيث يصبح  $dz \, dx \, dy$  .

(ب) احسب قيمة تكامل المسألة ١٤ (ج) بعد تغيير الترتيب بحيث يصبح  $dx \, dy \, dz$  وعندما يصبح أيضا  $dy \, dz \, dx$  .

١٦ - احسب الحجم التام التالي مستخدما التكاملات الثلاثية في الاحداثيات المتعامدة :

(أ) الحجم الواقع داخل  $x^2 + y^2 = 9$  وفوق المستوى  $z = 0$  وتحت المستوى  $x + z = 4$  .

ج :  $36\pi$  cu. un. .

(ب) أوجد المحدد بالمستويات الاحداثية والمستوى  $6x + 4y + 3z = 12$

ج : 4 cu. un.

(ج) الحجم الواقع داخل  $x^2 + y^2 = 4x$  وفوق  $z = 0$  وتحت  $x^2 + y^2 = 4x$ .

ج :  $6\pi$  cu. un.

١٧ - احسب الحجم التالي مستخدماً التكاملات الثلاثية في الاحداثيات الاسطوانية :

(أ) حجم المسألة ٥

(ب) حجم المسألة ١٦ (ج)

(ج) الحجم الواقع داخل  $p^2 = 16$  وفوق  $z = 0$  وتحت  $2x = y$ .

ج :  $64/3$  cu. un.

١٨ - عين المركز المتوسط لكل من الحجم التالي :

(أ) الحجم الواقع تحت  $z^2 = xy$  وفوق المثلث  $y = x, y = 0, x = 4$

في المستوى  $z = 0$ .

ج :  $(3, 9/5, 9/8)$

ج :  $(1/2, 3/4, 1)$

(ب) حجم المسألة ١٦ (ب)

(ج) حجم المسألة ١٦ (أ) الواقع في الثمن الأول.

ج :  $\left( \frac{64 - 9x}{16(x-1)}, \frac{23}{8(x-1)}, \frac{73x - 128}{32(x-1)} \right)$

ج :  $(8/3, 0, 10/9)$

(د) حجم المسألة ١٦ (ج)

ج :  $(0, 3x/4, 3x/16)$

(هـ) حجم المسألة ١٧ (ج)

١٩ - احسب عزوم القصور الذاتية  $I_x, I_y, I_z$  للحجوم التالية :

(أ) حجم المسألة ٥ ج :  $I_x = I_y = \frac{7}{12}V, I_z = \frac{1}{4}V$

(ب) حجم المسألة ١٦ (ب) ج :  $I_x = \frac{1}{2}V, I_y = 2V, I_z = \frac{11}{12}V$

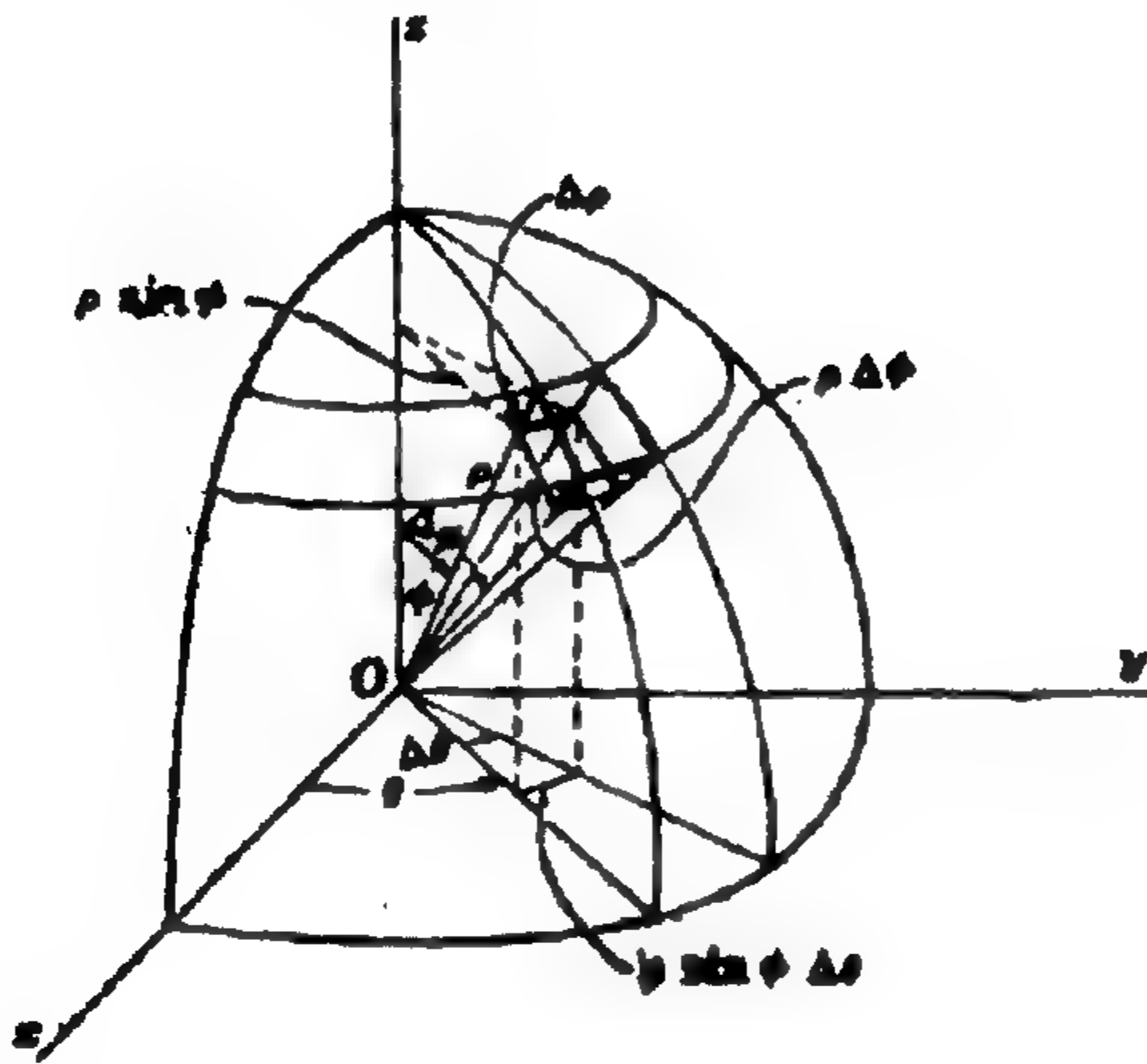
(ج) حجم المسألة ١٦ (ج) ج :  $I_x = \frac{11}{12}V, I_y = \frac{17}{12}V, I_z = \frac{1}{2}V$

(د) الحجم المقطع من  $z = p^2$  بالمستوى  $z = 2$  ج :  $I_x = I_y = \frac{1}{3}V, I_z = \frac{1}{3}V$

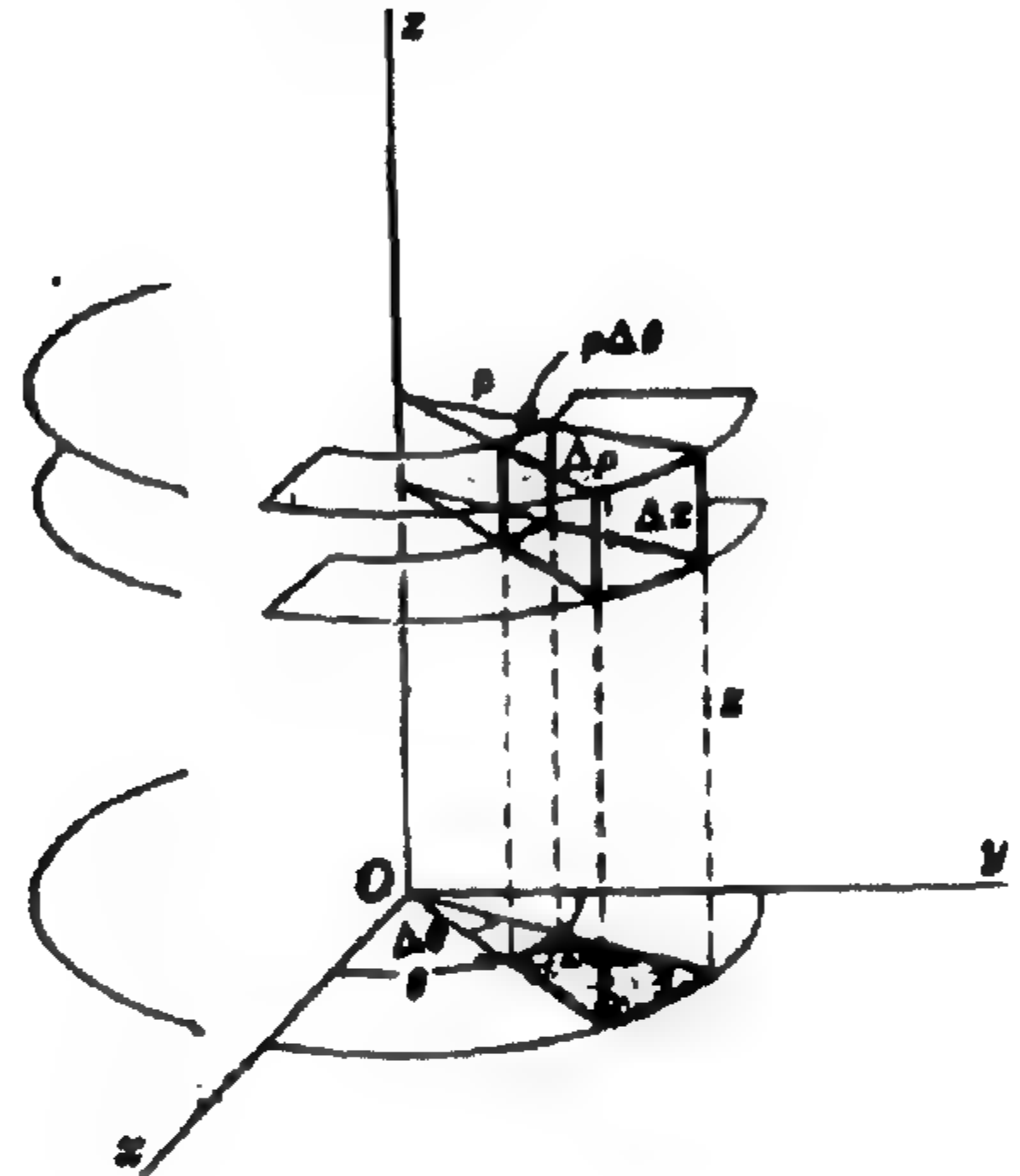
٢٠ - برهن أنه يمكن تمثيل تكامل الدالة  $f(p, \theta, z)$  على منطقة  $R$  في الاحداثيات الاسطوانية بـ

$$\int_0^{\theta_2} \int_{p_1(\theta)}^{p_2(\theta)} \int_{z_1(p, \theta)}^{z_2(p, \theta)} f(p, \theta, z) p \, dz \, dp \, d\theta$$

إرشاد. اعتبر المنطقة الجزئية المثلثة بـ  $R$  (انظر الشكل ١٧ - ١٠) والمحددة بالاسطوانتين التين محورهما  $Oz$  ونصفا قطريهما  $p$  و  $p + \Delta$  على التوالي ، والمستويين الأفقيين المارين بـ  $(0, 0, z)$  و  $(0, 0, z + \Delta z)$  على التوالي ، والمستويين الرأسين المارين بـ  $Oz$  والذان يصنعان مع المستوى  $xOy$  الزاويتين  $\theta$  و  $\theta + \Delta\theta$  على التوالي ، ثم خذ  $\Delta V = (p \Delta \theta) \Delta p \, \Delta z$  كتقريب لحجم هذه المنطقة الجزئية .



شكل ٦٧ - ١١



شكل ٦٧ - ١٠

٢١ - برهن أنه يمكن تمثيل تكامل  $f(\rho, \phi, \theta)$  على منطقة  $R$  في الاحداثيات الكروية بـ

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\phi, \theta)}^{\rho_2(\phi, \theta)} f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

إرشاد . اعتبر منطقة جزئية مثثة بـ  $R$  ( انظر الشكل ٦٧ - ١١ ) محدة بـ كرتين مركزهما  $O$  ونصف قطريهما  $\rho$  و  $\rho + \Delta\rho$  على التوالي ونحروطي رأسها  $O$  ومحورها  $Oz$  . ونصف زاويتي رأسها  $\phi$  و  $\phi + \Delta\phi$  على التوالي ، وبمستويين رأسيين مارين بـ  $Oz$  وبصنمان الزاويتين  $\theta$  و  $\theta + \Delta\theta$  على التوالي مع المستوى  $zOy$  . ثم خذ

$$\Delta V = (\rho \Delta\phi)(\rho \sin \phi \Delta\theta)(\Delta\rho) = \rho^2 \sin \phi \, \Delta\rho \, \Delta\phi \, \Delta\theta$$

كتقريب لحجم هذه المنطقة الجزئية .

# الفصل الثامن والستون

## الكتل ذات الكثافة المتغيرة

**الكتل المتجانسة :** سبق معالجتها في الفصول السابقة على أنها أشكال هندسية كثافتها  $\delta = 1$  . فكتلة جسم متجانس حجمه  $V$  وكثافته  $\delta$  هي  $m = \delta V$  .

أما إذا كان لدينا كتلة غير متجانسة تتغير كثافتها  $\delta$  بشكل مستمر من موضع لآخر فإن عنصر الكتلة  $dm$  يعطى بـ :

$$\delta(x, y) ds \quad \text{لنحى مادي ( مثل قطعة من سلك رفيع ) .}$$

$$\delta(x, y) dA \quad \text{لجسم مادي ثنائي البعد ( مثل صفيحة رقيقة من المعدن )}$$

$$\delta(x, y, z) dV \quad \text{لجسم مادي .}$$

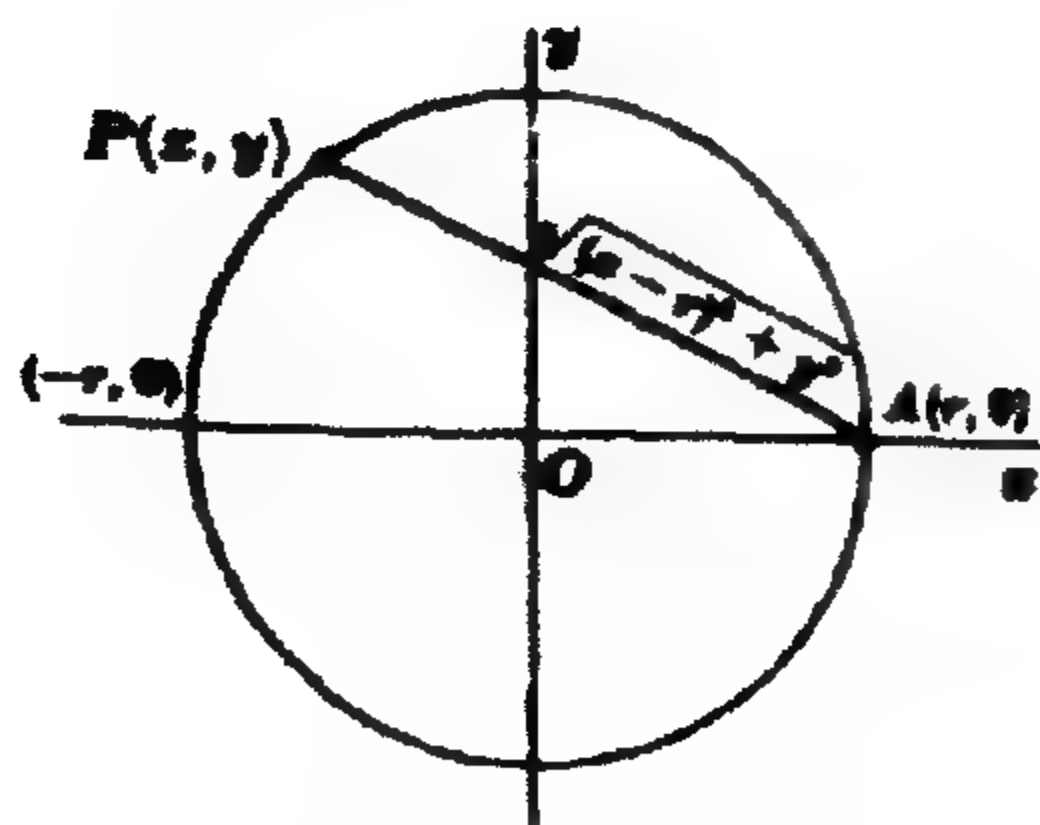
## مسائل محلولة

١ - احسب كتلة سلك نصف دائري تتغير كثافته كغير البعد عن القطر الذي يصل نهايتي السلك ( انظر الشكل ٦٨ - ١ ) .

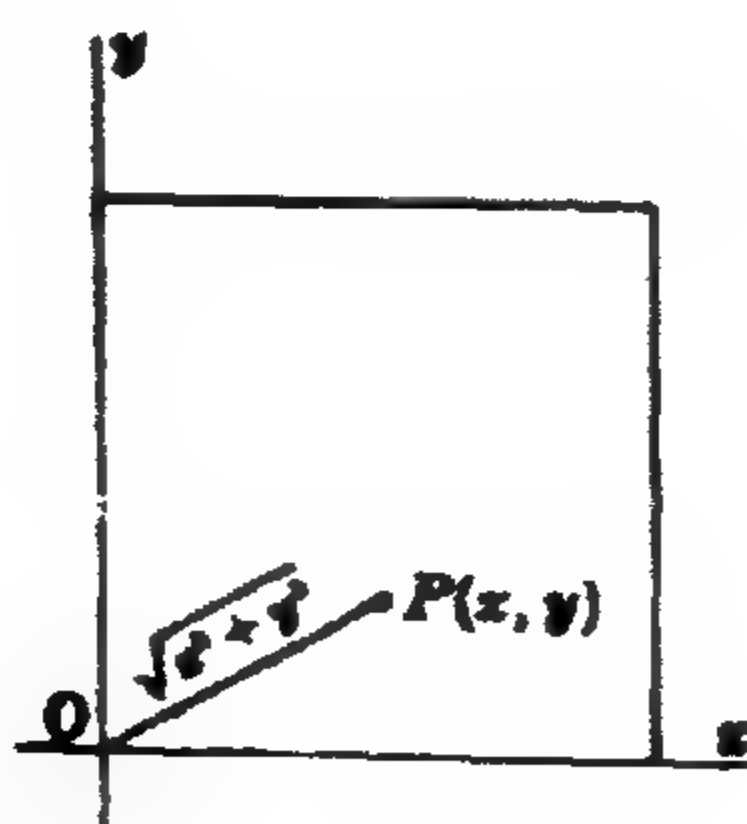
لنأخذ السلك كما في الشكل ٦٨ - ١ فيكون  $\delta(x, y) = ky$  واستنادا إلى  $x^2 + y^2 = r^2$  أن نجد

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{r}{y} dx$$

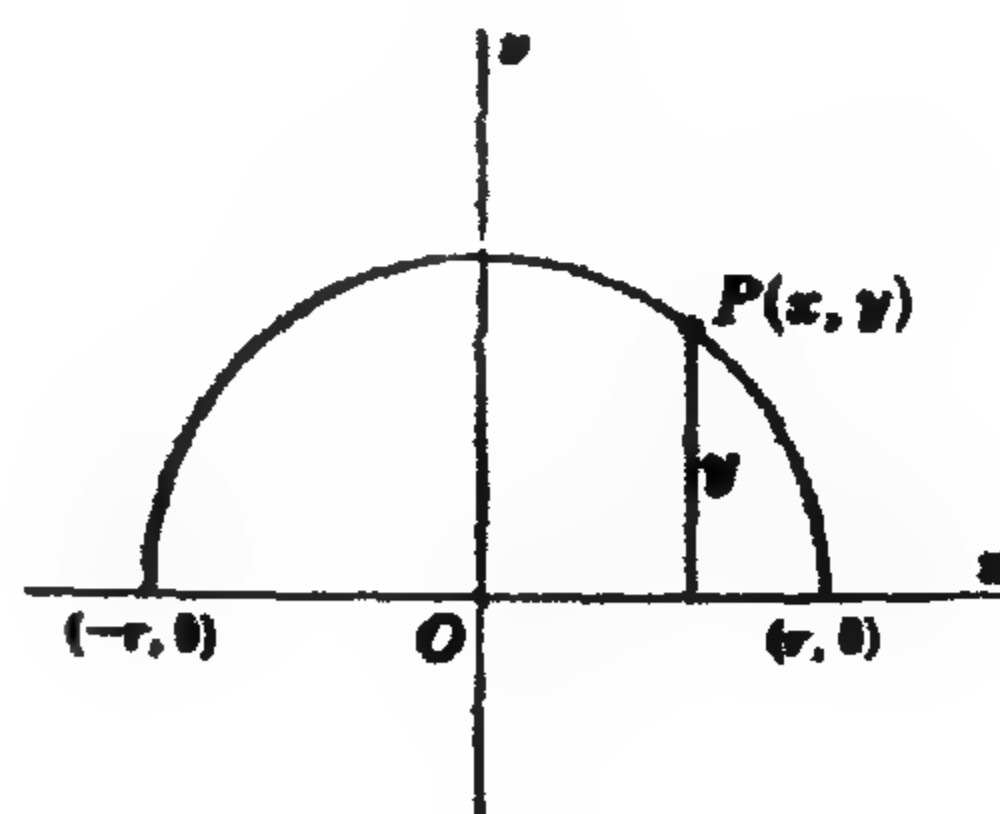
$$m = \int \delta(x, y) ds = \int_{-r}^r ky \cdot \frac{r}{y} dx = kr \int_{-r}^r dx = 2kr, \quad \text{ومن هنا}$$



شكل ٦٨ - ٢



شكل ٦٨ - ٢



شكل ٦٨ - ١

٢ - احسب كتلة صفيحة مربعة طول ضلعها  $a$  تتغير كثافتها كتغير مربع البعد عن أحد رؤوس المربع . انظر الشكل ٦٨ - ٢ .

لنأخذ المربع كما في الشكل ٦٨ - ٢ ولنجعل الرأس الذي نقيس منها الأبعاد نقطة الأصل . يكون عندئذ  $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$  ويكون :

$$m = \iint_R \delta(x, y) dA = \int_0^a \int_0^a k(x^2 + y^2) dx dy = k \int_0^a \left( \frac{1}{3} a^3 + a y^2 \right) dy = \frac{3}{2} k a^4 \text{ units}$$

٣ - احسب كتلة صفيحة دائرية نصف قطرها  $r$  وتتغير كثافتها كتغير مربع البعد عن إحدى نقط محيط الدائرة انظر الشكل ٦٨ - ٣

لنأخذ الدائرة كما في الشكل ٦٨ - ٣ ولنكن  $A(r, 0)$  النقطة الثابتة على محيط الدائرة . عندئذ يكون  $\delta(x, y) = k\{(x-r)^2 + y^2\}$  ومنه :

$$m = \iint_R \delta(x, y) dA = 2 \int_{-r}^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} k\{(x-r)^2 + y^2\} dy dx = \frac{3}{2} k \pi r^4 \text{ units}$$

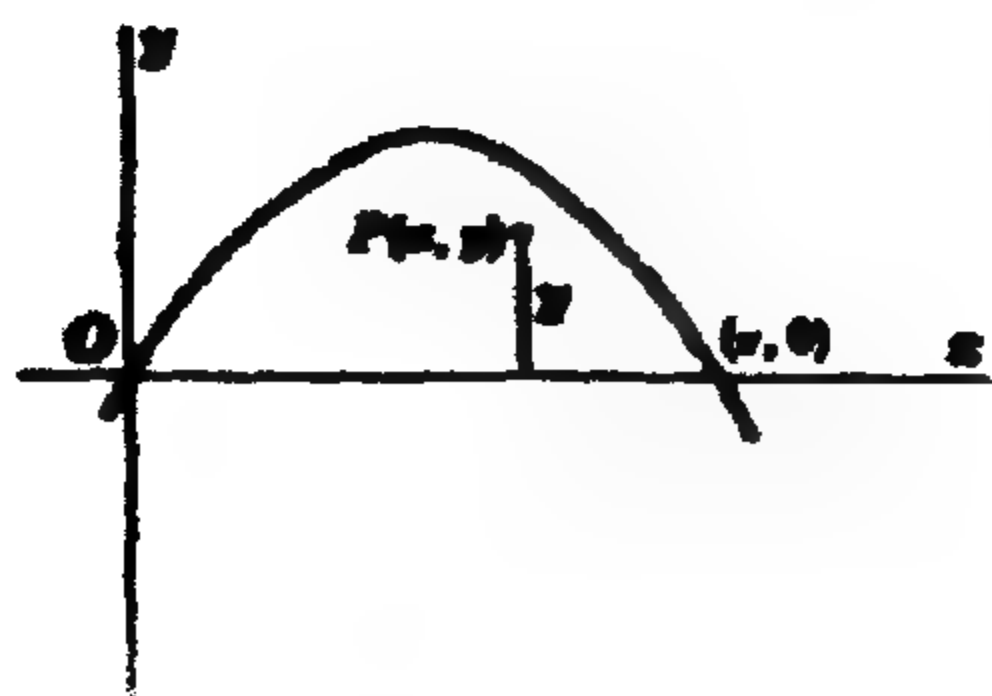
٤ - عين مركز صفيحة على شكل قطعة من القطع المكافئ  $y^2 = 8x$  يقطعها منه المستقيم  $x = 2$  إذا كانت الكثافة تتغير كتغير البعد عن هذا المستقيم . انظر الشكل ٦٨ - ٨ .

إن  $\delta(x, y) = 2 - x$  وبسبب التناظر  $\bar{y} = 0$  ومن النصف العلوي من الصفيحة لدينا

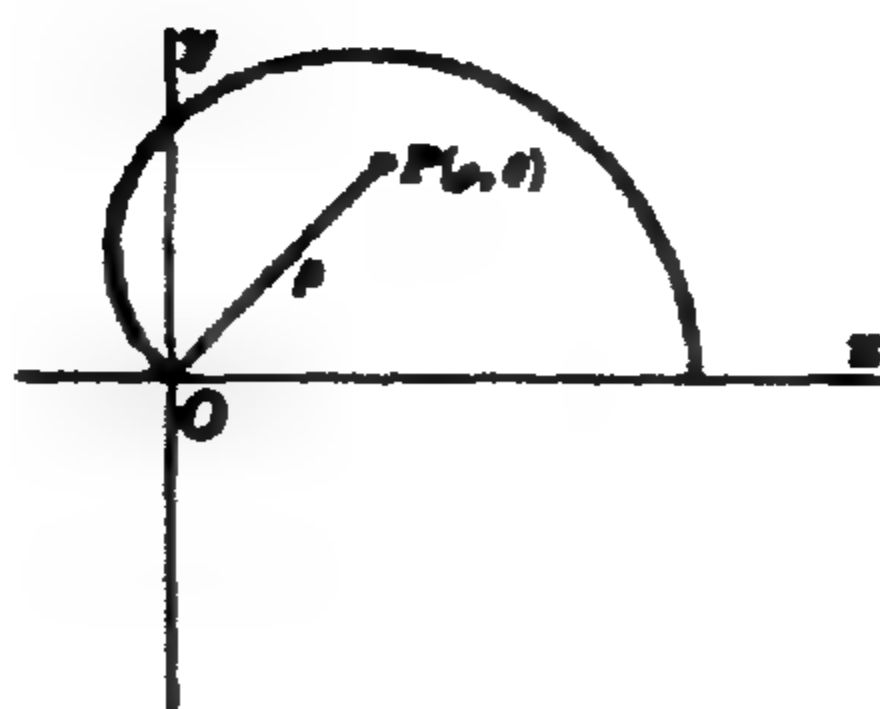
$$m = \iint_R \delta(x, y) dA = \int_0^4 \int_{-y/2}^{y/2} k(2-x) dx dy = k \int_0^4 \left( 2 - \frac{y^2}{4} + \frac{y^4}{128} \right) dy = \frac{64}{15} k,$$

$$M_x = \iint_R \delta(x, y) x dA = \int_0^4 \int_{-y/2}^{y/2} k(2-x)x dx dy = k \int_0^4 \left( \frac{4}{3} - \frac{y^2}{64} + \frac{y^4}{24 \cdot 64} \right) dy = \frac{128}{35} k$$

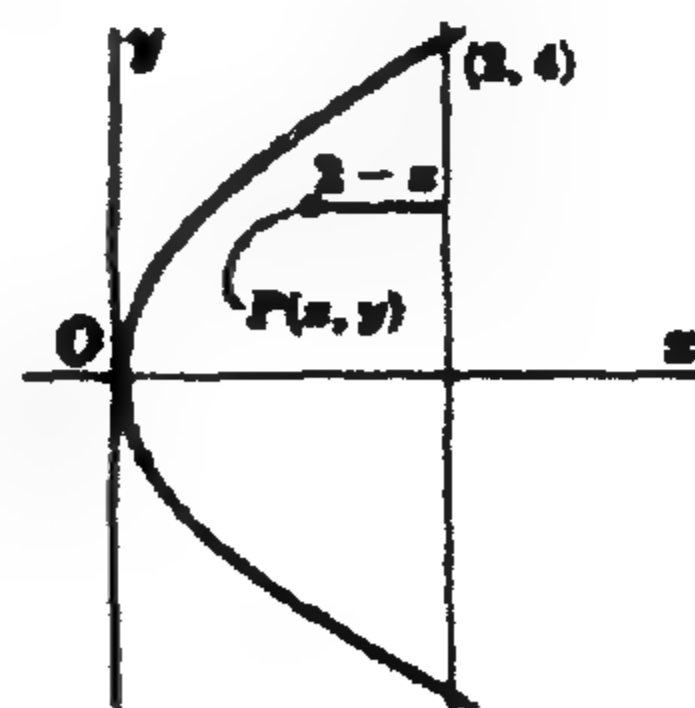
$$\text{ومن } \bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{6}{7} \text{ ومركز الكتلة هو النقطة } (6/7, 0)$$



شكل ٦٨ - ١



شكل ٦٨ - ٢



شكل ٦٨ - ٣

٥ - عين مركز كتلة صفيحة على شكل النصف العلوي من منحنى القلب  $\rho = 2(1 + \cos \theta)$  إذا كانت الكثافة تتغير كتغير البعد عن القطب . انظر الشكل ٦٨ - ٥ .

$$m = \iint_R \delta(\rho, \theta) dA = \int_0^\pi \int_0^{2(1+\cos \theta)} k\rho \cdot \rho d\rho d\theta = \frac{8}{3}k \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{20}{3}k\pi,$$

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R \delta(\rho, \theta) y dA = \int_0^\pi \int_0^{2(1+\cos \theta)} k\rho \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= 4k \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta = \frac{128}{5}k, \end{aligned}$$

$$M_y = \iint_R \delta(\rho, \theta) x dA = \int_0^\pi \int_0^{2(1+\cos \theta)} k\rho \cdot \rho \cos \theta \cdot \rho d\rho d\theta = 14k\pi$$

وعلى هذا فإن  $\left( \frac{21}{10}, \frac{96}{25\pi} \right)$  و مركز الكتلة هو النقطة  $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{21}{10}$  ،  $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{96}{25\pi}$  .

٦ - احسب عزم القصور الذاتي حول المحور  $x$  لصفيحة حدودها قوس واحد من المنحنى  $y = \sin x$  والمحور  $x$  إذا كانت الكثافة تتغير كتغير البعد عن المحور  $x$  . انظر الشكل ٦٨ - ٦ .

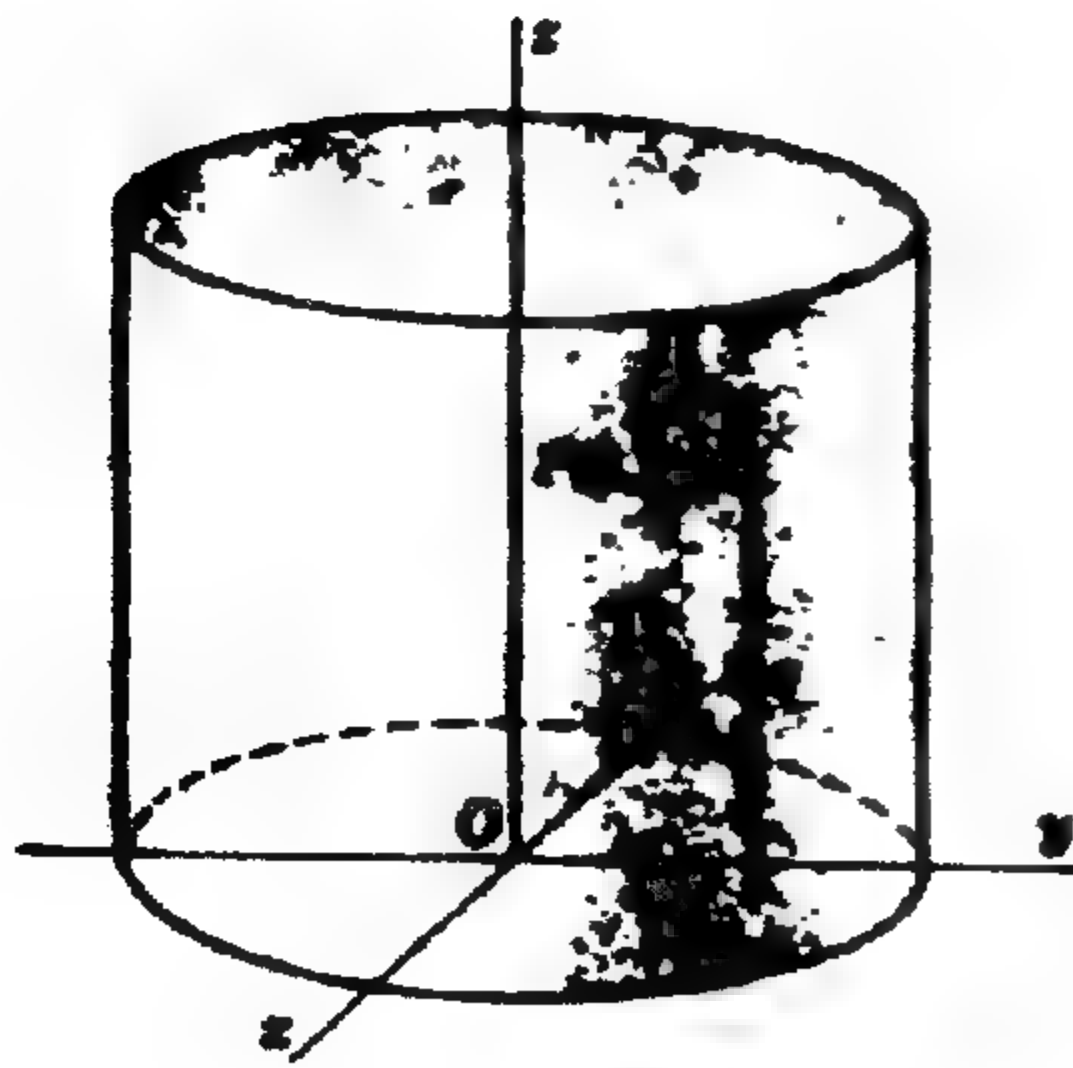
$$m = \iint_R \delta(x, y) dA = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} ky dy dx = \frac{1}{2}k \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{4}k\pi$$

$$I_x = \iint_R \delta(x, y) y^2 dA = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} ky \cdot y^2 \cdot dy dx = \frac{1}{4}k \int_0^\pi \sin^4 x dx = \frac{3}{32}k\pi = \frac{3}{8}m$$

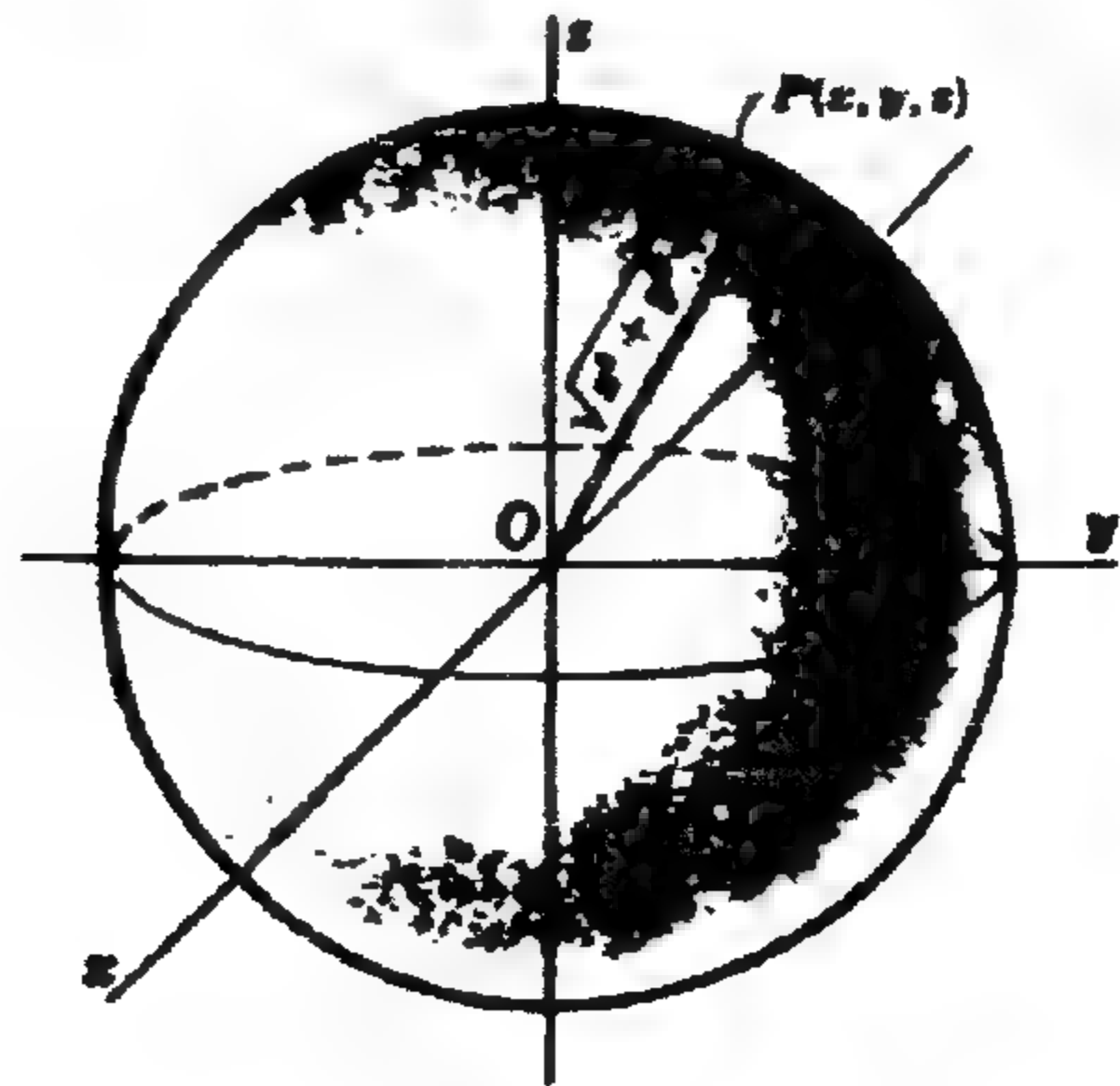
٧ - احسب كتلة كرة نصف قطرها  $r$  تتغير كثافتها كتغير مقلوب مربع البعد عن مركزها . انظر الشكل ٦٨ - ٧ .

لنأخذ الكرة كما في الشكل ٦٨ - ٧ فيكون  $\delta(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k}{\rho^2}$  و

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \delta(x, y, z) dV = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^r \frac{k}{\rho^2} \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 8kr \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi d\theta = 8kr \int_0^{\pi/2} d\theta = 4kr \text{ units} \end{aligned}$$



شكل ٦٨ - ٨



شكل ٦٨ - ٧



٨ - عين مركز الكتلة لاسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها  $r$  وارتفاعها  $h$  تتغير كثافتها كتغير البعد عن القاعدة .  
انظر الشكل ٦٨ - ٨ .

لنأخذ الاسطوانة كما في الشكل ٦٨ - ٨ فكون سادتها  $\rho = r$  ويكون الحجم الذي نحن بصدده هو ذاك الجزء من الاسطوانة الواقع بين المستويين  $z = 0$  ،  $z = h$  .

من الواضح أن مركز الكتلة يقع على المحور  $z$  .

$$m = \iiint_V \delta(z, \rho, \theta) dV = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^h kz \cdot \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = 2kh^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= kh^2 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} k\pi h^2,$$

$$M_z = \iiint_V \delta(z, \rho, \theta) z \, dV = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^h kz^2 \cdot \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \frac{4}{3} kh^3 \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \frac{2}{3} kh^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{3} k\pi h^3, \quad z = \frac{M_z}{m} = \frac{2}{3} h$$

مركز الكتلة إذن هو النقطة  $(0, 0, \frac{2}{3}h)$

### مسائل إضافية

٩ - احسب كتلة :

( أ ) قضيب مستقيم طوله  $a$  وتغير كثافته كتغير مربع البعد عن أحد طرفي القضيب .

ج :  $\frac{1}{3}ka^3$  units وحدة

( ب ) صفيحة على شكل مثلث قائم طولاه ضلعيه القائمين هما  $a$  و  $b$  إذا كانت الكثافة تتغير ك مجموع البعدين عن الضلعين القائمين .

ج :  $\frac{1}{6}kab(a+b)$  units

( ج ) صفيحة دائرية نصف قطرها  $a$  تتغير كثافتها كالبعد عن المركز .

ج :  $\frac{2}{3}ka^3$  units

( د ) صفيحة على شكل قطع ناقص  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  إذا كانت كثافتها تتغير ك مجموع البعدين عن المحورين .

ج :  $\frac{3}{8}kab(a+b)$  units وحدة

( هـ ) اسطوانة دائرية ارتفاعها  $h$  ونصف قطر قاعدتها  $a$  إذا كانت الكثافة تتغير ك ربع البعد عن محور الاسطوانة .

ج :  $\frac{1}{2}ka^4b\pi$  units

( و ) كرة نصف قطرها  $a$  تتغير كثافتها كالبعد عن مستوى قطري ثابت .

ج :  $\frac{1}{2}ka^4\pi$  units وحدة

(ز) مخروط دائري ارتفاعه  $b$  ونصف قطر قاعدته  $a$  تتغير كثافته كالبعد عن محور المخروط .

ج :  $\frac{1}{6}La^3b\pi$  units .

(ح) سطح كروي تتغير كثافته كالبعد عن مستو قطري ثابت .

ج :  $2ka^3\pi$  units .

١٠ — عين مركز الكتلة ل :

( أ ) مربع صفيحة المسألة ٩ ( ج ) :  $(3a/2\pi, 3a/2\pi)$  ح

(ب) ربع صفيحة دائرية نصف قطرها  $a$  تتغير كثافتها كالبعد عن أحد نصفي القطرين اللذين يحدها ( المحور  $x$  ) .

ج :  $(3a/8, 3a\pi/16)$

( ج ) مكعب طول ضلعه  $a$  تتغير كثافته ك مجموع الأبعاد عن ثلاثة من أضلاعه المتجاورة ( المحاور الاحداثية )

ج :  $(5a/8, 5a/9, 5a/9)$

( د ) ثمن كرة نصف قطرها  $a$  إذا كانت الكثافة تتغير كالبعد عن أحد وجهيها المستوى .

ج :  $(8a/15, 16a/15\pi, 16a/15\pi)$

( هـ ) مخروط دائري قائم ارتفاعه  $b$  ونصف قطر قاعدته  $a$  وكثافته متغيرة كالبعد عن قاعدته .

ج :  $(0, 0, 2b/5)$

١١ — احسب عزم القصور الذاتي ل :

( أ ) صفيحة مربعة طول ضلعها  $a$  بالنسبة لأحد أضلاعها بفرض أن الكثافة متغيرة كالبعد عن أحد طرفي ذلك الضلع .

ج :  $\frac{7}{15} a^2m$

(ب) صفيحة على شكل دائرة نصف قطرها  $a$  بالنسبة لمركزها بفرض أن كثافتها تتغير كربع البعد عن المركز .

ج :  $\frac{2}{3} a^2m$

( ج ) مكعب طول ضلعه  $a$  بالنسبة لأحد أضلاعه بفرض أن كثافته تتغير كربع البعد عن أحد طرفي ذلك الضلع .

ج :  $\frac{38}{45} a^2m$

( د ) مخروط دائري قائم ارتفاعه  $b$  ونصف قطر قاعدته  $a$  بالنسبة لمحوره بفرض أن الكثافة متغيرة كالبعد عن المحور .

ج :  $\frac{2}{5} a^2m$

( هـ ) مخروط ( د ) بفرض أن الكثافة متغيرة كالبعد عن القاعدة .

ج :  $\frac{1}{5} a^2m$

# الفصل التاسع والستون

## المعادلات التفاضلية

**المعادلة التفاضلية** • هي معادلة تحتوى على المشتقات أو التفاضلات ، مثلا :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0, \quad dy = (x + 2y) dx, \quad \dots$$

إن رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة تظهر فيها . فالأولى من المعادلتين السابقتين من الرتبة الثانية ، والثانية من الرتبة الأولى والمعادلتان من الدرجة الأولى

حل المعادلة التفاضلية هو أية علاقة بين المتغيرات خالية من المشتقات والتفاضلات وتحقق المعادلة وتجعلها مطابقة . والحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة  $n$  هو ذلك الحل الذى يحتوى أكبر عدد ( يساوى  $n$  ) من الثوابت الاختيارية الأساسية .

انظر المسائل ١ - ٣

**المعادلة من الرتبة الأولى والدرجة الأولى** : هي معادلة من الشكل  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$

وإذا كان لهذه المعادلة الشكل الخاص  $f_1(x) \cdot g_2(y) dx + f_2(x) \cdot g_1(y) dy = 0$  فإن متغيراتها قابلة للفصل وحلها العام هو :

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = C$$

انظر المسائل ٤ - ٦

نقول عن دالة  $f(x, y)$  إنها متجانسة من الدرجة  $n$  في متغيراتها إذا كان  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$  . ونقول

عن المعادلة  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  إنها متجانسة إذا كانت  $M(x, y)$  ،  $N(x, y)$  متجانستين من الدرجة نفسها وفى مثل هذه الحالة يحول التحويل :

$$y = vx, \quad dy = v dx + x dv$$

المعادلة المتجانسة إلى معادلة بالمتغيرين  $x$  و  $v$  القابلين للفصل .

انظر المسائل ٧ - ٩

**بعض المعادلات التفاضلية** يمكن حلها مباشرة إذا استفدنا من وجود تركيبات من الحدود القابلة للتكامل .

وقد يتغير أحيانا حل المعادلة مباشرة بالطريقة السابقة ولكن إذا حرم منها فى دالة فى  $x$  أو فى  $y$  نختارها بشكل ملائم فإنها تصبح قابلة للحل . نرى هذا المضروب العامل التكامل للمعادلة .

انظر المسائل ١٠ - ١٤

والمعادلة التفاضلية التي يقال عنها خطية من الرتبة الأولى  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$  حيث  $P$  و  $Q$  دالتان في  $x$  فقط لما عامل تكامل مثل  $\xi(x) = e^{\int P dx}$

انظر المسائل ١٥ - ١٧

تحويل كل معادلة من الشكل  $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$  حيث  $n \neq 0, 1$  و  $P, Q$  دالتان في  $x$  فقط ، إلى معادلة خطية بالتعويض :

$$y^{1-n} = z, \quad y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx}$$

انظر المسائل ١٨ - ١٩

### مسائل محلولة

١ - بين أن ( أ )  $y = 2e^x$  (ب)  $y = 3x$  (ج)  $y = C_1 e^x + C_2 x$  حيث  $C_1$  و  $C_2$  ثابتان اختياريان ، هي حلول للمعادلة التفاضلية  $y''(1-x) + y'x - y = 0$  .

( أ ) لنشتق  $y' = 2e^x$  مرتين فنحصل على  $y'' = 2e^x$  و  $y'' = 2e^x$  ثم نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على المتطابقة  $2e^x(1-x) + 2e^x x - 2e^x = 0$  .

(ب) لنشتق  $y' = 3x$  مرتين فنحصل على  $y' = 3$  و  $y'' = 0$  ثم نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على المتطابقة  $0(1-x) + 3x - 3x = 0$  .

(ج) لنشتق  $y' = C_1 e^x + C_2 x$  مرتين فنحصل على  $y' = C_1 e^x + C_2$  ،  $y'' = C_1 e^x$  ، ثم نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على المتطابقة  $C_1 e^x(1-x) + (C_1 e^x + C_2)x - (C_1 e^x + C_2 x) = 0$  .

إن الحل ( ج ) هو الحل العام للمعادلة التفاضلية لأنه يحقق المعادلة ويحتوي العدد الصحيح من الثوابت الاختيارية الأساسية . أما الحلان ( أ ) و (ب) فيسميان حلين خاصين لأنه يمكن الحصول على كل منهما بإعطاء قيم خاصة للثوابت الاختيارية .

٢ - شكل المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو :

$$y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (\text{ب}) \quad \text{و} \quad y = Cx^2 - x \quad (\text{أ})$$

( أ ) لنشتق  $y = Cx^2 - x$  مرة فنحصل على  $y' = 2Cx - 1$  وبجمل المعادلة بالنسبة لـ  $C$  نجد أن  $C = \frac{1}{2} \left( \frac{y' + 1}{x} \right)$  . وبالتعويض في العلاقة المفروضة (الحل العام) نحصل على  $y = \frac{1}{2} \left( \frac{y' + 1}{x} \right) x^2 - x$  أو  $y' x = 2y + x$  .

(ب) لنشتق  $y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$  ثلاث مرات فنحصل على  $y' = 3C_1 x + C_2$  ،  $y'' = 3C_1$  ،  $y''' = 0$  . ونجد أن  $y''' = x y''''$  هي المعادلة المطلوبة . لاحظ أن العلاقة المفروضة هي حل للمعادلة  $y''' = 0$  ولكنها ليست حلاً عاماً لأنها لا تحتوي سوى ثلاثة ثوابت اختيارية .

٣ - شكل المعادلة التفاضلية لجميع القطاعات المكافئة التي ينطبق محورها على المحور  $x$  .

إن لمجموعة القطاعات المكافئة المعادلة  $y'' = Ax + B$  حيث  $A$  و  $B$  ثابتان اختياريان . لنشتق مرتين فنحصل على  $2yy'' + 2y'^2 = 0$  ، والمعادلة  $2yy'' + 2y'^2 = 0$  هي المعادلة المطلوبة .

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^2}{xy^2(1+x^2)} = 0. \quad \text{المادة - ٤}$$

نكتب المعادلة بالشكل  $xy^2(1+x^2)dy + (1+y^2)dx = 0$  أو بالشكل  $\frac{y^2}{1+y^2}dy + \frac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$  والمتغيرات قابلة للفصل . إذن

$$\frac{y^2 dy}{1+y^2} + \frac{dx}{x} - \frac{x dx}{1+x^2} = 0,$$

$$\frac{1}{3} \ln |1+y^2| + \ln |x| - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) = c,$$

$$2 \ln |1+y^2| + 6 \ln |x| - 3 \ln (1+x^2) = 6c,$$

$$\ln \frac{x^3(1+y^2)^2}{(1+x^2)^3} = 6c \quad \text{و} \quad \frac{x^3(1+y^2)^2}{(1+x^2)^3} = e^{6c} = C.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}. \quad \text{المادة - ٥}$$

لدينا الآن  $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$ . ومنه  $\arctan y = \arctan x + \arctan C$  إذن

$$y = \tan(\arctan x + \arctan C) = \frac{x+C}{1-Cx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}. \quad \text{المادة - ٦}$$

$$\tan y = -\cot x + C \quad \text{و} \quad \frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\sin^2 x}, \quad \sec^2 y dy = \csc^2 x dx,$$

$$2xy dy = (x^2 - y^2) dx. \quad \text{المادة - ٧}$$

إن المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية . وإذا أجرينا التحويل  $y = vx$  نجد  $dy = vdx + x dv$  وتصبح المعادلة

$$\frac{2v dv}{1-3v^2} = \frac{dx}{x}, \quad \text{أو} \quad 2x \cdot vx (v dx + x dv) = (x^2 - v^2 x^2) dx$$

$$C^3 |x^3(1-3v^2)| = 1. \quad \text{أو} \quad -\frac{1}{3} \ln |1-3v^2| = \ln |x| + \ln c, \quad \ln |1-3v^2| + 3 \ln |x| + \ln C^3 = 0 \quad \text{ومن}$$

$$C(x^3 - 3xy^2) = 1. \quad \text{نجد} \quad v = y/x, \quad \text{استخدام} \quad \pm C^3 x^3(1-3v^2) = Cx^3(1-3v^2) = 1 \quad \text{وأخيرا}$$

$$x \sin \frac{y}{x} (y dx + x dy) + y \cos \frac{y}{x} (x dy - y dx) = 0. \quad \text{المادة - ٨}$$

إن هذه المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية . وإذا أجرينا التحويل  $y = vx$  فإن  $dy = vdx + x dv$  وتصبح المعادلة

$$x \sin v (vx dx + x^2 dv + vx dx) + vx \cos v (x^2 dv + vx dx - vx dx) = 0$$

$$\sin v (2v dx + x dv) + xv \cos v dv = 0, \quad \frac{\sin v + v \cos v}{v \sin v} dv + 2 \frac{dx}{x} = 0$$

$$xy \sin \frac{y}{x} = C. \quad \text{وبالتالي} \quad \ln |v \sin v| + 2 \ln |x| = \ln C^3, \quad x^2 \cdot v \cdot \sin v = C, \quad \text{إذن}$$

$$9 - \text{حل المعادلة} \quad (1 - 2v^2)(v dx + x dv) + 2v dx = 0,$$

إن هذه المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية . وتؤول بعد إجراء التحويل المفروض إلى :

$$\frac{1-2v^2}{v(3-2v^2)} dv + \frac{dx}{x} = 0, \quad \frac{dv}{3v} - \frac{4v dv}{3(3-2v^2)} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{1}{3} \ln |v| + \frac{1}{3} \ln |3-2v^2| + \ln |x| = \ln C, \quad \ln |v| + \ln |3-2v^2| + 3 \ln |x| = \ln C'$$

$$\text{ومنه} \quad vx^3(3-2v^2) = C. \quad \text{وبالتالي} \quad vx^3(3-2v^2) = C$$

$$10 - \text{حل المعادلة} \quad (x^3 + y) dx + (y^3 + x) dy = 0.$$

$$\text{لتكامل} \quad x^3 dx + (y dx + x dy) + y^3 dy = 0, \quad \text{حدا حدا فنحصل على} \quad \frac{x^4}{4} + xy + \frac{y^4}{4} = C.$$

$$11 - \text{حل المعادلة} \quad (x + e^{-x} \sin y) dx - (y + e^{-x} \cos y) dy = 0.$$

$$\text{لتكامل} \quad x dx - y dy - (e^{-x} \cos y dy - e^{-x} \sin y dx) = 0, \quad \text{حدا حدا فنحصل على}$$

$$\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 - e^{-x} \sin y = C$$

$$12 - \text{حل المعادلة} \quad x dy - y dx = 2x^3 dx.$$

إن التركيب  $x dy - y dx$  يوحى إلينا بالملاحظة  $\frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$  . لذا نضرب المعادلة المقروضة

$$\text{بـ} \quad \xi(x) = \frac{1}{x^3}, \quad \text{فنجـد} \quad \frac{x dy - y dx}{x^2} = 2x dx \quad \text{وبالتالي} \quad \frac{y}{x} = x^2 + C \quad \text{أو} \quad y = x^3 + Cx.$$

$$13 - \text{حل المعادلة} \quad x dy + y dx = 2x^2 y dx.$$

إن التركيب  $x dy + y dx$  يوحى إلينا بالملاحظة  $d(\ln xy) = \frac{x dy + y dx}{xy}$  . لذا نضرب المعادلة المقروضة بـ

$$\ln |xy| = x^2 + C. \quad \text{ومنـه} \quad \frac{x dy + y dx}{xy} = 2x dx \quad \text{فنجـد} \quad \xi(x, y) = \frac{1}{xy}.$$

$$14 - \text{حل المعادلة} \quad x dy + (3y - e^x) dx = 0.$$

نضرب طرفي المعادلة بـ  $\xi(x) = x^2$  فنحصل على  $x^2 dy + 3x^2 y dx = x^2 e^x dx$ .

$$\text{ومنـه} \quad x^2 y = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

$$15 - \text{حل المعادلة} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = 6x^2.$$

$$\text{حدا} \quad P(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ومنـه} \quad \int P(x) dx = \ln x^2, \quad \text{وبالتالي} \quad \xi(x) = e^{\ln x^2} = x^2.$$

لذا نضرب المعادلة المقروضة بـ  $\xi(x) = x^2$  فنحصل على  $x^2 dy + 2x y dx = 6x^3 dx$ . ومنه  $x^2 y = x^6 + C$ .

ملاحظة ١ : إن الحدود الواقعة في الطرف الأيسر من المعادلة بعد ضربها بالعامل التكاملي تشكل تركيباً قابلاً للتكامل.



ملاحظة ٢ - ليس العامل التكامل لمعادلة مفروضة جيدا ، في المسألة الحالية نجد أن الخ و  $x^2, 3x^2, \frac{1}{2}x^2$  جميعها عوامل تكاملية ، ولذلك فإننا نختار أبسط التكاملات الخاصة لـ  $P(x) dx$  بدلا من أن نختار التكامل العام

$$\ln x^2 + \ln C = \ln Cx^2.$$

$$\tan x \frac{dy}{dx} + y = \sec x. \quad \text{حل المعادلة ١٦}$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = \csc x, \quad \int P(x) dx = \int \cot x dx = \ln |\sin x| \quad \text{بما أن}$$

$$\xi(x) = e^{\int \cot x dx} = |\sin x|.$$

$$\sin x \left( \frac{dy}{dx} + y \cot x \right) = \sin x \csc x, \quad \sin x dy + y \cos x dx = dx, \quad \text{ومن ثم}$$

$$y \sin x = x + C. \quad \text{ومن}$$

$$\frac{dy}{dx} - xy = x. \quad \text{حل المعادلة ١٧}$$

$$\xi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad \text{وبالتالي} \quad \int P(x) dx = -\frac{1}{2}x^2, \quad \text{وهنا} \quad P(x) = -x$$

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} dy - xye^{-\frac{1}{2}x^2} dx = xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \quad ye^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C, \quad \text{إذن}$$

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1. \quad \text{ومن}$$

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^2. \quad \text{حل المعادلة ١٨}$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n, \quad \text{حيث } n=2.$$

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + y^{-1} = x. \quad \text{نستخدم التعويض } y^{-1} = z, \quad y^{-2} \frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}.$$

$$\frac{dz}{dx} - z = -x. \quad \text{أو} \quad -\frac{dz}{dx} + z = x \quad \text{ومن}$$

$$\xi(x) = e^{\int -1 dx} = e^{-x} = e^{-x}, \quad \text{إذن} \quad e^{-x} dx - ze^{-x} dx = -xe^{-x} dx \quad \text{و}$$

$$\frac{1}{y} = x + 1 + Ce^x. \quad \text{وبما أن } z = y^{-1} \text{ فإنه يكون أخيرا:} \quad ze^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} + C.$$

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^2 \sec x. \quad \text{حل المعادلة ١٩}$$

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + y^{-1} \tan x = \sec x. \quad \text{نكتب المعادلة بالشكل}$$

$$\frac{dz}{dx} - 2z \tan x = -2 \sec x. \quad \text{ونأخذ المعادلة الشكل} \quad y^{-2} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dz}{dx} \quad \text{نستخدم التعويض } y^{-2} = z \text{ فيكون}$$

$$\xi(x) = e^{-\int 2 \tan x dx} = \cos^2 x. \quad \text{إن العامل التكامل هو}$$

$$\cos^2 x dz - 2z \cos x \sin x dx = -2 \cos x dx, \quad z \cos^2 x = -2 \sin x + C,$$

$$\frac{\cos^2 x}{y^2} = -2 \sin x + C. \quad \text{ومن}$$

٢٠ - أطلقت رصاصة على كومة رمل . فإذا فرضنا أن تباطؤها يساوى الجذر التربيعى لسرعة اختراقها فإن متى تدخل في الرمل قبل أن تتوقف إذا فرضنا أن سرعتها عند دخول الكومة تساوى  $49 \text{ ms}^{-1}$  م .  
لتكن  $v$  سرعة الرصاصة بعد  $t$  ثانية من اصطدامها بالكومة .

$$\text{عندئذ يكون التباطؤ } -\frac{dv}{dt} = \sqrt{v} \text{ ومنه } \frac{dv}{\sqrt{v}} = -dt \text{ أى } 2\sqrt{v} = -t + C$$

$$\text{عندما } t = 0, v = 49, C = 2\sqrt{49} = 14 \text{ . وعلى هذا فإن } 2\sqrt{v} = -t + 14$$

وهذا هو القانون الذى يحكم حركة الرصاصة . فإذا جعلنا  $v = 0$  نجد  $t = 14$  والرصاصة تتقدم مدة  $14 \text{ sec}$  قبل أن تقف .

٢١ - يحتوى خزان  $400 \text{ litres}$  من الماء المالح مذاب فيها  $100 \text{ kg}$  من الملح فإذا انساب فيه ماء يحتوى  $\frac{1}{5} \text{ kg}$  من الملح في كل لتر بمعدل  $12 \text{ litres/minute}$  وجعلنا المزيج متجانسا بالتحريك الدائم وتركنا هذا المزيج ينسكب من الخزان بالمعدل السابق ذاته ، فامى كمية الملح الموجودة في الخزان بعد  $90 \text{ minutes}$  .

لنرمز بـ  $q$  لوزن الملح بالكيلو جرامات ، الموجودة في الخزان في نهاية اللحظة  $t \text{ minutes}$  . عندئذ يكون  $\frac{dq}{dt}$  معدل تغير كمية الملح في اللحظة  $t$  .

وبما أنه يدخل إلى الخزان خلال دقيقة واحدة  $\frac{1}{2} \text{ kg}$  من الملح ويخرج  $0.03q \text{ kg}$  فإن  $\frac{dq}{dt} = 1.5 - 0.03q$

$$\text{ومنه } \frac{dq}{1.5 - 0.03q} = dt, \text{ وبالتالى } \frac{\ln(0.03q - 1.5)}{0.03} = -t + C$$

$$\text{ولكن عند اللحظة } t = 0 \text{ فإن } q = 100 \text{ إذن } C = \frac{\ln 1.5}{0.03}$$

$$\text{وبالتالى } \ln(0.03q - 1.5) = -0.03t + \ln 1.5, 0.02q - 1 = e^{-0.03t},$$

$$\text{ومنه } q = 50 + 50e^{-0.03t} \text{ وعندما } t = 90 \text{ نجد : } q = 50 + 50e^{-2.7} = 53.36 \text{ kg.}$$

٢٢ - يتحول سكر القصب في الماء ، تحت شروط معينة ، إلى سكر العنب بمعدل يتناسب مع الكمية غير المحولة في كل لحظة . فإذا تحول  $8 \text{ grams}$  من أصل  $75 \text{ grams}$  كانت موجودة عند اللحظة  $t = 0$  ، وذلك خلال  $30 \text{ minutes}$  الأولى فأوجد الكمية المتحولة خلال  $1 \frac{1}{2} \text{ hours}$  .  
لنرمز بـ  $q$  لكمية المحولة خلال  $t \text{ minutes}$  .

$$\text{عندئذ } \frac{dq}{dt} = k(75 - q) \text{ ومنه } \frac{dq}{75 - q} = k dt \text{ وبالتالى } (75 - q) = -kt + C$$

$$\text{عندما } t = 0 \text{ كانت } q = 0 \text{ ومنه } C = \ln 75 \text{ إذن } \ln(75 - q) = -kt + \ln 75$$

$$\text{وعندما أصبحت } t = 30 \text{ كانت } q = 8 \text{ ومنه } 30k = \ln 75 - \ln 67 \text{ و } k = 0.0038 \text{ إذن } q = 75(1 - e^{-0.114})$$

$$\text{وعلى هذا إذا وضعنا } t = 90 \text{ نجد : } q = 75(1 - e^{-0.342}) = 21.6 \text{ grams}$$

### مسائل إضافية

٢٢ - أوجد المعادلة التفاضلية التى حلها العام :

$$\begin{aligned} (أ) \quad y &= C_1 + C_2x + C_3x^2 & (ب) \quad y &= C_1e^x + C_2e^{2x} & (ج) \quad y &= C_1\sin x + C_2\cos x & (د) \quad y &= C_1x^2 + C_2x + C_3 \\ (هـ) \quad y &= C_1e^{3x} + C_2e^{4x} & (و) \quad y &= C_1e^{3x} + C_2e^{4x} & (ز) \quad y &= C_1e^{3x} \cos(3x + C_2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} (أ) & 4x^2y = 2x^2y' + (y')^2 & (ب) & xy' = 2(y-1) \\ (ج) & y''' = 0 & (د) & y' = (y - xy')^4 \\ (هـ) & y'' + y = 0 & (و) & xy' + y = 3x^2 \\ (ز) & y'' - 3y' + 2y = 0 & (ح) & y'' - 2y' + 10y = 0 \end{array}$$

٢٤ - حل المعادلات التفاضلية :

$y^3 = 4x^3 + C$	: ج	$y dy - 4x dx = 0$	(أ)
$2y^3 = 3x^3 + C$	: ج	$y^3 dy - 3x^3 dx = 0$	(ب)
$x^2 - xy + 2y = Cx^2y$	: ج	$x^2y' = y^3(x-4)$	(ج)
$xy - y^3 + 2x^2 = C$	: ج	$(x-2y) dy + (y+4x) dx = 0$	(د)
$y^3 + \ln y  = x^3 + C$	: ج	$(2y^2+1)y' = 3x^2y$	(هـ)
$\ln xy  = x + 2y + C$	: ج	$xy'(2y-1) = y(1-x)$	(و)
$x^3 - y^3 = Cx$	: ج	$(x^2+y^2) dx = 2xy dy$	(ز)
$x^3 - 2xy - y^3 = C$	: ج	$(x+y) dy = (x-y) dx$	(ح)
$y = Ce^{-y/x}$	: ج	$x(x+y) dy - y^2 dx = 0$	(ط)
$e^{y/x} + \ln Cx  = 0$	: ج	$x dy - y dx + xe^{-y/x} dx = 0$	(ي)
$y = (Ce^x - 1)e^{2x}$	: ج	$dy = (3y + e^{2x}) dx$	(ك)
$2x^3y^3 = 3x^3 + C$	: ج	$x^2y^3 dy = (1 - xy^2) dx$	(ل)

٢٥ - يقابل المستقيم المماس والمستقيم المماسى لمنحنى عند النقطة  $P(x, y)$  المحاور  $x$  في  $N$  و  $T$  على الترتيب المحاور  $y$  في  $S$  و  $M$  على الترتيب .

أوجد مجموعة المنحنيات التي تحقق الشرط

$$\begin{array}{l} (أ) \quad TP = PS, \quad (ب) \quad NM = MP, \quad (ج) \quad TP = OP, \quad (د) \quad NP = OP \\ \text{ج : } (أ) \quad xy = C, \quad (ب) \quad 2x^2 + y^2 = C, \quad (ج) \quad xy = c, y = Cx, \quad (د) \quad x^2 \pm y^2 = C \end{array}$$

٢٦ - حل المسألة ٢١ بفرض أن ماء نقياً ينسكب في الخزان بمعدل 12 litres/minute ويتدفق المزاج منه بالمعدل ذاته.

ج : 6.72 kg .

٢٧ - حل المسألة ٢٦ بفرض أن المزاج يتدفق من الخزان بمعدل 16 litres/minute .

$$\text{إرشاد : } \frac{dq}{dt} = - \frac{4q}{100-t} \quad \text{ج : } 0.01 \text{ kg}$$

# الفصل السبعون

## المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

اعتبر الأنواع التالية من المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \quad (1) \quad \text{انظر المسألة ١}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad (2) \quad \text{انظر المسألتين ٢ - ٣}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y) \quad (3) \quad \text{انظر المسألتين ٤ - ٥}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = R, \quad (4) \quad \text{حيث } P \text{ و } Q \text{ ثابتان أما } R \text{ فهو إما ثابت أو دالة في } x \text{ فقط.}$$

إذا كان للمعادلة  $m^2 + Pm + Q = 0$  حفران مختلفان  $m_1$  و  $m_2$  فإن  $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$  هو الحل العام للمعادلة  $\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0$  أما إذا كان الجذران متطابقين فإن الحل العام هو  $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$ . يسمى الحل العام للمعادلة  $\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0$  الدالة المتتممة للمعادلة  $\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = R(x)$ . وإذا حقق الشرط  $y = f(x)$  المعادلة الأخيرة فإن الحل العام لهذه المعادلة يساوي مجموع الدالة المتتممة مع  $f(x)$ .

## مسائل محلولة

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x e^x + \cos x. \quad \text{١ - حل المعادلة}$$

$$\frac{dy}{dx} = \int (x e^x + \cos x) dx = x e^x - e^x + \sin x + C_1, \quad \text{هنا} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = x e^x + \cos x, \quad \text{و}$$

$$y = x e^x - 2e^x - \cos x + C_1 x + C_2$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = a. \quad \text{٢ - حل المعادلة}$$

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \text{فليكون} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \quad \text{ونأخذ المعادلة المفروضة الشكل} \quad x^2 \frac{dp}{dx} + xp = a \quad \text{أو} \quad x \frac{dp}{dx} + p = \frac{a}{x} \quad \text{لنضع}$$

$$y = \frac{1}{2} a \log^2 |x| + C_1 \ln |x| + C_2 \quad \text{و} \quad xp = a \ln |x| + C_1, \quad x \frac{dy}{dx} = a \ln |x| + C_1, \quad dy = a \ln |x| \frac{dx}{x} + C_1 \frac{dx}{x}, \quad \text{و}$$

٢ - حل المعادلة  $xy'' + y' + x = 0$ .

لنضع  $\frac{dy}{dx} = p$  فيكون  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$  وتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$x \frac{dp}{dx} + p + x = 0 \quad \text{أو} \quad x dp + p dx = -x dx$$

وبالتكامل نجد  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x + \frac{C_1}{x}$  ، وأخيرا  $xy = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$  ، وأخيرا  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{C_1}{x} + C_2$

٤ - حل المعادلة  $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0$ .

بما أن  $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y'y''$  فإننا نضرب المعادلة المفروضة في  $2y'$  فنحصل على :

$$2y'y'' = 4yy', \quad y^2 = 4 \int yy' dx = 4 \int y dy = 2y^2 + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y^2 + C_1}, \quad \frac{dy}{\sqrt{2y^2 + C_1}} = dx, \quad \ln|\sqrt{2}y + \sqrt{2y^2 + C_1}| = \sqrt{2}x + \ln C_2$$

$$\sqrt{2}y + \sqrt{2y^2 + C_1} = C_2 e^{\sqrt{2}x} \quad \text{وأخيرا}$$

٥ - حل المعادلة  $y'' = -1/y^3$

لنضرب المعادلة في  $2y'$  فنحصل على  $2y'y'' = -\frac{2y'}{y^3}$  ومنه :

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C_1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+C_1y^2}}{y}, \quad \frac{y dy}{\sqrt{1+C_1y^2}} = dx, \quad \sqrt{1+C_1y^2} = C_2x + C_3$$

$$(C_2x + C_3)^2 - C_1y^2 = 1 \quad \text{وأخيرا}$$

٦ - حل المعادلة  $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ .

هنا  $m^2 + 3m - 4 = 0$  و  $m = 1, -4$  والحل العام هو  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$ .

٧ - حل المعادلة  $\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} = 0$ .

هنا  $m^2 + 3m = 0$  و  $m = 0, -3$  والحل العام هو  $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$ .

٨ - حل المعادلة  $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0$ .

هنا  $m^2 - 4m + 13 = 0$  والجذور هما  $m_1 = 2 + 3i, m_2 = 2 - 3i$  والحل العام هو

$$y = C_1 e^{(2+3i)x} + C_2 e^{(2-3i)x} = e^{2x} (C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix})$$

وبما أن  $e^{3ix} = \cos 3x + i \sin 3x$  ، فإن  $e^{-3ix} = \cos 3x - i \sin 3x$  ،

وبالتالي يمكن وضع الحل بالشكل

$$\begin{aligned} y &= e^{2x} \{C_1 (\cos 3x + i \sin 3x) + C_2 (\cos 3x - i \sin 3x)\} \\ &= e^{2x} \{(C_1 + C_2) \cos 3x + i(C_1 - C_2) \sin 3x\} \\ &= e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x) \end{aligned}$$

$$9 - \text{حل المعادلة } \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

$$\text{هنا } m^2 - 4m + 4 = 0 \text{ و } m = 2, 2 \text{ والحل العام هو } y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

$$10 - \text{حل المعادلة } \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = x^2.$$

$$\text{إن الدالة المتبعة ، استنادا إلى المسألة ٦ ، هي } y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}.$$

لإيجاد تكامل خاص للمعادلة نلاحظ أن الطرف الأيمن هو  $R(x) = x^2$  ولهذا الشكل للطرف الأيمن فإننا نقترح حلا خاصا يحتوي على  $x^2$  وربما حدودا أخرى تنتج بالاشتقاق المتتالي.

سنفرض أن الحل الخاص من الشكل  $y = Ax^2 + Bx + C$  حيث  $A, B, C$  ثوابت ينبغي تعيينها ، لنفرض  $y = Ax^2 + Bx + C, y' = 2Ax + B, y'' = 2A,$

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2, \quad -4Ax^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = x^2$$

$$\text{وبما أن هذه متطابقة في } x \text{ فإن } -4A = 1, 6A - 4B = 0, 2A + 3B - 4C = 0.$$

$$\text{ومنه } A = -\frac{1}{4}, B = -\frac{3}{8}, C = -\frac{13}{32} \text{ والحل الخاص هو } y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}.$$

$$\text{والحل العام إذن هو : } y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}.$$

$$11 - \text{حل المعادلة } \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \cos x.$$

$$\text{هنا } m^2 - 2m - 3 = 0 \text{ والجذران هما } m = -1, 3 \text{ والدالة المتبعة هي } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} \text{ ولحل الخاص}$$

فن الطرف الأيمن للمعادلة التفاضلية نقترح الحل الخاص من الشكل  $A \cos x + B \sin x$  وبالتعويض في المعادلة التفاضلية بـ  $y = A \cos x + B \sin x, y' = -A \sin x + B \cos x, y'' = -A \cos x - B \sin x$  فنحصل على

$$(-A \cos x - B \sin x) - 2(B \cos x - A \sin x) - 3(A \cos x + B \sin x) = \cos x$$

$$-2(2A + B) \cos x + 2(A - 2B) \sin x = \cos x$$

$$\text{ومنه } -2(2A + B) = 1, A - 2B = 0 \text{ وبالتالي } A = -\frac{1}{6}, B = -\frac{1}{10}.$$

$$\text{والحل العام هو : } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{6} \cos x - \frac{1}{10} \sin x.$$

$$12 - \text{علق وزن بزئبرك يتحرك لأعلى ولأسفل . والمعادلة التفاضلية لهذه الحركة هي } \frac{d^2s}{dt^2} + 16s = 0 \text{ حيث } s$$

هو مط الزئبرك عند اللحظة  $t$

$$\text{فإذا كان } s = 2 \text{ و } \frac{ds}{dt} = 1 \text{ في اللحظة } t = 0 \text{ فلأوجد } s \text{ بدلالة } t.$$

$$\text{هنا } m^2 + 16 = 0 \text{ و } m = \pm 4i \text{ والحل العام هو } s = A \cos 4t + B \sin 4t.$$

$$\text{وعند } t = 0 \text{ فإن } s = 2 = A \text{ ومنه } s = 2 \cos 4t + B \sin 4t.$$

$$\text{وعند } t = 0 \text{ فإن } ds/dt = 1 = -8 \sin 4t + 4B \cos 4t = 4B \text{ ومنه } B = \frac{1}{4}.$$

$$\text{والحل المطلوب هو : } s = 2 \cos 4t + \frac{1}{4} \sin 4t.$$

$$13 - \text{نفرض أن التيار الكهربائي في دائرة حثية يعطى } \frac{d^2I}{dt^2} + 4\frac{dI}{dt} + 2504I = 110. \text{ فإذا فرضنا أنه}$$

$$I = 0 \text{ و } \frac{dI}{dt} = 0 \text{ عندما } t = 0 \text{ فلأوجد } I \text{ بدلالة } t.$$



هنا  $m^2 + 4m + 2504 = 0$  ومنه  $m = -2 + 50i, -2 - 50i$  والدالة المتسمة هي  $e^{-2t}(A \cos 50t + B \sin 50t)$ .

والمعادلة الحل الخاص  $I = 110/2504 = .044$ .

والحل العام هو  $I = e^{-2t}(A \cos 50t + B \sin 50t) + .044$ .

وعند  $t = 0$  يكون  $I = 0 = A + .044$  ومنه  $A = -.044$ .

كذلك عندما  $t = 0$  يكون  $\frac{dI}{dt} = 0 = e^{-2t} [(-2A + 50B) \cos 50t - (2B + 50A) \sin 50t] = -2A + 50B$ .

ومنه  $B = -.0018$  والملاقة المطلوبة هي  $I = -e^{-2t}(0.044 \cos 50t + 0.0018 \sin 50t) + 0.044$ .

١٤ - نزلق سلسلة طولها 4 m من سقف منبسط مبتدئة من وضع تكون فيه قطعة من السلسلة طولها 1 m مدلاة من طرف السقف. أوجد بإهمال الاحتكاك (أ) سرعة انزلاق السلسلة عندما تنفصل عن السقف (ب) الزمن اللازم لذلك.

لنرمز بـ  $s$  لطول جزء السلسلة المتدل من طرف السقف في اللحظة  $t$ .

(أ) إن القوة التي تسبب إنزلاق السلسلة من على السطح هو وزن الجزء المتدل وبما أن القوة تساوى حاصل ضرب الكتلة في المعجلة فإن  $ms'' = \frac{1}{4}mg$  ومنه  $s'' = \frac{1}{4}gs$ .

وبالتالي  $2s's'' = \frac{1}{2}gss'$  بالتكامل نجد  $(s')^2 = \frac{1}{4}gs^2 + C_1$ .

وفي اللحظة  $t = 0$  يكون  $s = 1, s' = 0$  إذن  $C_1 = -\frac{1}{4}g$  و  $s' = \frac{1}{2}\sqrt{g} \cdot \sqrt{s^2 - 1}$ .

وعندما يصبح  $s = 4$  يكون  $s' = \frac{1}{2}\sqrt{15g}$  ms<sup>-1</sup>.

(ب) إن  $\frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} = \frac{1}{2}\sqrt{g} dt$  ومنه  $\ln|s + \sqrt{s^2 - 1}| = \frac{1}{2}\sqrt{g}t + C_2$ .

وبما أن  $s = 1$  عندما  $t = 0$  فإن  $C_2 = 0$  وبالتالي  $\ln(s + \sqrt{s^2 - 1}) = \frac{1}{2}\sqrt{g}t$ .

وإذا وضعنا  $s = 4$  نجد :  $t = \frac{2}{\sqrt{g}} \ln(4 + \sqrt{15})$ .

١٥ - زورق كتلته 750 kg وسرعته عندما يتوقف محركه (في اللحظة  $t = 0$ ) تساوى 6 ms<sup>-1</sup>. فإذا فرضنا أن مقاومة الماء متناسبة مع سرعة الزورق وأنها 900 N عند اللحظة  $t = 0$ . فما هي المسافة التي يقطعها الزورق إلى أن تصبح سرعته 1.5 ms<sup>-1</sup>.

لنرمز بـ  $s$  للمسافة التي يقطعها الزورق بعد  $t$  sec بعد توقف المحرك.

$$ms'' = -ks' \text{ أو } s'' = -ks'$$

لتعيين  $k$  نلاحظ أن  $s' = 6$  عندما  $t = 0$  وأن  $s''$  تساوى  $\frac{\text{القوة}}{\text{الكتلة}}$  أي أنها تساوى  $-\frac{900}{750}$  ومنه  $k = \frac{1}{s}$ .

وعمل هذا فإن  $s'' = \frac{ds'}{dt} = -\frac{s'}{s}$  وبالتكامل نجد  $\ln s = -\frac{1}{6}t + C_1$  أي أن  $s = C_1 e^{-\frac{1}{6}t}$ .

وعندما  $t = 0$  فإن  $s = 6$  إذن  $s = \frac{ds}{dt} = 6e^{-\frac{1}{6}t}$  و  $C_1 = 6$ .

ومنه  $s = -30e^{-\frac{1}{6}t} + C_2$ .

وعند  $t = 0$  فإن  $s = 0$  و  $C_2 = 30$  و  $s = 30(1 - e^{-\frac{1}{6}t})$ .

وأخيرا عند  $s = 1.5 = 6e^{-\frac{1}{6}t}$  يكون :  $s = 30(1 - \frac{1}{4}) = 22.5$ .

## مسائل اختيارية

$y = \frac{1}{2}x^2 + x^2 + C_1x + C_2$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x + 2$	- ١٦
$y = e^{2x} + e^{-2x} + C_1x + C_2$	: ج	$e^{2x} \frac{d^2y}{dx^2} = 4(e^{4x} + 1)$	- ١٧
$y = \sin 3x + C_1x + C_2$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} = -9 \sin 3x$	- ١٨
$y = x^2 + C_1x^4 + C_2$	: ج	$x \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 4x = 0$	- ١٩
$y = x^2/3 + C_1e^x + C_2$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2x - x^2$	- ٢٠
$y = x^2 + C_1x^2 + C_2$	: ج	$x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 3x^2$	- ٢١
$y = C_1e^x + C_2e^{2x}$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$	- ٢٢
$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$	- ٢٣
$y = C_1 + C_2e^x$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$	- ٢٤
$y = C_1xe^x + C_2e^x$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$	- ٢٥
$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$	- ٢٦
$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$	- ٢٧
$y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$	- ٢٨
$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 2x + 5$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 3y = 6x + 23$	- ٢٩
$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + e^{2x}/13$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{2x}$	- ٣٠
$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^{2x} + \frac{x}{9} + \frac{2}{27}$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 9y = x + e^{2x}$	- ٣١
$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x$	: ج	$\frac{d^2y}{dx^2} - y = \cos 2x - 2 \sin 2x$	- ٣٢

٣٣ - يتحرك جسم كتلته  $m$  في وسط تتناسب مقاومته مع سرعة الجسم . فإذا كان هذا الجسم يخضع كذلك إلى قوة جذب متناسبة مع الإزاحة فأوجد معادلة الحركة إذا كان  $s = 0$  و  $s' = v_0$  عند اللحظة  $t = 0$

إرشاد : هنا  $m \frac{d^2s}{dt^2} = -k_1 \frac{ds}{dt} - k_2 s$  أو  $\frac{d^2s}{dt^2} + 2b \frac{ds}{dt} + c^2 s = 0$  بفرض  $b > 0$

$$s = v_0 t e^{-bt}$$

ج : إذا كان  $c^2 = b^2$  فإن

$$s = \frac{v_0}{\sqrt{c^2 - b^2}} e^{-bt} \sin \sqrt{c^2 - b^2} t$$

وإذا كان  $c^2 < b^2$  فإن

$$s = \frac{v_0}{2\sqrt{b^2 - c^2}} (e^{-(b-\sqrt{b^2-c^2})t} - e^{-(b+\sqrt{b^2-c^2})t})$$

أما إذا كان  $c^2 > b^2$  فإن

# CALCULUS

## Glossary

### Chapter 1

Variable  
Function  
Set  
Real  
Real number  
Rational  
Rational number  
Common fraction  
Integer  
Irrational number  
Imaginary number  
Absolute  
Number scale  
Finite Interval  
Open interval  
End point  
Closed interval  
Infinite interval  
Inequalities  
Dependent variable  
Independent variable  
Single - valued  
Multi - valued  
Double - valued  
Domain of definition  
Sequence  
Deleted- neighbourhood

## المصطلحات

### الفصل الأول

متغير  
دالة  
مجموعة  
حقيقي  
عدد حقيقي  
قياسي  
عدد قياسي  
كسر عادي  
صحیح  
عدد غير قياسي  
عدد تخيل  
مطلق  
سلم عددي  
فترة محددة  
فترة مفتوحة  
نقطة نهاية  
فترة منغلقة  
فترة غير محددة  
متباينات  
متغير مستقل  
متغير غير مستقل  
وحد القيمة  
تعدد القيمة  
ثنائي القيمة  
ميز ( مجال ) التعريف  
متتابعة  
جوار محذوف

<b>Chapter 2</b>	<b>الفصل الثاني</b>
Limit	نهاية
Exist	موجود
Infinity	اللانهاية
Statement	تعريف
<b>Chapter 3</b>	<b>الفصل الثالث</b>
Continuous function	دالة متصلة
Discontinuous function	دالة غير متصلة ( منقطعة )
Polynomial	متعدد حدود
Denominator	مقام
Numerator	بسط
<b>Chapter 4</b>	<b>الفصل الرابع</b>
Derivative	مشتقة
Increment	تزايد
Instantaneous	لحظي
Instantaneous rate of change	معدل التغير اللحظي
<b>Chapter 5</b>	<b>الفصل الخامس</b>
Algebraic function	دالة جبرية
Inverse function	دالة عكسية
Function of a function	دالة الدالة
Higher derivative	مشتقات عليا
<b>Chapter 6</b>	<b>الفصل السادس</b>
Implicit differentiation	اشتقاق ضمني
Implicit function	دالة ضمنية
<b>Chapter 7</b>	<b>الفصل السابع</b>
Tangent	ماس
Normal	عمود
Angle of intersection	زاوية تقاطع
Subtangent	تحت المماس
Subnormal	تحت العمود
<b>Chapter 8</b>	<b>الفصل الثامن</b>
Increasing function	دالة متزايدة
Decreasing function	دالة متناقصة

Stationary function	دالة مستقرة
Bending	انحناء
Inflection	انطلاف
<b>Chapter 9</b>	<b>الفصل التاسع</b>
<b>Chapter 10</b>	<b>الفصل العاشر</b>
Rectilinear motion	الحركة المستقيمة
Circular motion	الحركة الدائرية
Acceleration	تسارع (عجلة)
Angular velocity	سرعة زاوية
Angular acceleration	تسارع زاوى
<b>Chapter 11</b>	<b>الفصل الحادى عشر</b>
Related rates	المعدلات المتعلقة ببعضها
<b>Chapter 12</b>	<b>الفصل الثانى عشر</b>
Trigonometric function	دوال مثلثية
Radian measure	المقياس الدائرى
sin	جا
cos	جنا
tan	ظا
sec	قا
Cosec	قنا
Cotan	ظنا
<b>Chapter 13</b>	<b>الفصل الثالث عشر</b>
Inverse trigonometric functions	دوال مثلثية عكسية
<b>Chapter 14</b>	<b>الفصل الرابع عشر</b>
Exponential function	دالة أسية
Logarithmic function	دالة لوغاريتمية
<b>Chapter 15</b>	<b>الفصل الخامس عشر</b>
Hyperbolic function	دالة زائدية
Inverse hyperbolic function	دالة زائدية عكسية
<b>Chapter 16</b>	<b>الفصل السادس عشر</b>
Parametric equations	معادلات بارامترية

**Chapter 17**

Curvature  
Radius of curvature  
Circle of curvature  
Evolute

**Chapter 18**

Plane vectors  
Scalar  
Speed  
Scalar or Dot product

**Chapter 19**

Curvilinear motion

**Chapter 20**

Polar coordinates  
Angle of inclination  
Angle of intersection  
Cardioid

**Chapter 21**

The law of the Mean  
Generalized law  
Extended law

**Chapter 22**

Indeterminate

**Chapter 23****Chapter 24**

Curve Tracing  
Extent  
Asymtotes  
Singular point  
Node  
Cusp  
Tacnode  
Isolated point

**الفصل السابع عشر**

انحناء ( تقوس )  
نصف قطر الانحناء  
دائرة الانحناء  
منشئ

**الفصل الثامن عشر**

متجهات مستوية  
عادي  
سرعة قياسية  
ضرب عادي أو قياسي

**الفصل التاسع عشر**

الحركة الخطية الانحنائية

**الفصل العشرون**

احداثيات قطبية  
زاوية الميل  
زاوية التقاطع  
منحنى القلب

**الفصل الحادي والعشرون**

قانون القيمة المتوسط  
قانون عام  
قانون موس

**الفصل الثاني والعشرون**

غير محدد

**الفصل الثالث والعشرون****الفصل الرابع والعشرون**

رسم المنحنيات  
حيز  
خط ( مستقيم ) مقارب  
نقطة مفردة  
عقدة  
ناب  
عقدة تماس  
نقطة منعزلة



<b>Chapter 25</b>	<b>الفصل الخامس والعشرون</b>
Integration	تكامل
Indefinite integral	تكامل غير محدد
<b>Chapter 26</b>	<b>الفصل السادس والعشرون</b>
Integration by parts	تكامل بالتجزئة
Reduction formulas	صيغ الاختزال
<b>Chapter 27</b>	<b>الفصل السابع والعشرون</b>
Identities	متطابقات
<b>Chapter 28</b>	<b>الفصل الثامن والعشرون</b>
<b>Chapter 29</b>	<b>الفصل التاسع والعشرون</b>
Integration by partial fractions	تكامل بالكسور الجزئية
Real coefficient	معامل حقيقى
Rational fraction	دالة جذرية
Proper	حقيقى
Distinct linear factors	معاملات خطية متمايزة
Repeated linear factors	معاملات خطية متكررة
Quadratic	تربيعى
Quadratic factor	معامل تربيعى
<b>Chapter 30</b>	<b>الفصل الثلاثون</b>
<b>Chapter 31</b>	<b>الفصل الحادى والثلاثون</b>
<b>Chapter 32</b>	<b>الفصل الثانى والثلاثون</b>
Indefinite integrals	تكامل غير محدد
Orthogonal trajectories	مسارات متعامدة
<b>Chapter 33</b>	<b>الفصل الثالث والثلاثون</b>
Definite integrals	تكامل محدد ( محدد )
<b>Chapter 34</b>	<b>الفصل الرابع والثلاثون</b>
Slicing	شريحة
Horizontal slicing	شريحة أفقية
Vertical slicing	شريحة رأسية
Parabola	قطع مكافئ
Cycloid	منحنى دويرى ( سيكلويد )
Loop	حلقة

Chapter 35	الفصل الخامس والثلاثون
Shell	قشرة
Chapter 36	الفصل السادس والثلاثون
Ellipse	قطع ناقص
Chapter 37	الفصل السابع والثلاثون
Centroid	مركز متوسط
Moment	عزم
Hypocycloid	منحنى دويرى تحتى
Chapter 38	الفصل الثامن والثلاثون
Moment of inertia	عزم القصور الذاتي
Radius of gyration	نصف قطر الدوران
Chapter 39	الفصل التاسع والثلاثون
Fluid pressure	ضغط السائل
Submerged	مغمور
Chapter 40	الفصل الأربعون
Work	شغل
Variable force	قوة متغيرة
Modulus of spring	معامل الزنبرك
Chapter 41	الفصل الحادى والأربعون
Length of arc	طول قوس
Curve of prusuit	منحنى المطاردة
Chapter 42	الفصل الثانى والأربعون
Chapter 43	الفصل الثالث والأربعون
Chapter 44	الفصل الرابع والأربعون
Limacon	منحنى يماسون
Cardioid	منحنى القلب
Spiral of Archimides	حلزون أرشميدس
Chapter 45	الفصل الخامس والأربعون
Chapter 46	الفصل السادس والأربعون
Improper Integrals	تكاملات متناهية

<b>Chapter 47</b>	<b>الفصل السابع والأربعون</b>
Sequence	متوالية
Series	متسلسلة
Converge	متقارب
Convergent sequence	متوالية متقاربة
Divergent sequence	متوالية متباعدة
<b>Chapter 48</b>	<b>الفصل الثامن والأربعون</b>
<b>Chapter 49</b>	<b>الفصل التاسع والأربعون</b>
Alternating Series	متسلسلة متناوبة
Absolute convergence	تقارب مطلق
Conditional convergence	تقارب مشروط
<b>Chapter 50</b>	<b>الفصل الخمسون</b>
<b>Chapter 51</b>	<b>الفصل الحادي والخمسون</b>
Power series	متسلسلة قوى
Interval of convergence	فترة التقارب
Uniform convergence	تقارب منتظم
Remainder	الباقى
<b>Chapter 52</b>	<b>الفصل الثاني والخمسون</b>
Expansion	فك أو مفكوك
<b>Chapter 53</b>	<b>الفصل الثالث والخمسون</b>
<b>Chapter 54</b>	<b>الفصل الرابع والخمسون</b>
<b>Chapter 55</b>	<b>الفصل الخامس والخمسون</b>
Trapezoidal	شبه المنحرف
Prismoidal	شبه المنشور
<b>Chapter 56</b>	<b>الفصل السادس والخمسون</b>
Partial Derivatives	مشتقات جزئية
Implicit	ضمنى
<b>Chapter 57</b>	<b>الفصل السابع والخمسون</b>
Total differential	تفاضلات كلية
Total derivatives	مشتقات كلية

Chain rule	قاعدة السلسلة
Power	قوة
<b>Chapter 58</b>	<b>الفصل الثامن والخمسون</b>
Implicit functions	دوال ضمنية
<b>Chapter 59</b>	<b>الفصل التاسع والخمسون</b>
<b>Chapter 60</b>	<b>الفصل الستون</b>
Directional derivatives	مشتقات متجهة
Gradient	تدرج
Direction numbers	أعداد اتجاه
Direction cosines	جيوب تمام الاتجاه
<b>Chapter 61</b>	<b>الفصل الحادي والستون</b>
Analytic geometry	هندسة تحليلية
Triple scalar product	حاصل الضرب الثلاثي العددي
Triple vector product	حاصل الضرب المتجه الثلاثي
<b>Chapter 62</b>	<b>الفصل الثاني والستون</b>
Osculating plane	مستوى ملاصق
Normal plane	مستوى عمودي
Rectifying plane	مستوى مقوم
Operator	مؤثر
Divergence	التفرق
Curl	الدوران
Line integral	تكامل خطي
<b>Chapter 63</b>	<b>الفصل الثالث والستون</b>
Iterated integrals	تكاملات مكررة
Double integrals	تكامل ثنائي
<b>Chapter 64</b>	<b>الفصل الرابع والستون</b>
<b>Chapter 65</b>	<b>الفصل الخامس والستون</b>
Octant	ثمان $\frac{1}{8}$
Paraboloid	مجسم القطع المكافئ

<b>Chapter 66</b>	<b>الفصل السادس والستون</b>
Conc	محروط
Elliptic cylinder	أسطوانة ناقصة المقطع
Lemniscate	منحنى ذو عروتين
<b>Chapter 67</b>	<b>الفصل السابع والستون</b>
<b>Chapter 68</b>	<b>الفصل الثامن والستون</b>
<b>Chapter 69</b>	<b>الفصل التاسع والستون</b>
Differential equation	معادلة تفاضلية
Order	رتبة
Degree	درجة
Integrating factor	عامل تكامل
<b>Chapter 70</b>	<b>الفصل السبعون</b>





مطابع الدار الهندسية/القاهرة  
تبركر ٢٥١٠٢٥٩٨ بحول ٠١٢٢٣٤٩٠١١

